

Jacobi, Frank

Working Paper

ARCH-Prozesse und ihre Erweiterungen - Eine empirische Untersuchung für Finanzmarktzeitreihen -

Arbeitspapier, No. 31

Provided in Cooperation with:

Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Institut für Statistik und Ökonometrie

Suggested Citation: Jacobi, Frank (2005) : ARCH-Prozesse und ihre Erweiterungen - Eine empirische Untersuchung für Finanzmarktzeitreihen -, Arbeitspapier, No. 31, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, Institut für Statistik und Ökonometrie, Mainz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/22309>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

ARCH-Prozesse und ihre Erweiterungen
- Eine empirische Untersuchung für Finanzmarktzeitreihen -

Frank Jacobi

Arbeitspapier Nr. 31 (April 2005)

Institut für Statistik und Ökonometrie
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Fachbereich Rechts- und Wirtschafts-
wissenschaften
Haus Recht und Wirtschaft II

D 55099 Mainz

Herausgeber: Univ.-Prof. Dr. P.M. Schulze

© 2005 Institut für Statistik und Ökonometrie, Mainz
ISSN Nr. 1430 - 2136

ARCH-Prozesse und ihre Erweiterungen - Eine empirische Untersuchung für Finanzmarktzeitreihen -

Frank Jacobi

Gliederung

1 Einleitung	2
2 Charakteristika von Finanzmarktzeitreihen	3
3 Theoretische Grundlagen	5
3.1 ARCH-Modelle	5
3.2 Schätzmethodik	12
3.3 Spezifikations- und Diagnosetests	14
3.4 Prognosen durch ARCH-Modelle	15
4 Empirischer Teil	16
5 Zusammenfassung	26
Anhang I Dickey-Fuller-Tests	I
Anhang II Tabellen und Abbildungen	III
Literatur	VI

Zusammenfassung

Das in Finanzmarktdaten zu beobachtende *volatility-clustering* impliziert, daß große Renditeschocks bei der Preisbildung die Wahrscheinlichkeit einer hohen zukünftigen Volatilität steigern. Ausgehend von den von Engle (1982) vorgeschlagenen ARCH-Modellen hat sich eine ganze Reihe von Modellvarianten zur Modellierung und Prognose bedingter Varianzen entwickelt. In dieser Analyse werden ARCH-Modelle und ausgewählte Erweiterungen hinsichtlich ihrer Eignung zur Modellierung und Prognose bedingter Varianzen im DAX miteinander verglichen.

Summary

The volatility clustering observed in financial market data implies that large net yield shocks increase the probability of a higher future volatility during the price formation. Starting from the ARCH models which were suggested by Engle (1982), a range of models for conditional variances have been developed. In this analysis ARCH models and selected extensions are compared with each other regarding their suitability for the modelling and prognosis of conditional variances in the DAX-index.

1 Einleitung

Viele theoretische Ansätze der Kapitalmarkttheorie gehen davon aus, daß die Varianz von Renditen im Zeitablauf konstant ist. Bei der Betrachtung von Preisänderungsraten auf spekulativen Märkten kann aber typischerweise beobachtet werden, daß sie zwar häufig um einen konstanten Mittelwert fluktuieren, ihre Variabilität jedoch im Zeitablauf nicht konstanten Schwankungen unterliegt. Es besteht dabei die Tendenz, daß ruhige Phasen mit geringer Varianz immer wieder durch turbulente Phasen abgelöst werden, nach denen die Varianz nur langsam wieder auf das Ausgangsniveau abklingt. Dieses sog. *volatility clustering* führt dazu, daß die Varianz des Prognosefehlers nicht mehr konstant, sondern bedingt heteroskedastisch ist und sich aus den vergangenen Kursrealisationen bestimmt. Sie ist somit zumindest teilweise prognostizierbar. Klassische Methoden der linearen Regressions- und Zeitreihenanalyse unterstellen hingegen eine im Zeitablauf konstante Varianz der Zufallsfehler, womit diesem Phänomen in keiner Weise Rechnung getragen wird.

Speziell Aktien- und Wechselkurse, Zinssätze oder Wachstumsraten, wie z.B. die Inflation, weisen derartige Verhaltensmuster auf, die einen Bruch mit den klassischen linearen Zeitreihenmodellen unumgänglich machen und einen nichtlinearen Modellierungsansatz erfordern. Einen solchen liefert Engle (1982) mit seiner Arbeit zur Analyse von Inflationsraten, in der er die sog. ARCH-Prozesse zur Modellierung der Varianz von Zeitreihen vorschlägt.¹ Diese nichtlineare Spezifikation der bedingten Varianz durch einen autoregressiven Prozeß der verzögerten quadrierten Residuen findet mittlerweile nicht nur bei der Risikomessung und -prognose z.B. für die Optionspreisbestimmung regelmäßig seine Anwendung, sondern ermöglicht auch die Berechnung präziserer Prognoseintervalle, die korrekte Spezifikation von Regressionsresiduen und eine gültige statistische Inferenz im Regressionsmodell.

Dieser Beitrag vergleicht Engles ARCH-Prozesse mit ausgewählten Erweiterungen hinsichtlich ihrer Eignung zur Modellierung und Prognose bedingter Varianzen. Nachdem in Kapitel 2 empirische Merkmale von Finanzmarktdaten kurz diskutiert werden, soll in Kapitel 3 eine Übersicht über die Theorie univariater ARCH-Modelle erfolgen. Kapitel 4 beinhaltet eine empirische Analyse täglicher Renditen des Deutschen Aktienindex (DAX).

¹ Die Abkürzung ARCH steht für autoregressive conditional heteroskedasticity. Engle wurde 2003 für diese Arbeit mit dem Nobelpreis geehrt.

2 Charakteristika von Finanzmarktzeitreihen

In der empirischen Analyse von Finanzmarktdaten weisen die zu untersuchenden Daten einige empirisch fundierte Eigenschaften auf, die sie von anderen ökonomischen Zeitreihen unterscheiden. Im Folgenden sollen vier Eigenschaften kurz diskutiert werden.

Merkmal 1: Stochastische Trends und Stationarität

Bei der Analyse von Finanzmarktdaten kann regelmäßig beobachtet werden, daß die Ausgangsdaten temporale Trends aufweisen.² Die Einflüsse dieser Trends können in einer statistischen Analyse von Wirkungszusammenhängen jedoch nicht nur evtl. nicht vorhandene Abhängigkeiten vortäuschen (*spurious regression*), sondern bei einem steigenden Prognosehorizont auch zu einer größeren Unsicherheit führen (Eckey/ Kosfeld/ Dreger, 2001, S. 200). Für sinnvolle statistische Analysen muß man daher davon ausgehen können, daß die betrachtete Zeitreihe stationär ist, also langfristig ein stabiles Verhalten aufweist.³ Im Finanzbereich werden daher häufig Renditen von Wertpapieren betrachtet. Hier sind die stochastischen Trends im wesentlichen eliminiert und das Instrumentarium der linearen Statistik damit anwendbar.

Merkmal 2: Volatilitätsclusterung

Das Phänomen der Volatilitätsclusterung beschreibt die zeitliche Konzentration absolut hoher und niedriger Renditen. Dadurch treten in den Zeitreihen der absoluten und der quadrierten Renditen signifikant positive Autokorrelationen auf, welche dann die Grundlage für die Prognostizierbarkeit der bedingten Varianz darstellen.

Als Gründe für die Volatilitätsschwankungen kommen zum einen Phasen mit unterschiedlicher Unsicherheit in Frage. So können vor allem das Auftreten von Gerüchten, wie z.B. über die Fusion großer Unternehmen, politische Entscheidungen, aber auch kriegsartige Auseinandersetzungen oder Terroranschläge, vorübergehend zu großen Unsicherheiten auf den Finanzmärkten führen. Im Zuge von Erwartungsänderungen können die Investoren zu umfangreichen Portfolioanpassungen veranlaßt werden und dadurch ausgelöste Preissprünge einen Anstieg der Volatilität auslösen, der dann nur langsam wieder abklingt.

² Ein Trend kann prinzipiell deterministischer oder stochastischer Natur sein. Ein stochastischer Trend folgt einem differenzstationären Prozeß, die Stationarisierung erfolgt hier durch Differenzenbildung (Enders, 1995, S. 166ff.).

³ Schwache Stationarität liegt vor, wenn der Mittelwert, die Varianz und die Kovarianzen endlich und zeitinvariant sind (Enders, 1995, S. 68f.). Mit Hilfe sog. Einheitswurzel-Tests kann geprüft werden, ob eine Zeit-

Von Stock (1988, S. 77) wurde die sog. *Time-Deformation-Hypothese* diskutiert. Hierbei wird davon ausgegangen, daß jede ökonomische Variable ihre eigene operationelle Zeitskala besitzt, innerhalb welcher sich ihre dynamische Entwicklung vollzieht. Empirisch gemessen werden die Variablen jedoch in einer Kalender-Zeitskala. Entwickelt sich nun die betrachtete Variable relativ zur Kalenderzeit schneller oder langsamer, so kann dies zum *volatility clustering* führen.

Als weitere Ursachen struktureller Veränderungen der Preisvariabilität können auch die zunehmend engere internationale Kapitalverflechtung, die Einführung von Finanzinnovationen sowie das Vordringen institutioneller Investoren diskutiert werden (Deutsche Bundesbank, 1996, S. 59ff.).

Merkmal 3: Leptokurtische Verteilung

Auf Mandelbrot (1963, S. 418) geht die Erkenntnis zurück, daß die unbedingte Dichte von Renditen durch eine im Vergleich zur Normalverteilung deutlich erhöhte Wölbung gekennzeichnet ist. Einerseits konzentriert sich die Mehrzahl der Renditerealisationen um ihren Erwartungswert, andererseits treten aber auch extreme Renditen mit einer höheren Wahrscheinlichkeit auf, als man unter Normalverteilung erwarten würde. Eine Identifikation dieser Eigenschaft erlaubt die Kurtosis, die für normalverteilte Daten den Wert 3, für empirische Renditen aber meist deutlich höhere Werte annimmt.

Merkmal 4: Leverage-Effekt

Black (1976) beschreibt die Eigenschaft, daß die Volatilität auf Aktienmärkten nach negativen Schocks i.d.R. stärker steigt als nach positiven. Diese Eigenschaft der negativen Korrelation der bedingten Varianz mit vergangenen Renditen wird auch als „Leverage-Effekt“ bezeichnet. Eine mögliche ökonomische Erklärung hierfür ist der durch schlechte Nachrichten ausgelöste Kursverfall einer Aktie. Dieser führt zu einem höheren Verschuldungsgrad der Unternehmung und steigert somit das Risiko und die zukünftige Volatilität des Eigenkapitals (Krämer, 2000, S. 16).

reihe stationär ist, bzw. wie sie in eine stationäre Zeitreihe transformiert werden kann (Enders, 1995, Kapitel 4).

3 Theoretische Grundlagen

3.1 ARCH-Modelle

Zur Darstellung der ARCH-Modelle im Rahmen eines ökonometrischen Modells sei eine univariate Renditezeitreihe y_t ($t = 1, 2, \dots, T$) modelliert als

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

wobei $\mu_t = f(\Omega_{t-1})$ den bedingten Erwartungswert zum Zeitpunkt t bezeichnet und durch eine Funktion der am Periodenanfang zur Verfügung stehenden Informationsmenge Ω_{t-1} modelliert werden kann. ε_t bezeichnet die stochastische Restgröße, welche gemäß den Annahmen linearer Modelle White-Noise-Charakter⁴ besitzen soll. Aufgrund der für Finanzmarktdaten typischen Volatilitätsclusterung und der daraus resultierenden Korrelationsstruktur in den quadrierten Residuen schlägt Engle (1982, S. 988) mit

$$\varepsilon_t = \sqrt{\sigma_t^2} u_t \quad (3.2)$$

einen multiplikativen Prozeß zur Modellierung der bedingten Varianz vor, wobei der Varianzprozeß σ_t^2 durch eine lineare Funktion der quadrierten verzögerten Residuen ε_{t-i}^2 modelliert wird:⁵

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2. \quad (3.3)$$

u_t wird hierbei als unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariable mit $E(u_t) = 0$ und $Var(u_t) = 1$ angenommen, welche unabhängig von den $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots$ ist. Um eine positive bedingte Varianz sicherzustellen, müssen die aus den Daten zu schätzenden Parameter α die Nichtnegativitätsbedingungen $\alpha_0 > 0$ und $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, p$ erfüllen. Der Lag-Parameter p definiert dabei den Zeitraum, über den vergangene Schocks einen signifikanten Einfluß auf den heutigen Wert der bedingten Varianz ausüben. Durch den autoregressiven Charakter von Gleichung (3.3) wird nun insbesondere die Modellierung der Volatilitätsclusterung ermöglicht. Bei Gültigkeit der Nichtnegativitätsrestriktionen ist Gleichung (3.3) eine monoton steigende Funktion der quadrierten verzögerten Residuen. Große vergangene Schocks vergrößern somit die Varianz der nächsten Periode, so daß weitere große Renditen wahrscheinlicher werden.

⁴ Insbesondere sollen die Residuen ε_t linearer Modelle folgende Eigenschaften erfüllen (Hübler, 1989, S. 34-37): $E(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ für $t \neq s$, $Cov(X_t, \varepsilon_t) = 0$ und $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

⁵ Daher auch die Bezeichnung *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* (ARCH): Die bedingte Varianz ist heteroskedastisch und bestimmt sich aus der Vergangenheit des Prozesses.

ARCH-Modelle setzen die Spezifikation einer Verteilung für die stochastischen Fehler u_t voraus, die von der Informationsmenge $\mathcal{Q}_{t-1}$ abhängt. In dieser Analyse wird für die u_t Normalverteilung angenommen und die ε_t somit als bedingt normalverteilt spezifiziert:

$$\varepsilon_t \mid \mathcal{Q}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2). \quad (3.4)$$

Die Normalverteilungsannahme kann dabei jedoch ohne weiteres zugunsten einer anderen bekannten Verteilung aufgegeben werden.⁶

Auch wenn die bedingte Varianz annahmegemäß zeitabhängig ist, kann ein ARCH-Prozeß in den unbedingten Momenten durchaus stationär sein. Engle (1982, S. 993 und S. 1004f.) führt den Beweis, daß unter der Bedingung

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1 \quad (3.5)$$

ein ARCH(p)-Prozeß kovarianzstationär ist mit $E(\varepsilon_t) = 0$, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ für $t \neq s$ und konstanter unbedingter Varianz

$$E(\varepsilon^2) = \bar{\sigma}^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i}. \quad (3.6)$$

Aus der Gültigkeit der Stationaritätsbedingung kann nun gefolgert werden, daß schwach stationäre ARCH(p)-Prozesse der Klasse der White-Noise-Prozesse angehören. Speziell für $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ beinhaltet ein ARCH(p)-Prozeß den Spezialfall von homoskedastischem „Weißen Rauschen“. Ist Bedingung (3.6) nicht erfüllt, verliert ein ARCH-Prozeß offensichtlich seine White-Noise-Eigenschaften. Der Einfluß vergangener Schocks verliert dann im Zeitablauf nicht an Wirkung, sondern bleibt in der bedingten Varianz persistent. Die unbedingte Varianz in (3.6) ist dann nicht mehr definiert bzw. kann unendlich groß werden.

⁶ Aufgrund der in Kapitel 2 beschriebenen Leptokurtosis von Finanzmarkttrenditen wird in der Praxis als bedingte Verteilung oft auf die standardisierte t-Verteilung zurückgegriffen (Bollerslev, 1987, S. 542).

Formal erinnert die Spezifikation (3.3) zunächst an einen Moving-Average Prozeß für die bedingte Varianz.⁷ Da jedoch die bedingte Varianz σ_t^2 nicht beobachtbar ist, definiert man $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ (Schmitt, 2002, S. 315). Gleichung (3.3) läßt sich dann umschreiben zu

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + v_t, \quad (3.7)$$

wobei $E(v_t) = 0$ und $Cov(v_t, v_s) = 0$ für $t \neq s$ gilt. Ein ARCH-Prozeß kann somit als autoregressiver Prozeß für die quadrierten Störterme ε_t^2 interpretiert werden. Für die Bestimmung der Anzahl relevanter Lags ist folglich im Prinzip dasselbe Instrumentarium einsetzbar, daß auch für die Identifikation von gewöhnlichen ARMA-Prozessen eingesetzt wird. Der Parameter p kann aus dem spezifischen Verlauf der Autokorrelationsfunktion (AKF) und der partiellen Autokorrelationsfunktion (PAKF) abgeleitet werden. Während der ARCH(p)-Prozeß die Eigenschaften eines White-Noise-Prozesses aufweist und damit keine Rückschlüsse über die Parameter der bedingten Varianz σ_t^2 möglich sind, enthält die AKF des quadrierten ARCH-Prozesses ε_t^2 eine Struktur, die mit der eines AR(p)-Prozesses vergleichbar ist.⁸

Für ARCH-Modelle existieren Momente höherer Ordnung nicht notwendigerweise (Engle, 1982, S. 992). Falls ein Moment ungerader Ordnung existiert, so ist dieses aufgrund der angenommenen Normalverteilung gleich Null. Die Kurtosis ist allgemein bei ARCH-Prozessen größer als die der Normalverteilung. Die unbedingte Verteilung der ε_t unterscheidet sich von der Normalverteilung dadurch, daß höhere Wahrscheinlichkeiten auf extremen Ereignissen liegen. Insgesamt betrachtet zeigt sich somit, daß die ersten drei der in Kapitel 2 beschriebenen Eigenschaften von Kapitalmarktrenditen (Konstanter Erwartungswert, Volatilitätsclusterung, Leptokurtosis) durch ARCH-Prozesse wiedergegeben werden können.

Die Problematik der ARCH-Modellierung besteht nun vor allem in der oft relativ langen Wirksamkeit von Renditeschocks, so daß für eine adäquate Modellierung ein autoregressiver Prozeß hoher Ordnung nötig ist. Daraus resultieren Schätzprobleme und Probleme mit der Einhaltung der Stationaritäts- und Nichtnegativitätsrestriktionen.

⁷ Auch Engle hat daher zunächst überlegt, statt ARCH die Bezeichnung MACH (Moving Average Conditional Heteroskedasticity) zu wählen (vgl. Engle, 2004, S. xii).

⁸ Charakteristisch für autoregressive Prozesse ist eine nach dem p-ten Glied abbrechende partielle Autokorrelationsfunktion, während die Autokorrelationsfunktion gegen Null konvergiert (Enders, 1995, S. 85).

GARCH-Modelle

Aufgrund der genannten Probleme der ARCH-Modelle, entwickelte Bollerslev (1986, S. 309) das Generalized ARCH-Modell (GARCH), in dem die Varianzgleichung (3.3) zusätzlich um q zeitverzögerte Werte der bedingten Varianz erweitert wird:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 . \quad (3.8)$$

Die Nichtnegativitätsrestriktionen $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, p$ und $\beta_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, q$ garantieren wiederum, daß die bedingte Varianz σ_t^2 strikt positiv wird.⁹ Rein intuitiv kann bereits vermutet werden, daß ein GARCH- im Vergleich zu einem ARCH-Modell die Volatilitätsclusterung noch besser beschreiben kann, da die vergangene bedingte Varianz als zusätzliche Einflußgröße in das Modell eingeht.

Gemäß dem Theorem 1 von Bollerslev (1986, S. 310) ist ein GARCH-Prozeß genau dann schwach stationär, wenn die Parameterrestriktion

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \quad (3.9)$$

gilt. Der Prozeß ist dann frei von Autokorrelation mit Erwartungswert Null und konstanter unbedingter Varianz

$$E(\varepsilon_t^2) = \bar{\sigma}^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j} . \quad (3.10)$$

Aus der Definition eines GARCH(p,q)-Prozesses geht nun hervor, daß er für $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$ sowohl einen ARCH(p)-Prozeß als auch für $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$ den Spezialfall von homoskedastischem „Weißen Rauschen“ umfaßt. In empirischen Untersuchungen, insbesondere bei hochfrequenten Finanzmarktdaten, hat sich aber in vielen Fällen gezeigt, daß die Stationaritätsbedingungen oft nur knapp oder gar nicht erfüllt waren.¹⁰ Liegt die Summe der Koeffizienten nahe bei Eins, wird von einer hohen Persistenz der bedingten Varianz gesprochen. Zuvor eingetretene Schocks verlieren dann im Zeitablauf offenbar nur langsam ihren Einfluß auf die bedingte Varianz. Ist hingegen die Summe größer oder gleich Eins, hat das autoregressive Polynom der Gleichung (3.8) eine Einheitswurzel, so daß alle vergangenen Schocks einen Einfluß auf die bedingten Varianzen ausüben (Bol-

⁹ Nelson und Cao (1992, S. 230) geben speziell für GARCH(1,q)- und GARCH(2,q)-Prozesse schwächere Bedingungen an, so daß diese Bedingungen lediglich hinreichend, nicht aber notwendig sind.

¹⁰ Siehe z.B. Lamoureux und Lastrapes (1990, S. 228).

lerslev/ Engle/ Nelson, 1994, S. 2968). In diesem Fall können auf der Stationaritätsbedingung beruhende Signifikanztests zu falschen Entscheidungen führen und zudem keine brauchbaren Prognosen zukünftiger Varianzen mehr erwartet werden. Weiterhin ist die bedingte Varianz gemäß (3.10) nicht mehr definiert.

Für die Identifikation von GARCH-Prozessen ist nun wiederum entscheidend, daß ein GARCH(p,q)-Prozeß eine äquivalente ARMA(p,q)-Darstellung besitzt (Bera/ Higgins, 1993, S. 317). Der Verlauf der AKF und der PAKF von ε_t^2 ähnelt somit dem eines herkömmlichen ARMA(p,q)-Prozesses, so daß entsprechend beide Funktionen zur Spezifikation des Prozesses herangezogen werden können.¹¹

Unter der Voraussetzung schwacher Stationarität läßt sich dann, ähnlich der MA(∞)-Darstellung eines ARMA(p,q)-Prozesses, durch sukzessives Einsetzen von σ_{t-j}^2 in (3.8), ein GARCH(p,q)-Prozeß als ein ARCH(∞)-Prozeß mit geometrisch abnehmenden Gewichten darstellen (Schmitt, 2002, S. 320). Dieses macht deutlich, daß der GARCH-Ansatz die Modellierung einer evtl. langen und flexiblen Lag-Struktur mit wenigen Parametern ermöglicht.¹²

Bollerslev (1986, S. 311ff.) hat nun auch die Eigenschaften von GARCH-Prozessen analysiert und dabei gezeigt, daß diese weitgehend denen von ARCH(p)-Prozessen entsprechen. Die Existenz höherer Momente ist wiederum mit einer weiteren Einschränkung des zulässigen Parameterbereichs verbunden. Ebenso ist die unbedingte Verteilung der ε_t durch eine höhere Spitze sowie breitere Ränder als bei der Normalverteilung gekennzeichnet. Somit sind ARCH- wie auch GARCH-Prozesse in der Lage, zumindest einen Teil der Leptokurtosis von Kapitalmarktrenditen zu modellieren.

Obwohl ein GARCH(p,q)-Modell bereits eine recht flexible Möglichkeit der Modellierung von Volatilitätsschwankungen und der Leptokurtosis darstellt, sind dennoch einige Phänomene empirischer Finanzmarktzeitreihen noch nicht abbildbar. So haben positive wie auch negative Schocks gleicher Größe durch die quadratische Struktur der Varianzgleichung denselben Effekt auf die bedingte Varianz. Daß diese Annahme insbesondere für

¹¹ Stationäre GARCH(p,q)-Prozesse zeichnen sich durch ein exponentielles Abklingen der AKF wie auch der PAKF aus, so daß eine Spezifikation sich als schwierig gestaltet (Enders, 1995, S. 85). Man wird daher zusätzlich auch auf die Hilfe von Modellselektionskriterien wie z.B. dem von Akaike zurückgreifen (vgl. Enders, 1995, S. 88).

¹² Hansen und Lunde (2001) wie auch Bera und Higgins (1993, S. 317) berichten, daß oft ein GARCH(1,1)-Prozeß bereits zu einer guten Anpassung an empirische Zeitreihen in der Lage ist.

Aktienrenditen nicht plausibel ist, wurde bereits in Kapitel 2 mit dem Leverage-Effekt begründet.

Asymmetrische GARCH-Modelle

Insbesondere die Beobachtung, daß die bedingte Varianz nach negativen Nachrichten stärker steigt als nach positiven, wirft die Frage nach Erweiterungen der Standardmodelle auf, welche asymmetrisch auf das Vorzeichen von Schocks reagieren können. Engle und Ng (1993, S. 1775) schlagen das Nonlinear Asymmetric GARCH (NGARCH) vor, in dem die Varianzgleichung eines GARCH(1,1)-Modells um einen Leverage-Parameter c erweitert wird

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1} + c\sigma_{t-1})^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2. \quad (3.11)$$

Die üblichen Nichtnegativitätsrestriktionen lauten dann $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ und $\beta_1 \geq 0$. Die Stationarität des Prozesses ist dann gewährleistet, wenn $\alpha_1(1+c^2) + \beta_1 < 1$ gilt (Schmitt, 2002, S. 330).

Aus ökonomischer Sicht wird für den Koeffizient c ein negatives Vorzeichen erwartet. Ein negativer Schock ε_{t-1} erhöht dann die bedingte Varianz stärker als ein positiver, so daß dem Leverage-Effekt Rechnung getragen werden kann. Speziell für $c = 0$ reduziert sich das NGARCH- zu einem symmetrischen GARCH-Modell. Positive wie auch negative Schocks üben dann wieder denselben Einfluß auf die bedingte Varianz aus.

Eine alternative asymmetrische Spezifikation stellt das GJR-Modell von Glosten, Jagannathan und Runkle (1993, S. 1787) dar. Es ermöglicht die Abbildung des Leverage-Effekts, indem die Varianzgleichung um eine Dummy-Variable I_{t-1}^+ erweitert wird, die als Indikatorfunktion den Wert 1 für positive ε_{t-1} annimmt und sonst gleich 0 ist. Die Varianzgleichung läßt sich dann schreiben als

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 I_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2, \quad (3.12)$$

wobei die Nichtnegativität durch die Bedingung $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$ und $\beta_1 \geq 0$ gewährleistet wird. Liegt eine Asymmetrie in den Daten vor, wird $\alpha_2 < 0$ erwartet. Für $\alpha_2 = 0$ reduziert sich das GJR-Modell zu einem symmetrischen GARCH-Modell.

ARCH-in-Mean-Modelle

Neben den asymmetrischen ARCH-Erweiterungen sind im Finanzbereich vor allem die ARCH-in-Mean-Modelle (ARCH-M) relevant. In der Kapitalmarkttheorie wird davon ausgegangen, daß der Preis eines Wertpapiers als Funktion seines Risikos (gemessen durch die Varianz) angesehen werden kann. Explizit wird dabei angenommen, daß für das Halten von riskanteren Wertpapieren auch eine im Mittel höhere Rendite erwartet wird. Die bisherige Definition der Mittelwertgleichung (3.1) ging aber davon aus, daß die bedingte Varianz keinen unmittelbaren Einfluß auf die erwartete Rendite ausübt. Engle, Lilien und Robins (1987, S. 394) erweitern daher den ARCH-Ansatz, indem sie die bedingte Standardabweichung σ_t als exogenen Einflußfaktor in das Modell der Zeitreihe y_t hinzufügen. Der Unterschied zwischen einem ARCH- und einem ARCH-M-Modell liegt somit nur in der Mittelwertgleichung, so daß die Modellierung der bedingten Varianz gegenüber dem entsprechenden ARCH-Modell unverändert bleibt. Die modifizierte Mittelwertgleichung läßt sich dann schreiben als

$$y_t = \mu_t + \lambda \cdot f(\sigma_t^2) + \varepsilon_t, \quad (3.13)$$

wobei ε_t wieder eine bedingt heteroskedastische Störgröße darstellt. $f(\cdot)$ bezeichnet eine bekannte Funktion von σ_t^2 , wobei in den meisten empirischen Analysen, wie auch hier, eine lineare Beziehung der Form $f(\sigma_t^2) = \sigma_t$ angenommen wird.¹³ λ kann hierbei als ein über alle Marktteilnehmer hinweg aggregiertes Maß der individuellen Risikoaversion verstanden werden. Sein Wert steht somit für den Preis einer Einheit des Marktrisikos, so daß für λ ein positives Vorzeichen erwartet werden kann. Je größer sein Wert geschätzt wird, desto höher ist die Risikoaversion und damit auch die Risikoprämie, die von einem Investor als Ausgleich für das Halten einer risikobehafteten Investition verlangt wird.

Wird ein Einfluß der bedingten Varianz auf die Mittelwertgleichung nicht zugelassen, so schlägt sich dieser Einfluß in den Residuen nieder. Bei der Interpretation ist daher zu beachten, daß eine zeitabhängige Risikoprämie (für $\lambda \neq 0$) nun insbesondere auch eine Autokorrelationsstruktur in den Renditen impliziert, die bei der Modellierung des Erwartungswerts berücksichtigt werden sollte (Bera/ Higgins, 1993, S. 348).

¹³ Alternativ kann in (3.13) auch die bedingte Varianz σ_t^2 oder eine andere Funktion der bedingten Varianz als erklärende Variable auftreten (Bera/ Higgins, 1993, S. 348).

3.2 Schätzmethodik

Nach der Modellspezifikation stellt sich zunächst die Frage nach den Schätzmöglichkeiten von ARCH-Modellen. Die Spezifikation des Renditeprozesses auf Basis von zwei Gleichungen für Erwartungswert und Varianz legt nahe, daß auch eine simultane Schätzung beider Gleichungen erforderlich ist. Dies leistet der in dieser Arbeit angewandte Maximum-Likelihood-Ansatz. Da Realisationen eines ARCH-Prozesses über das zweite Moment miteinander verbunden sind, erfolgt die Konstruktion der Likelihoodfunktion im Rahmen von ARCH-Schätzungen als Produkt der bedingten Dichtefunktionen (Franke/Härdle/Hafner, 2001, S. 212ff.). Für eine gegebene Stichprobe mit T Beobachtungen und gegebenen Anfangswerten erhält man als Likelihoodfunktion

$$L(x_1, \dots, x_T; \theta) = \prod_{t=1}^T f(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1; \theta), \quad (3.14)$$

wobei $f(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1; \theta)$ die bedingte Dichtefunktion der t -ten Beobachtung bezeichnet. Aus rechentechnischen Gründen maximiert man nicht $L(\theta)$ selbst, sondern ihren Logarithmus.¹⁴ Die resultierende Log-Likelihoodfunktion lautet:

$$\ln L(x_1, \dots, x_T; \theta) = \sum_{t=1}^T \ln f(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1; \theta). \quad (3.15)$$

Da in (3.4) die u_t als identisch und unabhängig standardnormalverteilt angenommen wurden, ist die bedingte Verteilung eine Normalverteilung mit Mittelwert μ_t und Varianz σ_t^2 . Die bedingte Dichte der t -ten Beobachtung kann daher geschrieben werden als

$$f(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right), \quad (3.16)$$

wobei $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ gilt, und σ_t^2 durch die Varianzgleichung des zu schätzenden ARCH-Modells bestimmt wird. Der Mittelwert μ_t kann dabei von einem Satz unbekannter Regressionsparameter abhängen, die zusammen mit den ARCH-Parametern durch die Maximierung der Likelihoodfunktion geschätzt werden. Die Log-Likelihoodfunktion $\ln L(x_1, \dots, x_T; \theta)$, bedingt auf die Startwerte $x_1, \dots, x_s$, ist dann unter Vernachlässigung konstanter Terme gegeben durch:

¹⁴ Da dieser eine streng monotone Transformation ist, nimmt die Funktion $\ln L(\theta)$ an der gleichen Stelle ihr Maximum an wie die Funktion $L(\theta)$.

$$\ln L(x_T, \dots, x_1; \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=s}^T \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=s}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}, \quad (3.17)$$

wobei s eine ganze Zahl größer als p ist.¹⁵

Für diese Funktion sind die partiellen Ableitungen nach θ zu bilden und gleich Null zu setzen. Da die dann zu lösenden Gleichungen hochgradig nichtlinear sind, müssen numerische Optimierungsverfahren zur Maximierung von (3.17) angewendet werden, wobei in dieser Arbeit auf den BHHH-Algorithmus¹⁶ zurückgegriffen wird.¹⁷

Nicht immer entspricht die bedingte Verteilung der Normalverteilung. Wichtig ist daher die Unterscheidung zwischen der wahren bedingten Verteilung des Prozesses und der vom Anwender für die Durchführung der ML-Schätzung unterstellten Verteilung. Wie Bera und Higgins (1993, S. 349) berichten, ist der ML-Schätzer auch bei nicht normalverteilten Zufallsschocks u_t durchaus sinnvoll und wird als Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzer (QML) bezeichnet. So kann gezeigt werden, daß trotz fehlender bedingter Normalverteilung der Ausgangsdaten - bei Gültigkeit einiger Regularitätsbedingungen und korrekter Spezifikation der bedingten ersten und zweiten Momente - der QML-Schätzer zu konsistenten Schätzergebnissen führt.¹⁸ Franses und van Dijk (2000, S. 173) berichten, daß der QML-Schätzer zu brauchbaren Schätzergebnissen führt solange die „wahre“ Verteilung zumindest symmetrisch ist. Vor allem für asymmetrische Verteilungen ist jedoch ein starker Effizienzverlust hinzunehmen.

¹⁵ Für ein ARCH(p)-Modell wählt man z.B. $s = p + 1$.

¹⁶ Siehe Berndt, Hall, Hall und Hausmann (1974, S. 656ff.)

¹⁷ Wie gezeigt werden kann, sind die durch Maximierung von (3.17) gewonnenen Schätzer unter Regularitätsbedingungen konsistent, asymptotisch effizient und asymptotisch normalverteilt (Franke/ Härdle/ Hafner, 2001, S. 224f.) Für die Klasse der ARCH-Prozesse ist die Gültigkeit dieser Regularitätsbedingungen jedoch z.T. nur schwer nachweisbar. So bemerken Bollerslev, Engle und Nelson (1994, S. 2980) in diesem Zusammenhang kritisch: „The common practice in empirical studies has been to proceed under the assumption that the necessary regularity conditions are satisfied.“

¹⁸ Dabei müssen jedoch die Standardfehler aufgrund fehlender Normalverteilung modifiziert werden (vgl. Bollerslev und Wooldridge (1992, S. 145).

3.3 Spezifikations- und Diagnosetests

Eine einfache Möglichkeit zur Spezifikation liefert Engle (1982, S. 999f.) mit dem von ihm vorgeschlagenen Lagrange-Multiplikator-Test (LM-Test). Dazu wird für die geschätzten quadrierten Residuen $\hat{\varepsilon}_t^2$ eines linearen Modells ein autoregressives Modell

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + v_t \quad (3.18)$$

spezifiziert und mittels der KQ-Methode geschätzt. Die Nullhypothese, daß keine ARCH(p)-Effekte vorliegen, ist dann äquivalent zu der Nullhypothese $H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.¹⁹ Bei einer Zeitreihe mit T Beobachtungen ergibt sich dann die Teststatistik als $LM(p) = T \cdot R^2$, wobei R^2 das Bestimmtheitsmaß der Regression (3.18) bezeichnet. Ist H_0 gültig, konvergiert die Teststatistik gegen eine χ^2 -Verteilung mit p Freiheitsgraden, so daß H_0 bei einem Signifikanzniveau α abgelehnt werden kann, wenn $\hat{LM}(p) > \chi_{p;1-\alpha}^2$ gilt.

Wenn ein ARCH-Modell spezifiziert und aus den Daten geschätzt wurde, ist in einem nächsten Schritt die empirische Haltbarkeit des Modells anhand der geschätzten Residuen zu überprüfen. Falls das geschätzte ARCH-Modell korrekt spezifiziert ist und der zugrundeliegende datengenerierende Prozeß tatsächlich bedingt normalverteilte ARCH-Störungen aufweist, ist zu erwarten, daß die mit der geschätzten bedingten Standardabweichungen $\hat{\sigma}_t$ standardisierten Residuen

$$\hat{\omega}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t} \quad (3.19)$$

ebenfalls approximativ normalverteilt sind mit Mittelwert Null und Varianz Eins. Für eine Überprüfung wird in dieser Arbeit auf den Jarque-Bera-Test (JB-Test) zurückgegriffen, welcher die Abweichung von Schiefe und Kurtosis von denen einer Normalverteilung mißt (von Auer, 1999, S. 308).

Darüber hinaus wird gefordert, daß die verbleibenden standardisierten Residuen $\hat{\omega}_t$ keine brauchbaren Informationen mehr enthalten, sich also als Realisation eines White-Noise-Prozesses auffassen lassen (Bollerslev/ Engle, Nelson, 1994, S. 2988). Eine zentrale Bedeutung kommt hier der Analyse der AKF, der PAKF wie auch dem Ljung-Box-Test zu.

¹⁹ Wie Bera und Higgins (1993, S. 354) zeigen, ist der Test auf ARCH-Effekte identisch mit einem Test auf GARCH-Effekte.

Die Prüfgröße

$$Q(p) = T(T+2) \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\rho}_i^2}{T-i} \quad (3.20)$$

summiert die quadrierten Autokorrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_i^2$ bis zu einem vorher bestimmten Lag p und erfaßt somit Abweichungen von der Nullhypothese „keine Autokorrelation auf allen p Lags“. Unter H_0 ist Q approximativ χ^2 -verteilt mit p Freiheitsgraden (Enders, 1995, S. 87f.).²⁰

Der LB-Test betrachtet jedoch nur lineare Zusammenhänge und ist folglich nicht in der Lage auch auf Unabhängigkeit zu testen. McLeod und Li (1983) haben hierfür einen Nichtlinearitätstest vorgeschlagen, welcher ebenfalls auf der Ljung-Box-Teststatistik basiert. Damit soll die Nullhypothese, daß die ersten p Autokorrelationskoeffizienten der quadrierten standardisierten Residuen $\hat{\omega}_i^2$ bis zum Lag p gemeinsam Null betragen, getestet werden. Unter der Nullhypothese der White-Noise-Eigenschaft der $\hat{\omega}_i^2$ kann H_0 abgelehnt werden, wenn $\hat{Q} > \chi_{p,1-\alpha}^2$ gilt. Dies ist dann ein Hinweis darauf, daß das betrachtete Modell die in den Daten vorhandenen ARCH-Effekte nicht vollständig erklären kann.²¹

3.4 Prognosen durch ARCH-Modelle

In der Prognosephase gilt es, alternative Modelle in ihrer Prognoseeignung gegeneinander abzuwägen. Die Beurteilung der Prognoseleistung ist jedoch problematisch, da die „wahre“ Varianz nicht direkt beobachtet werden kann und somit ein Benchmark fehlt, auf dessen Grundlage Aussagen über die Prognosequalität getroffen werden können. Da aber die bedingte Varianz als eine Ein-Schrittprognose des quadrierten Residuums der nachfolgenden Periode interpretiert werden kann, werden ARCH-Prognosen in der Praxis oft mit den quadrierten Residuen verglichen. Dabei kann zwar gezeigt werden, daß die quadrierten Residuen einen unverzerrten Schätzer für die latenten Varianzen darstellen, Andersen und Bollerslev (1998, S. 886) machen jedoch darauf aufmerksam, daß der quadrierte Residualprozeß $\hat{\varepsilon}_t^2$ aufgrund des White-Noise-Charakters im Vergleich zu $\hat{\sigma}_t^2$ viel höhere Variabi-

²⁰ Angewandt auf einen Residualprozeß eines ARMA-Modells muß die Anzahl der Freiheitsgrade um die Anzahl der geschätzten Parameter reduziert werden.

lität aufweist und somit keinen optimalen Benchmark darstellt. Sie schlagen deshalb vor, für eine Beurteilung von ARCH-Prognosen die Varianz von Tagesrenditen aus Intra-Tagesdaten – also aus hochfrequenten Daten – zu schätzen.

Gegeben die Information bis zum Zeitpunkt T kann nun, basierend auf der AR(p)-Darstellung (3.7) des ARCH-Prozesses, die τ -Schritt-Prognosegleichung für $\tau = 1, 2, \dots$ geschrieben werden als:

$$\hat{\varepsilon}_{T+\tau|T}^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \hat{\sigma}_{T+\tau-i|T}^2, \quad (3.21)$$

wobei $\hat{\sigma}_{T+\tau-i}^2 = \varepsilon_{T+\tau-i}^2$ für $\tau - i \leq 0$ und $E(v_{T+1}) = \dots = E(v_{T+\tau}) = 0$ gilt.

Auf Basis des Prognosefehlers $(\hat{\sigma}_t^2 - \hat{\varepsilon}_t^2)$ können dann die bekannten Prognosefehlermaße *Mean Square Error* (MSE) und *Mean Absolute Error* (MAE) berechnet werden:

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{\sigma}_t^2 - \hat{\varepsilon}_t^2)^2 \quad \text{und} \quad MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\hat{\sigma}_t^2 - \hat{\varepsilon}_t^2|. \quad (3.22)$$

Bei der Interpretation dieser Maße ist zu berücksichtigen, daß alternative Fehlermaße evtl. zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können. So werden durch das MSE aufgrund der Quadrierung große Abweichungen stärker gewichtet als bei absoluten Fehlermaßen.

4 Empirischer Teil

Das Datenmaterial

Basis der nachfolgenden Untersuchungen bilden die Schlußkurse des Deutschen Aktienindex (DAX) an 2.469 Handelstagen im Zeitraum vom 1. Februar 1991 bis zum 29. Dezember 2000. Der DAX wird auf Basis der Kurse der 30 umsatzstärksten deutschen Unternehmen berechnet, wobei er um Dividendenzahlungen und Kapitalveränderungen bereinigt wird. Auszahlungen einer Aktie werden in den entsprechenden Titel reinvestiert, so daß ein kontinuierliches Portefeuille entsteht, welches die Wertentwicklung deutscher Standardwerte widerspiegelt.

²¹ Für weitere Diagnosemöglichkeiten siehe z.B. den Übersichtsartikel von Bollerslev, Engle und Nelson (1994, S. 2984ff.).

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird nicht die Ausgangs-Kurszeitreihe, sondern die Log-Renditen r_t

$$r_t = \ln(k_t / k_{t-1}) \quad (4.1)$$

untersucht, wobei k_t den DAX-Kurs zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Mit Hilfe eines Dickey-Fuller-Tests werden zunächst die Zeitreihen auf Stationarität hin geprüft. Dabei kann die Random-Walk-Hypothese für die logarithmierte Kurszeitreihe aufgrund der Ergebnisse in Tabelle 5 (Anhang I, S. II) auf dem 5%-Signifikanzniveau nicht abgelehnt werden. Angewandt auf den Renditeprozeß entscheidet der Test bei einem Signifikanzniveau von 5% eindeutig so, daß von schwacher Stationarität der Renditen ausgegangen werden kann.

Einen ersten Eindruck über die Verteilungseigenschaften der Daten vermitteln die in Tabelle 6 (Anhang II, S. III) aufgelisteten empirischen Kennzahlen der Renditen. Aufgeführt sind Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel, Schiefe, Kurtosis, ausgewählte Quantile sowie die Jarque-Bera-Statistik (JB). Insbesondere zeigt sich, daß die Renditen nicht nur eine signifikante Linksschiefe aufweisen, auch die Kurtosis ist mit $k = 4,83$ deutlich höher als man unter Normalverteilung ($k = 3$) erwarten würde. Zusammen mit den betragsmäßig kleinen Werten für das 25%- und das 75%-Quantil deuten diese Ergebnisse auf eine „Klumpung“ der Renditen im Zentrum, sowie an den Enden der Häufigkeitsverteilung hin. Insgesamt kann daher von einer leptokurtischen Verteilung der betrachteten Daten ausgegangen werden. Formal bestätigt wird dies durch die JB-Statistik zur Prüfung auf Normalverteilung. Der *p-value*, also die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Nullhypothese (H_0 : Normalverteilung) ist Null.

Das erste Entscheidungsproblem bei der ARCH-Modellierung besteht nun in der Spezifikation des bedingten Erwartungswertes in (3.1). Bei der Analyse von Finanzmarktdaten wird hierfür häufig auf die Klasse der ARMA-Prozesse zurückgegriffen (vgl. Enders, 1995, Kapitel 2). Das für die Identifikation des Prozesses herangezogene Korrelogramm (Abb. 1, S. V) läßt vermuten, daß sich der Renditeprozeß kaum von einem Zufallsprozeß unterscheidet. Lediglich 3 Autokorrelationskoeffizienten liegen nennenswert außerhalb der 95%-Signifikanzgrenzen $[\pm 1,96 / \sqrt{T}]$ – dies entspricht in etwa dem Wert, der bei einem α -

Fehler von 5% erwartet werden kann.²² Die AKF zeigt folglich keinerlei Abhängigkeitsstruktur an, die sich sinnvoll mit ARMA-Prozessen modellieren läßt. Wie Krämer und Runde (1994, S. 3) zudem zeigen, unterschätzt der angenommene Standardfehler $1/\sqrt{T}$ bei bedingter Heteroskedastie den „wahren“ Standardfehler, und das „wahre“ Konfidenzintervall ist weiter als das berechnete. Das dargestellte Konfidenzintervall wird folglich eher zu einer ungerechtfertigten Ablehnung von White-Noise führen.

Da das Korrelogramm insbesondere keine Hinweise auf einen AR(1)- bzw. MA(1)-Prozeß liefert, soll im folgenden kein ARMA-Modell an die Renditen angepaßt, sondern von einem White-Noise-Prozeß ausgegangen werden. Die Analyse vereinfacht sich dadurch derart, daß im folgenden der um seinen unbedingten Mittelwert bereinigte Renditeprozeß untersucht werden kann.²³

Ein ähnliches Ergebnis liefert der Ljung-Box-Test. Zieht man die bestehenden Korrelationen in ihrer Gesamtheit in Betracht, dann zeigen die in Tabelle 7 (Anhang II, S. III) dargestellten Ergebnisse, daß die Hypothese „keine Autokorrelation der Ordnung p “ bis zu einem Lag von 10 nicht verworfen werden kann. Ab dem Lag 11 sinkt der berechnete p -value jedoch deutlich und liegt ab Lag 15 zumeist deutlich unter einem vorgegebenen α -Fehler von 5%. Dies deutet zunächst darauf hin, daß die DAX-Renditen zumindest eine schwache Autokorrelation aufweisen.²⁴

Auch wenn in den ersten Momenten keinerlei Abhängigkeitsstruktur auszumachen ist, zeigen die Ergebnisse des ARCH-Tests (Tabelle 7, S. III), daß die Renditen dennoch nicht unabhängig voneinander sind. Dazu wird der Nullhypothese einer konstanten bedingten Varianz die Alternativhypothese eines ARCH-Prozesses der Ordnung $p = 1$, $p = 5$ sowie $p = 10$ gegenübergestellt. In allen Fällen kann die Nullhypothese eindeutig verworfen werden. Die ebenfalls für die quadrierten Renditen untersuchten Werte der Ljung-Box Q-Statistik (Tabelle 7, S. III) liegen erwartungsgemäß alle im Ablehnungsbereich der Nullhypothese, so daß von einer starken zeitlichen Abhängigkeit in den bedingten Varianzen ausgegangen werden kann.

²² Bei einem α -Fehler von 5% und Berücksichtigung der ersten 40 Autokorrelationen können $0,05 \cdot 40 = 2$ Autokorrelationen außerhalb der Signifikanzgrenzen erwartet werden.

²³ Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Effizienzmarkthypothese. Diese besagt, daß Renditen in der Zeit kaum korrelieren, so daß Renditeprognosen auf effizienten Märkten nahezu aussichtslos sind (vgl. Campbell/ Lo/ McKinlay, 1997, S. 20ff.).

²⁴ Ferner muß bei bedingter Heteroskedastie auch die Berechnung der Ljung-Box-Statistik modifiziert werden, so daß die hier berechneten Prüfgrößen mit Vorsicht zu interpretieren sind (Gouriéroux, 1997, S. 87).

Bestätigt wird dies durch die Darstellung der AKF der quadrierten Renditen (Abb. 2, S. V). In dem Autokorrelogramm zeigt sich das typische monoton abklingende Verhalten eines ARCH(p)-Prozesses mit positiven Parametern α . Die ersten 40 Autokorrelationskoeffizienten der quadrierten Renditen liegen deutlich außerhalb der 95%-Signifikanzgrenzen $[\pm 1,96/\sqrt{T}]$. Weiter ist ersichtlich, daß die ebenfalls in Abbildung 2 dargestellten partiellen

Autokorrelationskoeffizienten bis zum Lag 8 signifikant von Null verschieden sind. Dies ist ein deutlicher Hinweis darauf, daß ein ARCH(8)-Prozeß zur Modellierung der bedingten Varianz angemessen ist.

Schätzung von ARCH-Modellen

Aufbauend auf den vorangegangenen Ergebnissen soll nun die Ordnung des ARCH-Prozesses festgelegt werden. Dazu wird zunächst ein ARCH(1)-Modell geschätzt und danach die Ordnung sukzessive bis zum 10. Grad erhöht. Erweisen sich einzelne Lags als insignifikant, dann entfällt zunächst ihre Berücksichtigung bei der Steigerung der Lag-Ordnung. Vor dem Hintergrund, daß mit komplexeren Modellen aufgrund der besseren Datenanpassung häufig eine schlechtere Prognoseperformance einhergeht, werden in dieser Arbeit die geschätzten Modelle zudem anhand des Schwarz-Bayes-Informationskriteriums (SBC) verglichen. Dadurch soll ein Kompromiß zwischen Datenanpassung und der Anzahl der benutzten Parameter gesucht werden (Enders, 1995, S. 88).²⁵ Gemäß den Ergebnissen des SBC in Tabelle 8 (Anhang II, S. IV) stellt sich erwartungsgemäß ein ARCH(8)-Prozeß als die zu präferierende Spezifikation heraus. Die Varianzgleichung des geschätzten Modells lautet:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t^2 = & 4,3 \cdot 10^{-5} + 0,049\varepsilon_{t-1}^2 + 0,076\varepsilon_{t-2}^2 + 0,091\varepsilon_{t-3}^2 + 0,120\varepsilon_{t-4}^2 + \\ & (13,31) \quad (2,75) \quad (3,51) \quad (3,79) \quad (4,87) \\ & 0,147\varepsilon_{t-5}^2 + 0,068\varepsilon_{t-6}^2 + 0,088\varepsilon_{t-7}^2 + 0,116\varepsilon_{t-8}^2 \cdot \\ & (6,10) \quad (3,34) \quad (4,31) \quad (4,98) \end{aligned}$$

Unter den Parameterschätzern ist jeweils der t-Wert angegeben.²⁶

²⁵ Unter den konkurrierenden Modellen wird dasjenige ausgewählt, welches den geringsten SBC-Wert aufweist. Bollerslev, Engle und Nelson (1994, S. 3011) beurteilen die Informationskriterien jedoch mit Skepsis, wenn sie anmerken: „Standard model selection criteria [...] have been widely used in the ARCH literature, though their statistical properties in the ARCH context are unknown. This is particularly true when the validity of the distributional assumptions underlying the likelihood is in doubt.“

²⁶ Ausgehend von einem 5%-Signifikanzniveau soll ein Koeffizient als signifikant angesehen werden, wenn der Betrag des entsprechenden t-Wertes größer als 2 ist.

Hinsichtlich der Volatilitätsdynamik zeigen sich teils hoch signifikante Parameter, worin sich die typische Persistenz in der bedingten Varianz widerspiegelt. Da die Koeffizienten des ARCH-Modells alle positiv sind, und die Summe der Koeffizienten mit 0,755 bedeutend kleiner als eins ist, sind alle Voraussetzungen für einen stationären ARCH-Prozeß erfüllt.

Geht man von der plausiblen Annahme aus, daß der Einfluß der Schocks ε_t^2 auf die bedingte Varianz im Zeitablauf abnimmt, zeigen die hier geschätzten Koeffizienten jedoch ihre größte Ausprägung am Lag 4, 5 und 8. Insbesondere aufgrund der hohen Anzahl zu schätzender Parameter und damit einhergehender Schätzprobleme kann davon ausgegangen werden, daß ARCH-Modelle wenig für Prognosen der bedingten Varianz geeignet sein dürften.

Schätzung von GARCH-Modellen

Da die Identifikation der Lag-Struktur eines GARCH-Prozesses anhand der AKF und der PAKF kaum möglich ist, werden nun für alle Kombinationen $(p,q) = (1,1), (2,1), (1,2)$ und $(2,2)$ GARCH-Prozesse mit und ohne ARCH-in-Mean-Term an die Daten angepaßt und die SBC-Werte für einen Vergleich dieser Modelle berechnet. Im Rahmen des ARCH-in-Mean-Ansatzes wurde eine lineare Beziehung der Form $f(\sigma_t^2) = \sigma_t$ gewählt. Die Resultate des SBC sind in Tabelle 8 (Anhang II, S. IV) zusammengefaßt.

Es zeigt sich, daß ein GARCH(1,2)-Prozeß von dem SBC-Kriterium zwar als die angemessene Spezifikation bestimmt wird, aufgrund eines signifikant negativen Schätzwerts für β_2 ist dieses Modell jedoch abzulehnen. Da sich in vielen empirischen Studien ein sparsames GARCH(1,1)-Modell bewährt hat, sollen daher auch die weiteren Untersuchungen auf diese Spezifikation zurückgreifen. Betrachtet man die Klasse der GARCH-M-Modelle, entscheidet sich das SBC klar für einen GARCH(1,1)-M-Prozeß als die angemessene Spezifikation. Die geschätzten Varianzgleichungen lauten dann:

$$\text{GARCH}(1,1) \quad \sigma_t^2 = 4,83 \cdot 10^{-6} + 0,084 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,883 \sigma_{t-1}^2$$

(6,79) (8,64) (64,76)

$$\text{GARCH}(1,1)\text{-M} \quad \sigma_t^2 = 4,81 \cdot 10^{-6} + 0,086 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,881 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{mit } \lambda = 0,0637.$$

(6,75) (8,5) (65,83) (3,14)

Da die GARCH-Koeffizienten alle positiv geschätzt wurden – und die Summe von α_1 und β_1 mit 0,96 jeweils knapp unter 1 liegt – sind alle Voraussetzungen für einen stationären

Prozeß erfüllt. Es besteht aber wie erwartet eine hohe Persistenz vergangener Schocks in der bedingten Varianz. Anhand der Schätzergebnisse ist nun auch erkennbar, daß der Parameter β_1 bedeutend größer als α_1 ist. α_1 ist dabei für das Ausmaß der unmittelbaren Reaktion auf neue Nachrichten ε_t verantwortlich, während β_1 die Dauer des Abklingens der Wirkung beschreibt. Wenn der Parameter β_1 deutlich größer als α_1 ist, schwingt σ_t^2 nach großen Schocks ε_t typischerweise langsam auf das Ausgangsniveau ab. Wenn α_1 größer als β_1 ist, erfolgt die Rückkehr zum Ausgangsniveau sehr schnell und das Ausmaß an *volatility clustering* ist dann eher gering.

Weiter ist ersichtlich, daß die Aufnahme des ARCH-in-Mean-Terms keine großen Auswirkungen auf die Parameterschätzungen der Varianzgleichung ausübt. Bemerkenswert ist jedoch, daß in der Mittelwertgleichung des GARCH-M-Modells der Marktpreis des Risikos mit $\lambda = 0,0637$ bei einem t-Wert von 3,14 hoch signifikant geschätzt wurde, so daß in hoch volatilen Phasen auch eine höhere Rendite erwartet werden kann.²⁷

Gemäß den Ergebnissen in Tabelle 8 (Anhang II, S. IV) kann weiterhin festgehalten werden, daß bei allen GARCH-Spezifikationen sämtliche SBC-Werte unter denen des ARCH(9)-Modells liegen. Daß die Klasse der GARCH-Modelle zu einer besseren Datenanpassung in der Lage ist, konnte auch so erwartet werden, da ein GARCH(1,1)- als ein ARCH(∞)-Prozeß darstellbar ist.

Asymmetrische GARCH-Schätzung

Um dem in den DAX-Renditen vermutetem Leverage-Effekt gerecht zu werden, wurde außerdem ein GJR-GARCH(1,1)-Modell und ein NGARCH(1,1)-Modell jeweils mit und ohne ARCH-in-Mean-Term an die Daten angepaßt. Das SBC entscheidet sich dabei gemäß den Ergebnissen in Tabelle 8 (Anhang II, S. IV) eindeutig für die Klasse der NGARCH-Modelle, wobei das NGARCH(1,1)-Modell als die geringfügig bessere Spezifikation angesehen werden kann. Die geschätzte Gleichung des NGARCH(1,1)-Modells lautet:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 7,01 \cdot 10^{-6} + 0,093(\varepsilon_{t-1} - 0,4978\sigma_{t-1})^2 + 0,861\sigma_{t-1}^2.$$

(9,08) (12,56) (- 7,95) (87,35)

Es zeigt sich wieder, daß sämtliche Parameter signifikant sind, und die Stationaritätsbedingung mit $\alpha_1(1 + c^2) + \beta_1 = 0,967 < 1$ erfüllt ist. Weiterhin sind α_1 und β_1 positiv, so daß alle Bedingungen für einen stationären Prozeß erfüllt sind. Das NGARCH-Modell bescheinigt

²⁷ Härdle und Hafner (1997, S.12) erhalten mit $\lambda = 0,0691$ eine in der gleichen Größenordnung liegende Schätzung.

den Daten – wie erwartet – die Existenz des Leverage-Effekts. Der entsprechende Parameter $c = -0,4978$ ist signifikant und hat das erwartete negative Vorzeichen.

Der ARCH-in-Mean-Term des NGARCH(1,1)-Modells wurde mit $\lambda = 0,045$ und einem t-Wert von 2,51 zwar ebenfalls signifikant, jedoch bedeutend geringer als bei den GARCH-Modellen geschätzt.

Die Schätzergebnisse des GJR-GARCH(1,1)-Modells bestätigen die Befunde der NGARCH-Modelle weitgehend. Die geschätzte Varianzgleichung des GJR-GARCH(1,1)-Modells lautet:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 7,12 \cdot 10^{-6} + 0,049 \varepsilon_{t-1}^2 - 0,121 I_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2 + 0,834 \sigma_{t-1}^2 .$$

(8,96) (4,79) (- 11,23) (67,84)

Der Leverage-Parameter konnte mit $\alpha_2 = -0,121$ signifikant negativ geschätzt werden. Es kann daher davon ausgegangen werden, daß negative Schocks die bedingte Varianz stärker steigern als positive, d.h., daß es somit eine negative Korrelation der bedingten Varianz mit vergangenen Renditen gibt. Der ARCH-in-Mean-Term wurde hier mit $\lambda = 0,051$ und einem t-Wert von 2,97 ebenfalls signifikant geschätzt. Er befindet sich dabei in der Größenordnung wie er auch bei dem NGARCH-M-Modell geschätzt wurde. Es kann nun festgehalten werden, daß die bedingte Standardabweichung einen signifikanten Einfluß auf die erwartete Rendite ausübt und somit von einer zeitvariablen Risikoprämie auszugehen ist.

Insgesamt zeigen diese Ergebnisse, daß gemäß den Ergebnissen von Schoffer (2000), asymmetrische GARCH-Modelle bei der Modellierung von Aktienrenditen einen klaren Erklärungsvorteil mit sich bringen und der Asymmetrie in den Daten besser gerecht werden können. Das NGARCH(1,1)-Modell kann dabei die Strukturen (Volatilitätsclusterung, Leptokurtosis, Leverage-Effekt) in den DAX-Renditen am besten erfassen. Es weist den geringsten SBC-Wert aller untersuchten Modelle auf.

Abschließend kann festgestellt werden, daß die Schätzungen der Parameter α_0 , α_1 , β_1 , c und des ARCH-in-Mean-Terms sich in den Größenordnungen bewegen, die üblicherweise bei Schätzung von täglichen Renditen des DAX gefunden werden.²⁸

²⁸ Siehe z.B. Schmitt (2002, S. 322-329). Härdle und Hafner (1997, S. 12) erhalten ebenfalls ähnliche Ergebnisse.

Modellbeurteilung

Die Güte der Modellanpassung der betrachteten (G)ARCH-Modelle soll nun anhand der Ljung-Box-Statistik der standardisierten Renditen $\hat{\omega}_t$ wie auch der quadrierten standardisierten Renditen $\hat{\omega}_t^2$ überprüft werden. Für den Fall, daß eine gute Anpassung der geschätzten Modelle gegeben ist, sollten keine signifikanten Autokorrelationen ermittelt werden können.

Einen Überblick über die Ergebnisse gibt Tabelle 1. Dabei zeigt sich, daß die LB-Statistiken in fast allen Fällen bei den standardisierten Residuen $\hat{\omega}_t$ eine schwach signifikante Autokorrelation 1. Ordnung anzeigen. Werden allerdings p Autokorrelationen in ihrer Gesamtheit betrachtet, zeigt sich, daß die Nullhypothese „keine Autokorrelationen auf allen p Lags“ für $p = 10, 20$ und 40 bei einem Signifikanzniveau von 5% durchgehend nicht abgelehnt werden kann. Da der Autokorrelationskoeffizient am Lag 1 mit etwa 0,03 äußerst gering – und somit ökonomisch kaum relevant ist – kann nicht zwingend von einer Fehlspezifikation der Mittelwertgleichung ausgegangen werden.

	LB1	LB10	LB20	LB40
ARCH(8)	5,38	15,46	21,46	45,16
GARCH(1,1)	4,22	13,42	19,91	41,23
GARCH(1,1)-M	4,32	13,38	20,05	40,80
NGARCH(1,1)	3,55	13,56	20,01	41,15
NGARCH(1,1)-M	3,48	13,51	20,05	41,23
GJR-GARCH(1,1)	3,78	13,68	20,00	41,18
GJR-GARCH(1,1)-M	3,85	13,72	20,09	41,33
Kritische Werte	3,84	18,30	31,41	55,75

Tabelle 1 Ergebnisse der LB-Teststatistik der standardisierten Residuen mit $\alpha = 5\%$ bei $p = 1, 10, 20$ und 40 .

Ein eindeutigeres Ergebnis zeigt sich bei einer Betrachtung der Ljung-Box-Statistiken für die quadrierten standardisierten Renditen (Tabelle 2). Es ist keinerlei Autokorrelation in den $\hat{\omega}_t^2$ zu erkennen, was eindeutig für die Eignung aller betrachteten Spezifikationen hinsichtlich der Modellierung bedingter Varianzen spricht. Die Nullhypothese „keine Autokorrelation auf allen p Lags“ kann bei keinem gängigen Signifikanzniveau abgelehnt werden. Die standardisierten Renditen der Modellschätzung genügen somit einem reinen Zufallsprozeß. Sie weisen keine erkennbaren systematischen Zusammenhänge mehr auf.

	LB1	LB10	LB20	LB40
ARCH(8)	0,14	2,57	4,17	11,38
GARCH(1,1)	0,07	2,20	3,42	8,11
GARCH(1,1)-M	0,07	2,16	3,38	8,14
NGARCH(1,1)	0,04	2,01	2,93	7,49
NGARCH(1,1)-M	0,04	2,07	2,96	7,45
GJR-GARCH(1,1)	0,05	2,12	3,10	7,67
GJR-GARCH(1,1)-M	0,04	2,11	3,08	7,69
Kritische Werte	3,84	18,30	31,41	55,75

Tabelle 2 Ergebnisse der LB-Teststatistik der quadrierten standardisierten Renditen mit $\alpha = 5\%$ bei $p = 1, 10, 20$ und 40 .

Falls das GARCH-Modell korrekt spezifiziert ist, sollten die standardisierten Renditen einen Mittelwert von 0 und eine Varianz von 1 besitzen, was auch, wie in Tabelle 3 ersichtlich, bei allen Modellen annähernd der Fall ist.

	Varianz	Kurtosis	Schiefe	JB-Test ²⁹
ARCH(8)	0,998	4,51	-0,61	6534,34
GARCH(1,1)	1,004	4,25	-0,56	6440,83
GARCH(1,1)-M	1,005	4,21	-0,57	6436,23
NGARCH(1,1)	1,002	2,96	-0,34	1441,49
NGARCH(1,1)-M	0,995	2,97	-0,37	1451,63
GJR-GARCH(1,1)	0,994	2,82	-0,38	1468,42
GJR-GARCH(1,1)-M	0,998	2,83	-0,39	1472,62

Tabelle 3 Beschreibende Maßzahlen der standardisierten Renditen

Dennoch sind die normierten Renditen bei weitem nicht normalverteilt, so daß neben der Normalverteilung die Betrachtung weiterer bedingter Dichtefunktionen angebracht erscheint. Die Jarque-Bera-Test-Statistik der standardisierten Renditen nimmt in allen Fällen weiterhin sehr große Werte an, so daß die Nullhypothese (H_0 : Normalverteilung) weiterhin eindeutig abzulehnen ist.

²⁹ Die JB-Statistik ist bei Normalverteilung χ^2 -verteilt mit 2 Freiheitsgraden.

Ex-post-Prognosen der bedingten Varianz

Um eine Aussage über die Prognosequalität der ARCH-Modelle treffen zu können, wurde der Stützzeitraum um 5 Börsentage gekürzt, und von jeder Modellkategorie die Spezifikation mit dem niedrigsten SBC-Wert bis zum Beginn des Prognosezeitraums geschätzt.

Als Gütekriterien werden dann der *Mean Square Error* (MSE) und der *Mean Absolute Error* (MAE) für die Prognosen der bedingten Varianz der folgenden fünf Börsentage ermittelt. Die Prognosen wurden dabei für den gewählten Zeitraum konstruiert, ohne die Parameter durch eine erneute Modellschätzung zu aktualisieren.

Bei der Interpretation der Prognoseleistung ist zu berücksichtigen, daß der Prognosezeitraum auf die letzte Dezemberwoche fällt, einem Zeitraum, der traditionell durch einen eher ruhigen Börsenverlauf gekennzeichnet ist, und somit eher kleine Prognosefehler zu erwarten sind. Die in Tabelle 4 dokumentierten Ergebnisse zeigen, daß gemessen am MAE, wie auch am MSE das NGARCH(1,1)-Modell die exaktesten Ex-post-Prognosen liefert. Dies war auch zu erwarten, da das Modell nach der Beurteilung des SBC auch zu der besten Datenanpassung in der Lage ist. Insgesamt betrachtet führen beide Fehlermaße nahezu zum selben Ergebnis.

	MSE		MAE	
ARCH(8)	$8,57 \cdot 10^{-8}$	(7)	$2,85 \cdot 10^{-4}$	(7)
GARCH(1,1)	$8,43 \cdot 10^{-8}$	(5)	$2,69 \cdot 10^{-4}$	(6)
GARCH(1,1)-M	$8,47 \cdot 10^{-8}$	(6)	$2,68 \cdot 10^{-4}$	(5)
NGARCH(1,1)	$7,65 \cdot 10^{-8}$	(1)	$2,49 \cdot 10^{-4}$	(1)
NGARCH(1,1)-M	$7,67 \cdot 10^{-8}$	(2)	$2,52 \cdot 10^{-4}$	(2)
GJR-GARCH(1,1)	$7,72 \cdot 10^{-8}$	(3)	$2,58 \cdot 10^{-4}$	(3)
GJR-GARCH(1,1)-M	$7,74 \cdot 10^{-8}$	(4)	$2,60 \cdot 10^{-4}$	(4)

Tabelle 4 MSE und MAE einer 5-Tages-Prognose

Weiterhin ist zu erkennen, daß die Prognosefehler des ARCH-Modells um etwa 10% größer ausfallen als die des NGARCH-Modells. Hier kommt das Prinzip der Sparsamkeit (vgl. Enders, 1995, S. 95f.) zum Tragen. So kann bei empirischen Arbeiten regelmäßig beobachtet werden, daß parameterärmere Modelle zu einer besseren Prognoseleistung in der Lage sind.

5 Zusammenfassung

Ziel dieser Analyse war es, mit Hilfe verschiedener ARCH-Spezifikationen die bedingte Varianz zu modellieren und die geschätzten Modelle in ihrer Prognoseeignung gegeneinander abzuwägen. Dabei hat sich gezeigt, daß die hier untersuchte Renditereihe des DAX stationär und unkorreliert ist, sowie auch die typischen Merkmale von Finanzmarktdaten (Volatilitätsclusterung, Leptokurtosis) aufweist.

Faßt man die Resultate des empirischen Teils zusammen, dann ist festzustellen, daß die Klasse der GARCH-Modelle dem klassischen ARCH-Ansatz aufgrund der sparsamen Parametrisierung eindeutig überlegen ist. Durch Anpassung von ARCH-in-Mean-Termen konnte zudem ein signifikanter Einfluß der bedingten Standardabweichung auf die Mittelwertgleichung festgestellt werden. Bei dem Versuch, den Leverage-Effekt abzubilden, hat sich gezeigt, daß das NGARCH(1,1)-Modell im Vergleich zu den symmetrischen GARCH-Modellen den kleinsten Wert für das Schwarz-Bayes-Informationskriterium sowie den kleinsten Prognosefehler aufweist. Es stellt sich somit als die überlegene Spezifikation dar.

Dabei sind aber offenbar alle Modelle zu einer adäquaten Modellierung der bedingten Heteroskedastie in der Lage. In den quadrierten, standardisierten Residuen war in allen Fällen keine Restautokorrelation mehr auszumachen, so daß die ARCH-Effekte durch die betrachteten Modelle fast vollständig erfaßt werden konnten.

Abschließend sei erwähnt, daß ARCH-Modelle sich prinzipiell zur Analyse multivariater Zeitreihen verallgemeinern lassen. Dies ist vor allem von ökonomischer Bedeutung, da viele ökonomische Zeitreihen in einer engen Beziehung zueinander stehen. Vor allem aufgrund der oft hohen Anzahl zu schätzender Parameter bleiben hier allerdings viele schätztheoretische Fragen offen, welche Gegenstand der aktuellen Forschung sind. Weitere Forschungsansätze beschäftigen sich mit der Entwicklung von Optionspreismodellen und der Analyse von Intra-Tagesdaten.³⁰

³⁰ Engle (2002) gibt einen Überblick über die aktuellen Forschungsgebiete.

Anhang I Dickey-Fuller-Tests

Mit Hilfe des Dickey-Fuller-Tests (DF-Test) soll geprüft werden, ob die logarithmierten DAX-Kurse y_t eine Einheitswurzel besitzen, und somit einem differenzstationären Prozeß folgen (Enders, 1995, S. 212ff.). Dazu werden für die ersten Differenzen der Renditen die folgenden drei Gleichungen geschätzt (Enders, 1995, S. 222):³¹

$$\Delta y_t = \mu + \alpha \cdot t + \gamma \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

$$\Delta y_t = \mu + \gamma \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.2)$$

$$\Delta y_t = \gamma \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.3)$$

Gleichung (5.1) beschreibt das unrestringierte Modell in dem neben den um eine Periode verzögerten logarithmierten DAX-Kursen auch eine Konstante μ und ein deterministischer Trend t aufgenommen werden. Entsprechend dem Ablaufschema des DF-Tests gilt es, alle möglichen Kombinationen zu prüfen, die auf $\gamma = 0$ testen (Enders, 1995, S. 223). Dazu wurden die folgenden Teststatistiken verwendet:

$$\tau(\cdot) = \frac{\hat{\gamma}}{s\hat{\gamma}} \quad (5.4)$$

$$\phi_i = \frac{(SSE_r - SSE_u) / r}{SSE_u / (T - m)} \quad (5.5)$$

T steht hierbei für die Anzahl der Beobachtungen, m bezeichnet die Anzahl geschätzter Parameter der unrestringierten Gleichung und r die Anzahl der zu testenden Restriktionen. Ist $\gamma = 0$ so liegt eine Einheitswurzel vor und die Zeitreihe ist differenzstationär. Für den Fall $\gamma < 0$ kann von einem stationären Prozeß ausgegangen werden.

Die drei geschätzten Gleichungen lauten (mit τ Werten in Klammern):

$$\Delta y_t = 0,017 + 1,35 \cdot 10^{-6} \cdot t - 2,41 \cdot 10^{-3} \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{SSE} = 0,531168$$

(2,04) (1,88) (-1,98)

$$\Delta y_t = 0,002 - 0,0002 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{SSE} = 0,53175$$

(0,79) (-0,61)

$$\Delta y_t = 0,00007 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{SSE} = 0,53185$$

(2,58)

³¹ Erweiterungen des DF-Test zum Augmented DF-Test erwiesen sich als nicht signifikant.
© 2005 Institut für Statistik und Ökonometrie, Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Gleichung	H_0	Prüfgr.	krit. Wert	ber. Wert	H_0 abgelehnt?
5.1	$\gamma = 0$	τ_τ	-3,41	-1,98	Nein
5.1 und 5.2	$\alpha = \gamma = 0$	Φ_3	6,25	1,78	Nein
5.1 und 5.3	$\mu = \alpha = \gamma = 0$	Φ_2	4,68	1,34	Nein
5.2	$\gamma = 0$	τ_μ	-2,86	-0,61	Nein
5.2 und 5.3	$\mu = \gamma = 0$	Φ_1	4,59	0,31	Nein
5.3	$\gamma = 0$	τ	-1,95	2,58	Nein

Tabelle 5 DF-Test auf Integration der DAX-Kurse mit $\alpha = 5\%$

Bei allen Tests kann H_0 nicht abgelehnt werden. Es muß daher davon ausgegangen werden, daß die logarithmierten DAX-Kurse einem differenzstationären Prozeß folgen. In einem zweiten Schritt sind nun die 1. Differenzen der logarithmierten Kurse auf Stationarität hin zu prüfen.

Die geschätzte Gleichung (5.3) für die Log-Renditen r_t (τ -Werte in Klammern) lauten:

$$\Delta^2 r_t = 1 \cdot 10^{-5} + 4,5 \cdot 10^{-8} t - 0,9896 \cdot r_{t-1} + \varepsilon_t$$

(− 0,207) (0,191) (− 56,662)

Die H_0 -Hypothese ist eindeutig abzulehnen. Es kann daher davon ausgegangen werden, daß die Log-Renditen keine Einheitswurzel besitzen und somit stationär sind.

Anhang II Tabellen und Abbildungen

Maßzahl	p-value	
Mittelwert	0,00058 ***	0,008
Varianz	0,00016	
Minimum	-0,09706	
Maximum	0,06153	
Schiefe	-0,57162 ***	0,000
Wölbung	4,82987 ***	0,000
Jarque-Bera	2451,98110 ***	0,000
25%-Quantil	-0,00555	
75%-Quantil	0,00769	

*** auf dem 1%-Niveau signifikant.

Tabelle 6 Beschreibende Maßzahlen für tägliche Renditeänderungen des DAX

Autokorrelation im Mittelwert	Prüfgröße	p-Wert
Ljung-Box-Test (1)	0,4824	0,5527
Ljung-Box-Test (10)	13,4564	0,1419
Ljung-Box-Test (20)	31,7456	0,0531 **
Ljung-Box-Test (40)	64,2423	0,0065 ***
Autokorrelation der quadrierten Zeitreihe		
Ljung-Box-Test (1)	88,2423	0,0000 ***
Ljung-Box-Test (10)	258,5744	0,0000 ***
Ljung-Box-Test (20)	333,3453	0,0000 ***
Ljung-Box-Test (40)	430,3244	0,0000 ***
ARCH LM-Test		
ARCH LM (1)	95,4535	0,0000 ***
ARCH LM (5)	139,3536	0,0000 ***
ARCH LM (10)	163,6345	0,0000 ***

*** auf dem 1%-Niveau; ** auf dem 5%-Niveau signifikant

Tabelle 7 Diagnosestatistiken für die Renditen und die quadrierten Renditen

Modell	SBC	
ARCH(1)	- 14798,98	
ARCH(2)	- 14901,67	
ARCH(3)	- 14949,19	
ARCH(4)	- 14973,02	
ARCH(5)	- 15011,19	
ARCH(6)	- 15017,74	
ARCH(7)	- 15028,21	
ARCH(8)	- 15073,52	
ARCH(9)	- 15034,24	
GARCH(1,1)	- 15114,75	
GARCH(1,2)	- 15116,56	
GARCH(2,1)	- 15112,47	
GARCH(2,2)	- 15110,25	
GARCH(1,1)-M	- 15114,28	
GARCH(1,2)-M	- 15112,35	
GARCH(2,1)-M	- 15111,93	
GARCH(2,2)-M	- 15109,56	
NGARCH(1,1)	- 15119,83	***
NGARCH(1,1)-M	- 15119,23	
GJR-GARCH(1,1)	- 15118,33	
GJR-GARCH(1,1)-M	- 15118,84	

Tabelle 8 Schwarz-Bayes-Informationskriterium. *** markiert die gemäß dem SBC beste Spezifikation. Fett markierte Spezifikationen weisen den geringsten SBC-Wert der jeweiligen Modellklasse auf.

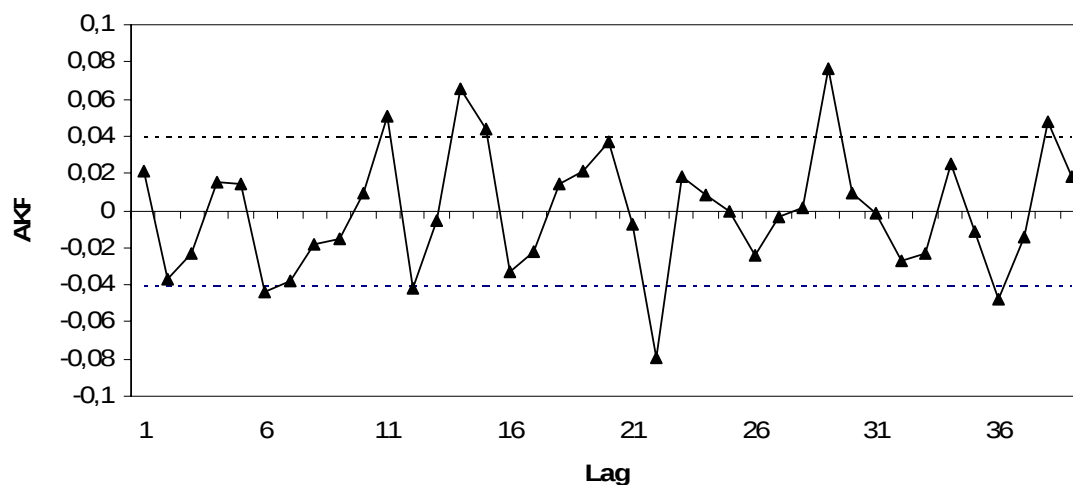


Abbildung 1 Geschätzte Autokorrelationsfunktion der Renditen - die gestrichelte Linie beschreibt das 95%-Konfidenzintervall für iid-normalverteilte Daten.

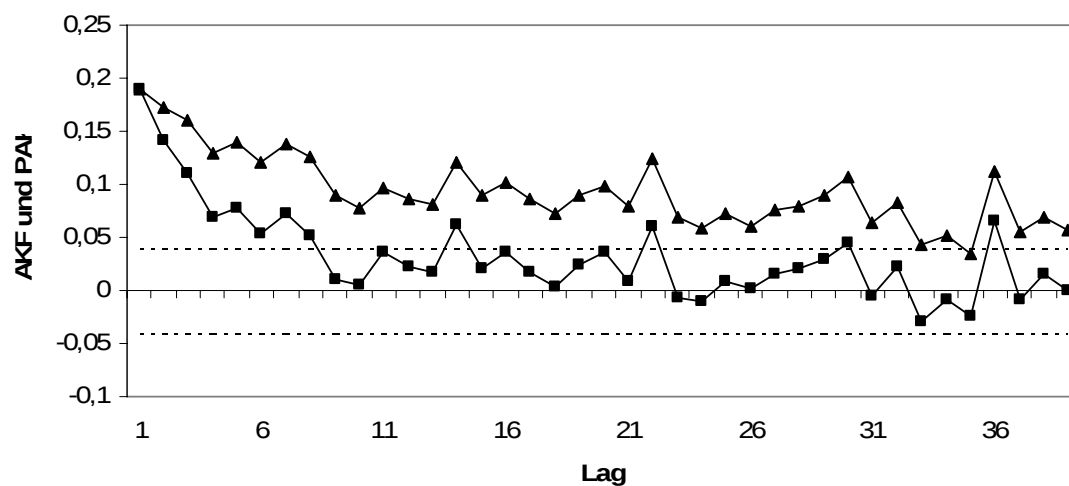


Abbildung 2 Geschätzte AKF (▲) und PAKF (■) der quadrierten Renditen - die gestrichelte Linie beschreibt das 95%-Konfidenzintervall für iid-normalverteilte Daten.

Literatur

- [1] **Andersen, T. G., Bollerslev T.** (1998) Answering the Critics: Yes, ARCH Models do Provide Good Volatility Forecasts, *International Economic Review* 39, S. 885-905.
- [2] **Auer, L. v.** (1999) *Ökonometrie – Eine Einführung*, Springer, Berlin.
- [3] **Bera, A. K., Higgins, M. L.** (1993) ARCH models: properties, estimation and testing, *Journal of Economic Surveys* 7, S. 305-366.
- [4] **Berndt, E. K., Hall, B. H., Hall, R. E., Hausmann, J.** (1974) Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models, *Annals of Economic and Social Measurement* 3, S. 653-665.
- [5] **Bollerslev, T.** (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, S. 307-327.
- [6] **Bollerslev, T.** (1987) A conditional heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return, *Review of Economics and Statistics* 69, S. 542-547.
- [7] **Bollerslev, T., Wooldridge, J. M.** (1992) Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in dynamic Models with time-varying Covariances, in: *Econometric Reviews* 11, S. 143-172.
- [8] **Bollerslev, T., Engle, R. F., Nelson, D.** (1994) ARCH Models, in: *Handbook of Econometrics*, (hrsg. v.) Engle, R., McFadden D., North Holland Press, Amsterdam, S. 2959-3038.
- [9] **Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C.** (1997) *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton.
- [10] **Deutsche Bundesbank** (1996) Finanzmarktvolatilität und ihre Auswirkungen auf die Geldpolitik, *Monatsbericht* 48, Heft 4, S. 53-70.
- [11] **Eckey, H. F., Kosfeld, R., Dreger, Ch.** (2001) *Ökonometrie. Grundlagen - Methoden - Beispiele*, 2. Aufl. Gabler Verlag, Wiesbaden.
- [12] **Enders, W.** (1995) *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons, New York.
- [13] **Engle, R. F.** (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates on the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica* 50, S. 987-1007.
- [14] **Engle, R. F.** (2002) New Frontiers for ARCH Models, *Journal of Applied Econometrics* 17, S. 425-446.
- [15] **Engle, R. F.** (2004) *ARCH – Selected Readings*, Oxford University Press, Oxford.
- [16] **Engle, R. F., Bollerslev, T.** (1986) Modeling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews* 5, S. 1-50 und S. 81-87.
- [17] **Engle, R. F., Lilien, D. M., Robins, R. P.** (1987) Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model, *Econometrica* 55, S. 391-407.
- [18] **Engle, R. F., Ng, V. K.** (1993) Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance* 48, S. 1749-1778.
- [19] **Franke, J., Härdle, W., Hafner, C.** (2001) *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*, Springer, Berlin.
- [20] **Franses, P. H., van Dijk, D.** (2000) *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press, Cambridge.

- [21] **Glosten, L. R., Jagannathan, R., Runkle, D. E.** (1993) On the relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance* 48, S. 1779-1801.
- [22] **Gouriéroux, C.** (1997) *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, Berlin.
- [23] **Hansen, P. R., Lunde, A.** (2001) A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?, <http://ssrn.com/paper=264571>, Stand: 22.03.2004.
- [24] **Härdle, W., Hafner, C.** (1997) Discrete Time Option Pricing with Flexible Volatility Estimation, <http://citeseer.ist.psu.edu/hardle97discrete.html>, Stand: Juni 1997.
- [25] **Hübler, O.** (1989) *Ökonometrie*, Fischer, Stuttgart.
- [26] **Krämer, W.** (2000) Statistische Besonderheiten von Finanzmarktdaten, <http://www.sfb475.uni-dortmund.de/berichte/tr58-00.ps>.
- [27] **Krämer, W., Runde, R.** (1994) Some pitfalls in using empirical autocorrelations to test for zero correlation among common stock returns, in Kaehler/Kugler (Hrsg.): *Econometric Analysis of financial markets*, Heidelberg, Physig, S. 1-10.
- [28] **Lamoureux, C. G., Lastrapes, W. D.** (1990) Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH-Model, *Journal of Business and Economic Statistics* 8, S. 225-234.
- [29] **Mandelbrot, B.** (1963) The valuation of certain speculative prices, *Journal of Business* 36, S. 394-419.
- [30] **McLeod, A. I., Li, W. K.** (1983) Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations, *Journal of Time Series Analysis* 4, S. 269-73.
- [31] **Nelson, D. B., Cao, C. Q.** (1992) Inequality constraints in the univariate GARCH model, *Journal of Business and Economic Statistics* 10, S. 229-35.
- [32] **Schmitt, Chr.** (2002) Stochastische Volatilität, in: Schröder, M. (Hrsg.) *Finanzmarkt-Ökonometrie: Basistechniken, Fortgeschrittenen Verfahren, Prognosemodelle*, Schäffer-Poeschel, Stuttgart.
- [33] **Schoffer, O.** (2000) Ist die Hebelwirkung der Grund für Asymmetrie in ARCH- und GARCH-Modellen?, <http://www.sfb475.uni-dortmund.de/berichte/tr51-00.ps>, Stand: September 2000.
- [34] **Stock, J. H.** (1988) Estimating continuous-time processes subject to time deformation, *Journal of the American Statistical Association* 83, S. 77-85.

Autor: Dipl.-Kfm. Frank Jacobi, Projektbearbeiter

Bisher erschienene Arbeitspapiere:

1. Peter M. Schulze, Prognoseverfahren wissenschaftlicher Institute in der Bundesrepublik Deutschland. Überblick über eine Umfrage (Dezember 1993)
2. Martina Nold / Peter M. Schulze, Möglichkeiten und Grenzen der Quantifizierung der Schattenwirtschaft (April 1994)
3. Armin Seher, Einfluß der Integrationsordnung bei Zeitreihen auf die Spezifikation von Fehlerkorrekturmodellen (Juni 1994)
4. Lars Berg / Armin Gemünden / Frank Hubert / Ralf Leonhardt / Michael Leroudier, Die Situation der Studentenschaft in den Wirtschaftswissenschaften an der Universität Mainz im Frühjahr 1994. Ergebnisse einer Umfrage (August 1994)
5. Christoph Balz, Ein Fehlerkorrekturmodell zur Entwicklung des Kapitalmarktzins in der Bundesrepublik Deutschland (Oktober 1994)
6. Reinhard Elkmann / Nora Lauterbach / Stephan Wind, Tertiärisierung regionaler Wirtschaftsstrukturen. Eine empirische Analyse kreisfreier Städte und Landkreise in Hessen, Rheinland-Pfalz und dem Saarland (Dezember 1994)
7. Peter M. Schulze / Uwe Spieker, Deutsche Aktienindizes. Statistische Konzepte und Beispiele (Dezember 1994)
8. Armin Seher / Peter M. Schulze, Fehlerkorrekturmodelle und die Bewertung von Aktienkursindizes. Empirische Analyse zur Eignung des Konzepts (Januar 1995)
9. Reinhard Elkmann / Annette Klostermann / Kerstin Lieder, Zur intertemporalen Konstanz der Struktur regionaler Lohn- und Gehaltsniveaus in der Bundesrepublik Deutschland (Mai 1995)
10. Christoph Fischer, Ein Fehlerkorrekturmodell zur Kaufkraftparitätentheorie (März 1996)
11. Ralf Becker / Claudia Müller, Zur Schätzung regionaler Konsumfunktionen (Oktober 1996)
12. Frank Hubert, Klassifizierung der Arbeitsmärkte in den OECD-Ländern mittels Cluster- und Diskriminanzanalyse (April 1997)
13. Frank Hubert, Das Okun'sche Gesetz: Eine empirische Überprüfung für ausgewählte OECD-Länder unter besonderer Berücksichtigung der nationalen Arbeitsmarktordnungen (September 1997)
14. Christoph Balz/ Peter M. Schulze, Die Rolle nationaler, regionaler und sektoraler Faktoren für die Variation von Output, Beschäftigung und Produktivität in der Bundesrepublik Deutschland (Dezember 1997)
15. Peter M. Schulze, Steigende Skalenerträge und regionales Wachstum: Eine quantitative Analyse mit kleinräumigen Daten (März 1998)

16. Ralf Becker, Die Verallgemeinerte Momentenmethode (Generalized Method of Moments - GMM). Darstellung und Anwendung (Juni 1998)
17. Peter M. Schulze, Regionales Wachstum: Sind die Dienstleistungen der Motor? (August 1998)
18. Ke Ma, Absatzanalyse für den chinesischen Pkw-Markt (Oktober 1998)
19. Christoph Balz / Peter M. Schulze, Die sektorale Dimension der Konvergenz. Eine empirische Untersuchung für die Bundesrepublik Deutschland (Januar 1999)
- 20.* Robert Skarupke, Quantifizierung des Heimvorteils im deutschen Profifußball: Eine empirische Untersuchung für die 1. Fußball-Bundesliga (August 2000)
- 21.* Peter M. Schulze, Regionalwirtschaftlicher Datenkatalog für die Bundesrepublik Deutschland (September 2000)
- 22.* Yvonne Lange, Ein logistisches Regressionsmodell zur Analyse der Verkehrsmittelwahl im Raum Mainz (Oktober 2000)
- 23.* Verena Dexheimer, Zähldatenmodelle (Count Data Models). Ansätze und Anwendungen (Mai 2002)
- 24.* Andreas Handel, Die Entwicklung des Geldvermögens der privaten Haushalte in Deutschland (September 2003)
- 25.* Christina Bastian / Yvonne Lange / Peter M. Schulze, Hedonische Preisindizes - Überblick und Anwendung auf Personalcomputer (Mai 2004)
- 26.* Alexander Prinz / Peter M. Schulze, Zur Entwicklung von Containerschiffsflotten - Eine Paneldatenanalyse (Mai 2004)
- 27.* Martin Flohr, Analyse der ökonomischen und demografischen Determinanten von Sportaktivitäten in Deutschland (Juni 2004)
- 28.* Peter M. Schulze, Granger-Kausalitätsprüfung. Eine anwendungsorientierte Darstellung (Juli 2004)
- 29.* Kristina Ripp / Peter M. Schulze, Konsum und Vermögen - Eine quantitative Analyse für Deutschland (August 2004)
- 30.* Andreas Schweinberger, Ein VAR-Modell für den Zusammenhang zwischen Öffentlichen Ausgaben und Wirtschaftswachstum in Deutschland (November 2004)
- 31.* Frank Jacobi, ARCH-Prozesse und ihre Erweiterungen - Eine empirische Untersuchung für Finanzmarktzeitreihen (April 2005)

* Im Internet unter <http://www.statock.vwl.uni-mainz.de/> verfügbar.