

Osiecka, Katarzyna

**Working Paper**

## The impact of economic factors on the change in the structure of Polish households expenditure - use of Markov chains

Institute of Economic Research Working Papers, No. 86/2017

**Provided in Cooperation with:**

Institute of Economic Research (IER), Toruń (Poland)

*Suggested Citation:* Osiecka, Katarzyna (2017) : The impact of economic factors on the change in the structure of Polish households expenditure - use of Markov chains, Institute of Economic Research Working Papers, No. 86/2017, Institute of Economic Research (IER), Toruń

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/219909>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



<https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>



Institute of Economic Research Working Papers

No. 86/2017

**The impact of economic factors on the change in the structure of Polish households expenditure – use of Markov chains**

**Katarzyna Osiecka**

**Article prepared and submitted for:**

**9<sup>th</sup> International Conference on Applied Economics Contemporary Issues in Economy, Institute of Economic Research, Polish Economic Society Branch in Toruń, Faculty of Economic Sciences and Management, Nicolaus Copernicus University, Toruń, Poland, 22-23 June 2017**

**Toruń, Poland 2017**

© Copyright: Creative Commons Attribution 3.0 License

## **Katarzyna Osiecka**

Warsaw University of Technology, College of Economics and Social Sciences

17 Lukaszewicza, 09-400 Plock, Poland

E-mail: katarzyna\_osiecka@interia.pl

### **Wpływ czynników ekonomicznych na zmiany struktury wydatków polskich gospodarstw domowych – zastosowanie łańcuchów Markowa**

#### **The impact of economic factors on the change in the structure of Polish households expenditure – use of Markov chains**

**JEL Classification:** *D14*

**Keywords:** *consumption, structure of expenditure, households expenditure, Markov's chains*

#### **Abstract**

**Research background:** Polish economy for several years which is a subject to continuous transformation, has a close relationship with three overlapping during the process: the transformation of the economy, Polish integration with the European Union and globalization. All these processes are mutually penetrate and carry consequences for the development of the most important economic indicators.

**Purpose of the article:** The changing of social and economic conditions which households face always influence their important choices on both the expenditure and raise money, behavior in the surrounding reality, shaping their needs and expectations with respect to the purchased products and services. By the fact that consumption behavior are subject to constant changes and fluctuations, they must be under continuous observation and confrontation with determinants that determine these changes. The most important factor in these changes is the income available to households, as well as the rate of price increases, or the savings rate.

**Methodology/methods:** The assumption that the structure of household expenditure is subject to change according to the mechanism described by Markov chain is difficult to interpret in this point of view. However, the lack of a clear interpretation of the process does not interfere with the usage of Markov chains to study the structure of changes.

**Findings:** The impact of these characteristics of the economic and financial changes in the structure of household expenditure is reduced to the study of

heterogeneous chains, in which the elements of the matrix of transition probabilities are defined by the functions of these characteristics and treated as variables.

## **Wprowadzenie**

Konsumpcja to najbardziej powszechna czynność człowieka, której celem jest zaspokajanie potrzeb ludzkich. W całym okresie istnienia ludzkości zmieniały się i wzbogacały rodzaje konsumowanych dóbr. Modyfikacji ulegały także sposoby i formy ich zdobywania. Wraz z rozwojem społecznym konsumpcja została uzależniona od produkcji i wymiany, a jednocześnie sama wywarła wpływ na kształtowanie ich wielkości i struktury.

Celem podjętej pracy jest określenie siły oddziaływania wybranych czynników na zmiany struktury wydatków gospodarstw domowych z wykorzystaniem najnowszych metod badawczych w tej dziedzinie. Analizie poddano takie czynniki jak przynależność do klasy społeczno-ekonomicznej, ale także inne takie jak dochód rozporządzalny gospodarstw domowych według grup społeczno-ekonomicznych, wskaźnik wzrostu cen dla poszczególnych grup towarów i usług konsumpcyjnych.. Czynniki te, które określają indywidualną konsumpcję, wpływają z różną siłą i w różny sposób zarówno na poziom jak i na strukturę konsumpcji. Niektóre z nich należą do kategorii, które w stosunkowo łatwy sposób można zmierzyć i wyrazić w liczbach. Ta cecha pozwala na bezpośrednią analizę ich oddziaływania na konsumpcję i większość z nich mierzonych jest poprzez systematyczne badania statystyczne. Uzyskane tą drogą wyniki stanowią przedmiot różnorodnych analiz, które pozwalają ocenić zmiany w poziomie i strukturze konsumpcji.

## **Metodologia**

Teoria procesów stochastycznych jest najlepiej rozwiniętą dziedziną na gruncie dyscyplin opartych na teorii prawdopodobieństwa (zob.: Rosenblatt 1967; Wentzell 1980; Kowalenko, Kuzniecowa, Szurienkova 1989; Zieliński 2002), a specyficzną ich grupę stanowią łańcuchy Markowa (zob.: Jakubowski, Stencel 2001; Koźniewska, Włodarczyk 1978). Łańcuchy Markowa są procesami z czasem dyskretnym, w których występuje stosunkowo prosta forma zależności między zmiennymi losowymi tworzącymi ciąg  $\{X_n\}$ , bowiem rozkład prawdopodobieństwa  $n$  - tej

zmiennej zależy jest od realizacji zmiennej  $X_{n-1}$ , a nie zależy od zmiennych  $X_{n-2}, X_{n-3}, \dots, X_0$ .

Skończony łańcuch Markowa o przestrzeni stanów  $S = \{1, 2, \dots, r\}$  należy definiować jako proces stochastyczny  $\{X_n, n \in N\}$  taki, że dla każdego  $i_0, i_1, \dots, i_{n-2}$ ,  $i, j \in S$  oraz  $n \in N$  zachodzi równość  $P(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i) = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$ , nazywana w literaturze własnością Markowa (Prognozowanie... 1980). Zatem rozkład prawdopodobieństw stanu procesu w chwili  $n$  zależy jedynie od stanu procesu w chwili  $n-1$ , a nie zależy od wcześniejszego przebiegu procesu.

Z powyższym warunkiem łączy się pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego  $P(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}(n)$ , które nazywamy prawdopodobieństwem przejścia łańcucha ze stanu  $i$  w chwili  $n-1$  do stanu  $j$  w chwili  $n$ . Na tej podstawie można zdefiniować skończony jednorodny łańcuch Markowa jako skończony łańcuch Markowa o przestrzeni stanów  $S = \{1, 2, \dots, r\}$  taki, że dla każdego  $n, \alpha \in N$  prawdziwa jest równość  $P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_{n+\alpha} = j | X_{n+\alpha-1} = i) = p_{ij}$ , gdzie  $p_{ij}$  oznacza prawdopodobieństwo przejścia łańcucha ze stanu  $i$  do  $j$  w jednym kroku (w jednostce czasu, w ustalonym okresie jednostkowym). Dla łańcucha jednorodnego prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami w jednym kroku są zatem stałe w czasie i niezależne od czasu trwania procesu (Podgórska, Śliwka, Tobolewski, Wrzosek 2002).

Dla skończonego jednorodnego łańcucha Markowa o przestrzeni stanów  $S = \{1, 2, \dots, r\}$  można skonstruować macierz prawdopodobieństw przejścia postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix},$$

której składowe  $p_{ij}$  to prawdopodobieństwa przejścia łańcucha ze stanu  $i$  do  $j$  w jednym kroku, spełniające warunki  $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ , dla  $i \in S$ ,  $p_{ij} \geq 0$ , dla  $i, j \in S$ .

Następnie stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite (Kozłowska, Włodarczyk 1978) dla wszystkich  $j \in S$  i korzystając z zapisu macierzowego otrzymuje się zależność bezwarunkowych rozkładów zmiennych  $X_n$  oraz  $X_{n-1}$ , w postaci  $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1}\mathbf{P}$ , skąd  $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_0\mathbf{P}^n$ , gdzie  $\mathbf{d}_n = [d_{n1} \ d_{n2} \ \dots \ d_{nr}]$ ,  $d_{nj} = P(X_n = j)$ , dla  $j \in S$ ,  $n \in N$ , przy czym  $d_{nj} \geq 0$ ,  $\sum_{j \in S} d_{nj} = 1$ ,  $j \in S$ ,  $n \in N$ .

Występująca w powyższym wzorze  $n$ -ta potęga macierzy  $\mathbf{P}$ , jest macierzą prawdopodobieństw przejścia łańcucha w  $n$  krokach, zaś elementy tworzące  $i$ -ty wiersz tej macierzy stanowią warunkowy rozkład prawdopodobieństwa trafienia łańcucha do dowolnego stanu  $j \in S$  w chwili  $n$ , jeśli  $n$  okresów wcześniej łańcuch był w stanie  $i$ .

Znajomość macierzy prawdopodobieństw przejścia  $\mathbf{P}$  oraz rozkładu początkowego  $\mathbf{d}_0$  pozwala na wyznaczenie bezwarunkowych rozkładów prawdopodobieństwa  $\mathbf{d}_n$  łańcucha w dowolnej chwili  $n \in N$ , a co za tym idzie wystarcza do pełnej charakterystyki tego procesu.

W analizach empirycznych głównie wykorzystywana jest koncepcja łańcuchów jednorodnych, którą można przyjąć tylko w krótkim okresie, a propozycja zmieniającej się macierzy przejścia nie jest zawsze możliwa do zastosowania. Łańcuch niejednorodny jest rzadziej stosowany ze względu na trudności związane z estymacją zmiennych w czasie macierzy prawdopodobieństw przejścia, ale mimo to w wielu przypadkach lepiej opisuje rzeczywisty przebieg zjawiska.

Niejednorodny łańcuch Markowa definiowany jest jako łańcuch Markowa  $\{X_n, n \in N\}$  o przestrzeni stanów  $S = \{1, 2, \dots, r\}$ , w którym prawdopodobieństwa warunkowe  $p_{ij}(n)$  przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w jednostce czasu zależą od czasu w jawnej postaci  $p_{ij}(n) = f_{ij}(n)$ , bądź od procesów, które są funkcjami czasu  $p_{ij}(n) = f_{ij}(\bar{\mathbf{z}}(n))$ , gdzie  $\bar{\mathbf{z}}(n)$  jest wektorem procesów objaśniających zmiany prawdopodobieństw przejść (Stawicki 2004). Zatem jest to proces o zadanym rozkładzie początkowym  $\mathbf{d}_0$  i zmiennych macierzach przejścia  $\mathbf{P}(n)$ , gdzie podstawową zależnością jest związek między rozkładami bezwarunkowymi wyrażony wzorami  $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1}\mathbf{P}$  i  $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_0 \prod_{t=1}^n P(t)$ .

Ponadto podstawową zależność niejednorodnego łańcucha Markowa można zapisać w postaci:  $d_j(n) = \sum_{i=1}^r d_i(n-1)p_{ij}(n)$ , dla  $n \in N$ ,  $i, j \in S$ , gdzie  $d_j(n)$  jest prawdopodobieństwem bezwarunkowym znalezienia się procesu w stanie  $j$  w momencie  $n$ , a prawdopodobieństwa  $p_{ij}(n)$  nazywać będziemy parametrami niejednorodnego łańcucha Markowa. Parametry te można estymować przy pomocy metody zaproponowanej przez Mac Rae (za: Stawicki 2004), która zakłada nieliniową zależność między szacowanymi parametrami  $p_{ij}(n)$ , a opisującymi je czynnikami  $z_h(n)$  dla  $h = 0, 1, 2, \dots, M$ , przy czym czynniki te są powiązane między sobą liniową zależnością postaci:  $f_{ij}(\bar{z}(n)) = \sum_{k=0}^M a_{ij}^k \cdot z_k(n)$ .

Powyższe zależności między prawdopodobieństwami przejścia  $p_{ij}(n)$  a wpływającymi na nie czynnikami określone są funkcjami logistycznymi w postaci:

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} \frac{e^{f_{ij}(\bar{z}(n))}}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{ik}(\bar{z}(n))}} & \text{dla } j = 1, 2, \dots, r-1 \\ \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{ik}(\bar{z}(n))}} & \text{dla } j = r \end{cases},$$

A na ich podstawie można zbudować macierz przejścia niejednorodnego łańcucha Markowa (Stawicki 2004):

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} \frac{e^{f_{11}(\bar{z}(n))}}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{1k}(\bar{z}(n))}} & \frac{e^{f_{12}(\bar{z}(n))}}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{1k}(\bar{z}(n))}} & \dots & \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{1k}(\bar{z}(n))}} \\ \frac{e^{f_{21}(\bar{z}(n))}}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{2k}(\bar{z}(n))}} & \frac{e^{f_{22}(\bar{z}(n))}}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{2k}(\bar{z}(n))}} & \dots & \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{2k}(\bar{z}(n))}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{e^{f_{r1}(\bar{z}(n))}}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{rk}(\bar{z}(n))}} & \frac{e^{f_{r2}(\bar{z}(n))}}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{rk}(\bar{z}(n))}} & \dots & \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{r-1} e^{f_{rk}(\bar{z}(n))}} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie}$$

$k \in S, \quad n \in N.$

Estymacja parametrów strukturalnych niejednorodnego łańcucha Markowa zostanie sprowadzona do oszacowania parametrów  $a_{ij}^h$  funkcji

$$f_{ij}(\bar{\mathbf{z}}(n)) = \sum_{k=0}^M a_{ij}^k \cdot z_h(n), \quad \text{wykorzystując przy tym zależność:}$$

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^r y_i(n-1) p_{ij}(n) \quad \text{dla } j \in S, \quad n \in N, \quad \text{co wynika z tak}$$

skonstruowanej macierzy przejścia. Zatem aby uzyskać oceny parametrów  $a_{ij}^h$  należy rozwiązać zadanie programowania wypukłego (zob.: Górka, Osińska, Stawicki 2002) w postaci funkcji kryterium:

$$\sum_{n=1}^N (\bar{\mathbf{y}}(n) - \bar{\mathbf{y}}(n-1) \cdot \mathbf{P}(n))^T (\bar{\mathbf{y}}(n) - \bar{\mathbf{y}}(n-1) \cdot \mathbf{P}(n)) \Rightarrow \min.$$

W praktyce model niejednorodnego łańcucha Markowa z zadaną postacią macierzy  $\mathbf{P}(n)$  i funkcją kryterium jest dość prosty do oszacowania, ponieważ nie trzeba uwzględniać warunków pobocznych (ograniczających), jak to się dzieje w przypadku modeli jednorodnego łańcucha Markowa. Wystarczy zastosować jeden z algorytmów iteracyjnych poszukiwania minimum (np. algorytm Naldera-Meada). Natomiast model opisany macierzą  $\mathbf{P}(n)$  może być oceniony jedynie przez sumę kwadratów odchyłeń wartości teoretycznych od wartości empirycznych. Wynika to stąd, że nie znamy macierzy wariancji i kowariancji estymatorów parametrów  $a_{ij}^h$  modelu  $f_{ij}(\bar{\mathbf{z}}(n)) = \sum_{k=0}^M a_{ij}^k \cdot z_h(n)$ ,

co nie pozwala na ocenę dokładności oszacowania zarówno parametrów  $a_{ij}^h$ , jak i parametrów niejednorodnego łańcucha Markowa  $p_{ij}(n)$ .

D.J.Hartfiel (1999) opracował teorię, która bazuje na założeniu, że macierz przejścia w każdym kroku pochodzi ze zbioru macierzy określonego poprzez przedziały, w jakich mogą zmieniać się poszczególne jej elementy (Markov Set-Chains - przedziałowe łańcuchy Markowa).

Markov Set-Chain jest to ciąg zbiorów macierzy stochastycznych  $M, M^2, M^3, \dots$  gdzie  $M^k = \{ \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k, \text{ gdzie } \forall_i \mathbf{A}_i \in M \}$  jest zbiorem macierzy stochastycznych stopnia  $n$  (zob.: Stawicki 2004, Decewicz, Gyczew 2001). Symbolicznie możemy to zapisać następująco  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{M}$ , gdzie  $\mathbf{S}_1$  oznacza zbiór wektorów stochastycznych otrzymanych z dowolnego wektora stochastycznego ze zbioru początkowego  $\mathbf{S}_0$  pomnożonego przez dowolną macierz stochastyczną ze zbioru  $\mathbf{M}$ . Każdy ze zbiorów postaci  $M^k$  należy rozumieć jako zbiór



wszystkich możliwych macierzy zawierających prawdopodobieństwa przejścia ze stanu do stanu w  $k$  krokach, jeżeli w każdym kroku przejścia te dokonują się zgodnie z regułami wyznaczonymi przez dowolną macierz ze zbioru  $M$ . Zbiór  $S_k$  zawiera wszystkie możliwe rozkłady bezwarunkowe badanego łańcucha po  $k$  okresach jego ewolucji, jeżeli w każdym kroku macierz przejścia należy do zbioru  $M$ .

Proponowane są trzy metody wyznaczania zbioru  $S_k$ : metoda wyznaczania wierzchołków, metoda Hi-Lo (Hartfiel 1999) oraz symulacyjna metoda Monte Carlo (Samuels 2001).

## **Struktura wydatków polskich gospodarstw domowych**

Jednym z mierników oceny funkcjonowania rynku jest poziom i struktura wydatków konsumpcyjnych gospodarstw domowych. Wydatki są istotnym czynnikiem wskazującym zarówno na stopień i jakość zaspokojenia potrzeb, jak i na różnice w skali i poziomie rozdysponowania dochodów. To w gospodarstwach domowych, czyli najpowszechniejszych i zarazem jednych z najważniejszych podmiotów gospodarujących, sprawdza się efektywność polityki społeczno-gospodarczej kraju. Ukierunkowanie wydatków na zakup określonych grup towarów pozwala uchwycić podobieństwa i różnice w poziomie życia poszczególnych grup społeczno-ekonomicznych gospodarstw domowych oraz ocenić warunki bytowe całego społeczeństwa (Zwierzyc 2005).

Na podstawie wieloletnich obserwacji ocenia się, że w badaniach budżetów domowych informacje o wydatkach są bardziej zbliżone do rzeczywistych (mniejszy stopień zaniżeń). Istnieje również przekonanie, że wydatki są bardziej stabilne i wiążą się ściśle z poziomem dochodów permanentnych, przewidywanych przez gospodarstwo domowe w perspektywie czasu (Słaby 2005).

Wyniki badań budżetów gospodarstw domowych (materiał badawczy stanowią dane GUS z badań budżetów gospodarstw domowych w Polsce za lata 1993-2015) wskazują na dwa główne kierunki przemian w wyborach konsumpcyjnych rodzin. Pierwszym z nich jest systematyczne obniżanie się udziału wydatków żywnościowych w ogólnych wydatkach rodzin. Może to wskazywać na poprawę poziomu życia społeczeństwa, bo tendencje takie występują w krajach wysoko rozwiniętych, chociaż bardziej prawdopodobne wydaje się, że jest w znacznej mierze konsekwencją konieczności przeznaczania coraz większych sum na inne niezbędne cele, np. mieszkanie i jego utrzymanie, przy ograniczonych dochodach

gospodarstw domowych. Drugim kierunkiem jest istotny wzrost udziału wydatków na towary nieżywnościowe i usługi.

Informacje o strukturze wydatków gospodarstw domowych rozumianej jako procent wydatków na określoną grupę dóbr jest ważne z punktu widzenia polityki gospodarczej i polityki społecznej. Szczególnie ważna jest znajomość kierunku zmian tej struktury w określonych grupach społecznych czy typach gospodarstw domowych. Prognozy struktury wydatków i poziomu tychże wydatków pozwalają na ocenę przyszłej konsumpcji i poziomu zaspokojenia potrzeb gospodarstw domowych. Jeszcze ważniejsze jest poznanie czynników, które wpływają na zmiany tej struktury. Przydatnym narzędziem takiej analizy jest model łańcucha Markowa.

W omawianym zagadnieniu analizy struktury wydatków gospodarstw domowych wyodrębniono cztery grupy wydatków: wydatki na żywność, wydatki na artykuły nieżywnościowe (w tym: odzież i obuwie, mieszkanie), wydatki na usługi (w tym: transport i łączność, rekreacja i kultura, edukacja, zdrowie) i pozostałe wydatki. Posłużono się obserwacjami dotyczącymi gospodarstw domowych z podziałem na gospodarstwa pracownicze, gospodarstwa rolników, gospodarstwa emerytów i rencistów, gospodarstwa pracujących na własny rachunek. Obserwowane struktury dotyczą wskazanych grup ogółem oraz z podziałem na wielkość gospodarstw domowych. Podział ten uwzględnia gospodarstwa jednoosobowe aż do gospodarstw sześciuosobowych i większych.

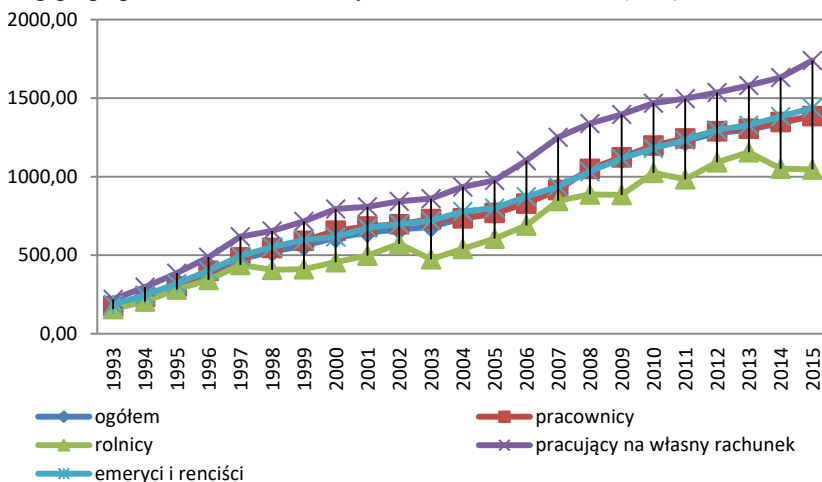
## **Czynniki wpływające na zmianę struktury wydatków**

Gospodarstwa domowe, podejmując decyzję, które potrzeby mają być zaspokojone, dzielą swój budżet w zależności od możliwości finansowych. Na decyzje te wpływ ma także wiele czynników związanych z samym gospodarstwem domowym, a także czynniki zewnętrzne takie jak ogólna sytuacja ekonomiczna gospodarcza państwa, na które składają się poziom i tempo rozwoju gospodarki narodowej mierzone wielkością produktu krajowego brutto i dochodami rozporządzalnymi gospodarstw domowych, a także ceny towarów i usług, poziom inflacji, dostęp do kredytów i pożyczek (Sobczyk 2014).

Dochody istotnie determinują konsumpcję, a ich wysokość oraz źródła pochodzenia są wynikiem zachowań przystosowawczych gospodarstw domowych do warunków panujących na rynku. Zmiany w dochodach (wykres 1) powodują konieczność dostosowania budżetów domowych do nowych warunków społeczno-gospodarczych, co przejawia się w zmianie

struktury wydatków. Każde gospodarstwo domowe dąży bowiem do tego, aby przy danych dochodach, w sposób najlepszy i najpełniejszy zaspokoić indywidualne potrzeby członków gospodarstwa oraz gospodarstwa domowego jako całości.

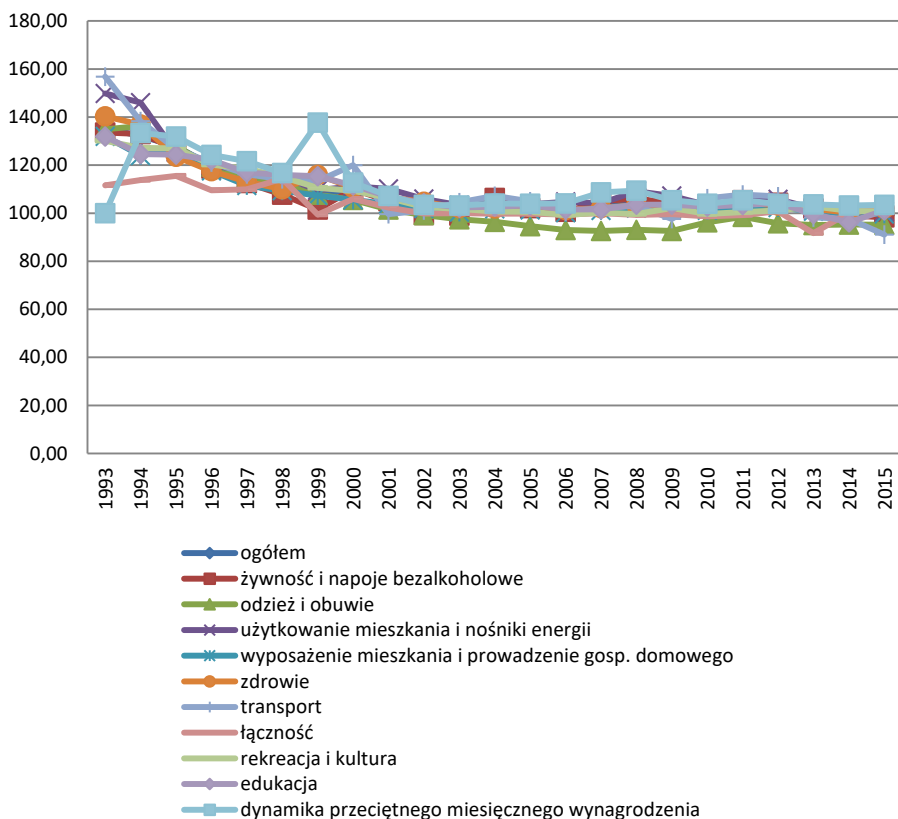
**Wykres 1.** Dynamika dochodów rozporządzalnych gospodarstw domowych według grup społeczno-ekonomicznych w latach 1993-2015 (w zł)



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych GUS

Zróźnicowanie dochodów w latach 1993-2015, jakie uzyskują gospodarstwa domowe według przynależności do grupy społeczno-ekonomicznej nie odzwierciedla faktycznego zróźnicowania ich możliwości nabywczych, nie uwzględnia bowiem zróźnicowania cen. Wskaźniki wzrostu cen dla poszczególnych grup towarów i usług konsumpcyjnych obliczane są corocznie przez GUS (wykres 2). Ponadto w latach 1993-2015 wynagrodzenia rosły szybciej od wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych (inflacji).

**Wykres 2.** Wskaźniki wzrostu cen towarów i usług konsumpcyjnych oraz wskaźnik dynamiki przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia w latach 1993-2015 (w %)



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Przyjęcie założenia, że struktura wydatków gospodarstw domowych podlega zmianom według mechanizmu opisanego łańcuchem Markowa, jest trudne z punktu widzenia interpretacji. Jednak brak jasnej interpretacji procesu nie przeszkadza w wykorzystaniu tego narzędzia, jakim są łańcuchy Markowa do badania zmian struktury. W łańcuchu Markowa opisującym strukturę wydatków typowego gospodarstwa domowego, jako stany należy przyjąć udział wydatków na określoną grupę dóbr w całości wydatków gospodarstwa domowego. Za jednostkę zmieniającą stan należałoby uznać jednostkę pieniężną, która bez kosztów jest przesuwana z jednej grupy towarowej na inną.

Do badania wybrano następujące charakterystyki ekonomiczno-finansowe, które mogą być podstawą decyzji gospodarstw domowych dotyczących zakupu poszczególnych dóbr lub usług:

- przeciętne miesięczne wynagrodzenie,

- dochód rozporządzalny gospodarstw domowych ogółem,
- dochód rozporządzalny gospodarstw domowych pracowników,
- dochód rozporządzalny gospodarstw domowych rolników,
- dochód rozporządzalny gospodarstw domowych pracujących na własny rachunek,
- dochód rozporządzalny gospodarstw domowych emerytów i rencistów,
- wskaźnik wzrostu cen ogółem,

Wpływ tych charakterystyk ekonomiczno-finansowych na zmiany struktury wydatków gospodarstw domowych sprowadza się do badania łańcuchów niejednorodnych, w których elementy macierzy prawdopodobieństw przejść określone są przez funkcje tychże charakterystyk traktowanych jako zmienne. Ponadto przyjęto, że macierz niejednorodnego łańcucha Markowa przyjmie postać:

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{f_{11}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{1k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{12}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{1k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{13}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{1k}(\bar{z})}} & \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{1k}(\bar{z})}} \\ \frac{e^{f_{21}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{2k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{22}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{2k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{23}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{2k}(\bar{z})}} & \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{2k}(\bar{z})}} \\ \frac{e^{f_{31}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{3k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{32}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{3k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{33}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{3k}(\bar{z})}} & \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{3k}(\bar{z})}} \\ \frac{e^{f_{41}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{4k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{42}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{4k}(\bar{z})}} & \frac{e^{f_{43}(\bar{z}(t))}}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{4k}(\bar{z})}} & \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^3 e^{f_{4k}(\bar{z})}} \end{pmatrix},$$

gdzie  $f_{jk}(\bar{z}(t)) = a_0 + a_1 z(t)$ , a za  $z(t)$  brane były odpowiednio dla poszczególnych gospodarstw domowych czynniki ekonomiczno-finansowe (wymienione wyżej) z badanego okresu. Parametry funkcji  $f_{jk}(\bar{z}(t))$  otrzymano minimalizując metodą iteracyjną sumę kwadratów reszt modelu Markowa.

Przeanalizowane zostały struktury wydatków gospodarstw domowych ogółem, gospodarstw domowych pracowników, gospodarstw domowych pracujących na własny rachunek, gospodarstw domowych rolników i gospodarstw domowych emerytów i rencistów (tabela 1). W tabeli umieszczono jako wskaźnik stopnia dopasowania sumę kwadratów reszt dla poszczególnych modeli. Ponadto zaprezentowano minimalne i maksymalne wartości odchyień co do wartości bezwzględnej oraz

wskaźnik różnicowania macierzy jako suma bezwzględnych różnic ze składowych macierzy pierwszej i ostatniej.

**Tabela 1.** Główne charakterystyki dla modeli niejednorodnych łańcuchów Markowa

specyfikacja modelu	czynnik	stopień dopasowania	min różnice	max różnice	rok	max różnice (2)	rok	zróżnicowanie macierzy
pracownicy	przeciętne miesięczne wynagrodzenie	0,012179	0,000016	0,048603	2010	0,045886	2005	6,246214
	dochód rozporządzalny ogółem	0,014307	0,000057	0,051281	2010	0,047848	2005	5,294065
	dochód rozporządzalny pracowników	0,012492	0,000284	0,047639	2010	0,042716	2005	4,080946
	wskaźnik wzrostu cen ogółem	0,017663	0,000058	0,056420	2005	0,051127	2010	3,434144
pracujący na własny rachunek	przeciętne miesięczne wynagrodzenie	0,013210	0,000151	0,048790	2005	0,048781	2010	6,462249
	dochód rozporządzalny ogółem	0,013629	0,000067	0,051420	2005	0,048153	2010	6,748234
	dochód rozporządzalny pracujących na własny rachunek	0,013581	0,000070	0,051022	2010	0,049685	2005	6,676272
	wskaźnik wzrostu cen ogółem	0,022356	0,000044	0,060972	2005	0,052089	2010	3,155317
rolnicy	przeciętne miesięczne wynagrodzenie	0,012979	0,000036	0,056139	2005	0,044882	2010	5,186806
	dochód rozporządzalny ogółem	0,013658	0,000449	0,056224	2005	0,042555	2010	5,419002
	dochód rozporządzalny rolników	0,016536	0,000154	0,051325	2010	0,043643	2005	7,364336
	wskaźnik wzrostu cen ogółem	0,024217	0,000135	0,066999	2005	0,056536	2010	2,793254
emeryci i renciści	przeciętne miesięczne wynagrodzenie	0,017768	0,000128	0,061305	2010	0,055949	2005	6,425385
	dochód rozporządzalny ogółem	0,019823	0,000139	0,060837	2010	0,058814	2005	4,289608
	dochód rozporządzalny emerytów i rencistów	0,018813	0,000132	0,059449	2005	0,059339	2005	4,308296
	wskaźnik wzrostu cen ogółem	0,018827	0,000020	0,066893	2005	0,064345	2010	3,410180

ogółem	przeciętne miesięczne wynagrodzenie	0,008800	0,000082	0,053254	2005	0,030857	2005	6,200477
	dochód rozporządzalny ogółem	0,009004	0,000274	0,056803	2005	0,028294	2005	4,919964
	wskaźnik wzrostu cen ogółem	0,013535	0,000400	0,067859	2005	0,035435	2005	2,555276

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych GUS

Na podstawie uzyskanym charakterystyk dla poszczególnych modeli można zauważyć, że wyróżniającym się okresem na tle pozostałych był rok 2005 oraz rok 2010 ze względu na największe zróżnicowanie. Ponadto rok 2005 charakteryzuje się niewielką dynamiką dochodu rozporządzalnego ogółem (103,54%) oraz największymi zmianami w strukturze wydatków w gospodarstwach domowych - wzrost udziału wydatków na artykuły żywnościowe (przy tendencji malejącej tego wskaźnika) przy dalszym wzroście udziału wydatków na artykuły nieżywnościowe w wydatkach ogółem (we wszystkich rodzajach gospodarstw domowych);

Najlepsze dopasowanie wykazał łańcuch Markowa dla zmiennej „przeciętne miesięczne wynagrodzenie” w przypadku każdego rodzaju gospodarstwa. Ponadto bardzo dobre dopasowanie wykazał łańcuch Markowa dla zmiennej „dochód rozporządzalny pracowników” dla gospodarstw domowych pracowników, „dochód rozporządzalny pracujących na własny rachunek” dla gospodarstw domowych pracujących na własny rachunek, „dochód rozporządzalny ogółem” dla gospodarstw domowych rolników, „dochód rozporządzalny emerytów i rencistów” dla gospodarstw domowych emerytów i rencistów. Parametry w otrzymanych funkcjach nie mają bezpośredniej interpretacji. Wartość funkcji dla określonych poziomów czynnika wpływa na prawdopodobieństwo przejścia, rozumianego jako zmianę jednostki pieniężnej zainwestowanej w określoną grupę towarową. Jednak jakość dopasowania pozwala przypuszczać, że czynniki jakimi są przeciętne miesięczne wynagrodzenie i dochód rozporządzalny, wpływa na zmianę struktury wydatków. Model w ogólności wychwytuje kierunki zmian udziału w strukturze wydatków artykułów żywnościowych, artykułów nieżywnościowych, usług i pozostałych.

## Podsumowanie

Podsumowując można stwierdzić, że w zmieniających się warunkach społecznych i gospodarczych gospodarstwa domowe stoją zawsze przed



ważnymi wyborami dotyczącymi zarówno wydatków, jak i pozyskiwania środków pieniężnych, zachowania się w otaczającej rzeczywistości, kształtowania swoich potrzeb i oczekiwań w stosunku do nabywanych produktów i usług. Przez fakt, że zachowania konsumpcyjne podlegają nieustannym przemianom i wahaniom, konieczna jest ich ciągła obserwacja i konfrontacja z determinantami warunkującymi te zmiany. Najistotniejszym czynnikiem tych zmian są dochody, którymi dysponują gospodarstwa domowe. Wynika to z istnienia funkcjonalnej zależności między dochodami a popytem konsumpcyjnym.

Autorka ma nadzieję, że przedstawione w pracy problemy i wskazane możliwości praktyczne zostaną wykorzystane do analiz w dziedzinie życia społeczno-gospodarczego i staną się inspiracją do dalszych badań i poszukiwań naukowych.

## **Bibliografia**

*Budżety gospodarstw domowych* (1993 – 2015), GUS, Warszawa.

Decewicz A., Gyczew A. (2001), *Wprowadzenie do teorii i zastosowań Markov Set-Chains*, praca niepublikowana, napisana w ramach badań statutowych SGH pod kierunkiem prof. dr hab. M.Podgórskiej, Warszawa.

Górka J., Osińska M., Stawicki J. (2002), *Modelling and Forecasting the GDP Structure of Polish and Estonian Economies in Transition Period Using Markov Chains*, [w:] East European Transition and EU Enlargement, Physica-Verlag, Berlin.

Hartfiel, D.J. (1999), *Markov Set - Chains*, Springer, New York, DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0094586>

Jakubowski J., Stencel R. (2001), *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa.

Kowalenko I. N., Kuzniecowa N. J., Szurienkova W. M. (1989), *Procesy stochastyczne. Poradnik*, PWN, Warszawa.

Koźniewska I., Włodarczyk M. (1978), *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi*, PWN, Warszawa.

Lee T.C., Judge, G.G., Zelner, A. (1970), *Estimating the Parameters of Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam.

Podgórska M., Śliwka P., Tobolewski M., Wrzosek M. (2002), *Łańcuchy Markowa w teorii i zastosowaniach*, SGH, Warszawa.

*Prognozowanie struktury za pomocą łańcuchów Markowa* (1980), red. I. Nykowski, ICIZ Prace i Materiały 1, SGPiS, Warszawa.

- Rocznik statystyczny Rzeczypospolitej Polskiej* (1993-2015), GUS, Warszawa.
- Rosenblatt M. (1967), *Procesy stochastyczne*, PWE, Warszawa.
- Samuels, C. L. (2001), *Markov set-chains as models of plant succession*, University of Tennessee, Knoxville.
- Słaby T., Zajączkowski S. (2005), *Zróżnicowanie rozkładów wydatków a zamożność polskich gospodarstw domowych w latach 1998-2002*, „Handel Wewnętrzny”, nr 1
- Sobczyk G. (2004), *Współczesna konsumpcja – nowe trendy na polskim rynku*, Zeszyty Naukowe WSEI seria: EKONOMIA, 9(2/2014), s. 87-104.
- Stawicki J. (2004), *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo UMK, Toruń.
- Wentzell A. D. (1980), *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa.
- Zieliński Z. (2002), *Analiza ekonomicznych procesów stochastycznych. Pisma wybrane*, UMK, Toruń.
- Zwierzyk J. (2005), *Poziom i struktura wydatków konsumpcyjnych gospodarstw domowych jako jeden z mierników oceny stanu zamożności społeczeństwa polskiego*, w: *Jak żyjemy. Warunki materialne. Konsumpcja. Zachowania na rynku*, po red. naukową A. Kusińskiej, Instytut Rynku Wewnętrznego i Konsumpcji, Warszawa.