

Pérez-Fructuoso, María José

Article

Tarificación de bonos sobre catástrofes (cat bonds) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelación mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Provided in Cooperation with:

Universidad Pablo de Olavide, Sevilla

Suggested Citation: Pérez-Fructuoso, María José (2017) : Tarificación de bonos sobre catástrofes (cat bonds) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelación mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, ISSN 1886-516X, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, Vol. 24, pp. 340-361

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/195393>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Tarificación de bonos sobre catástrofes (*cat bonds*) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelación mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck

PÉREZ-FRUCTUOSO, MARÍA JOSÉ

Departamento de Economía y Administración de Empresas

Universidad a Distancia de Madrid (España)

Correo electrónico: mariajose.perez@udima.es

RESUMEN

Este artículo propone un modelo aleatorio en tiempo continuo para calcular el índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes a partir de la cuantía declarada de siniestros hasta el momento de su vencimiento.

Bajo la hipótesis de que la cuantía total de una catástrofe se define como la suma de la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar, modelizamos la dinámica lineal decreciente de esta última cuantía mediante un proceso browniano aditivo o proceso de Ornstein-Uhlenbeck. La cuantía declarada de siniestros, entonces, se obtiene por diferencia entre la cuantía total de los siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

Finalmente, se comprueba la validez del modelo propuesto estimando sus parámetros fundamentales y contrastando la bondad del ajuste realizado sobre una muestra de series de datos de seis inundaciones ocurridas en diferentes localidades españolas propensas a sufrir este tipo de catástrofes.

Palabras claves: bonos sobre catástrofes; cuantía de siniestros pendiente de declarar; cuantía declarada de siniestros; tasa de declaración de siniestros; índice de pérdidas por catástrofes; proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Clasificación JEL: C51; C52.

MSC2010: 60G15; 62P05.

Pricing Loss Index Triggered Cat Bonds. An Ornstein-Uhlenbeck Process-Based Model

ABSTRACT

This paper develops a continuous-time random model of loss index triggers for cat bonds on the basis of the loss amount incurred until their maturity. Assuming that total loss amount due to a catastrophe is defined as the sum of the incurred loss amount plus the incurred-but-not-yet reported loss amount, we model the decreasing linear dynamics of the latter amount by means of an additive Brownian process (or Ornstein-Uhlenbeck process); and get the former by the difference between the total loss amount and the incurred-but-not-yet-reported loss amount. Finally, we test the validity of the model by estimating its core parameters and by contrasting the goodness of fit through a data series of six floods occurred in several Spanish cities prone to suffer such kind of catastrophes.

Keywords: catastrophe bonds; incurred-but-not-yet-reported loss amount; incurred loss amount; claim reporting rate; loss index trigger; Ornstein-Uhlenbeck process.

JEL classification: C51; C52.

MSC2010: 60G15; 62P05.



1. Introducción

Los bonos sobre catástrofes son activos financieros que condicionan su cobertura a la ocurrencia de un determinado desencadenante (*trigger*) establecido en el momento de la emisión. La selección de este desencadenante se realiza en función de los riesgos cubiertos y la forma en que se estructure el proceso de indemnización, tratando, desde el punto de vista del inversor, de maximizar su transparencia y, desde el punto de vista del patrocinador, de minimizar el riesgo de base o de cobertura insuficiente. Por esta razón, a lo largo del tiempo, los desencadenantes utilizados en los procesos de titulización del riesgo asegurado han ido variando desde los desencadenantes iniciales de indemnización y de índices paramétricos a la tendencia actual de índices de pérdidas sectoriales (o índices de pérdidas de la industria aseguradora). Ello se debe, básicamente, a que, frente a la estructura apoyada en los libros de contabilidad del desencadenante de indemnización, los desencadenantes de índices de pérdidas son más simples de comprender para el inversor y reducen el riesgo moral. Además, desde el punto de vista del asegurador, evitan que mucha de su información cercana a la confidencialidad se haga pública. Sin embargo, el principal inconveniente de este sistema de estructuración de los bonos sobre catástrofes deriva de utilizar índices pobremente desarrollados que no representen fielmente las pérdidas de la industria y generen riesgo de base.

Un aspecto relevante en el análisis, tanto teórico como práctico, de estos instrumentos financiero-actuariales con desencadenantes de índices de pérdidas, es su tarificación a lo largo de un horizonte temporal determinado. Desde un enfoque exclusivamente actuarial, para fijar el precio de un producto de seguros, tradicionalmente se trabaja con las hipótesis de la Teoría Clásica del Riesgo, que suponen las cuantías individuales de los siniestros como variables aleatorias independientes y equidistribuidas. Además, la prima se obtiene aplicando el principio de mutualidad a partir del cual los riesgos se distribuyen entre toda la masa asegurada; de forma que, en promedio, los errores se compensan y la esperanza matemática de la siniestralidad total, o prima pura, es suficiente para llevar a cabo la cobertura. Sin embargo, este procedimiento de determinación del precio del seguro es incongruente con la valoración realizada en los mercados financieros, en los que la cuantificación de los activos derivados se obtiene, evitando las oportunidades de arbitraje, mediante la réplica de carteras formadas por activos simples cuyos resultados son iguales, en todo momento del periodo de negociación, al del activo derivado objeto de valoración. La tarificación de los bonos sobre catástrofes en este contexto requiere la definición de un modelo que permita calcular la evolución temporal de la cuantía total de las pérdidas derivadas de una catástrofe y, por tanto, de la ratio de siniestralidad subyacente de este tipo de contratos.

Diversos autores se han ocupado de esta cuestión. Cummins y Geman (1995) y Geman y Yor, (1997) desarrollan modelos de valoración de opciones y futuros sobre riesgos catastróficos basados en dos hipótesis: por una parte, utilizan procesos geométricos de Wiener para describir la declaración

instantánea de los siniestros y, por otra, procesos de Poisson, que incorporan al modelo la posibilidad de ocurrencia de grandes catástrofes. Aase (1999, 2001) modela la dinámica del índice de pérdidas a través de un proceso de Poisson compuesto con saltos aleatorios para valorar futuros y opciones sobre futuros sobre catástrofes como caso particular del modelo desarrollado por Embrechts y Meister (1997), que representa el comportamiento del subyacente mediante una mixtura de procesos de Poisson compuestos y una frecuencia de siniestralidad aleatoria. Loubergé *et al.* (1999) aplican el modelo de valoración de opciones sobre catástrofes desarrollado por Cummins y Geman (1995), para calcular el precio de un bono catastrófico cuyo desencadenante es un índice de pérdidas de la industria aseguradora. Lee y Yu (2002) incorporan el riesgo de crédito en la valoración de los bonos catastróficos a través de un movimiento geométrico browniano así como factores prácticos asociados al azar moral y al riesgo de base. Cox y Pedersen (2000) proponen un método de cálculo del precio de un bono sobre catástrofe en mercados incompletos a partir de la definición de una determinada estructura temporal de los tipos de interés y de una estructura de probabilidades de ocurrencia del riesgo catastrófico. Muermann (2003) utiliza la modelación del índice de pérdidas desarrollado por Aase (1999) para realizar una valoración, consistente en términos actuariales, de las opciones y futuros negociados en el *Chicago Board of Trade* (en adelante, CBOT) durante la década de los 90 del siglo pasado. Nowak y Romaniuk (2013) aplican modelos de ETTI (tipos de interés *spot* libres de riesgo) bajo la hipótesis de que la ocurrencia de la catástrofe es independiente del comportamiento de los mercados financieros. Finalmente, Zong-Gang y Chao-Qun (2013) consideran un entorno de tipos de interés estocásticos para describir las pérdidas catastróficas a través de un proceso de Poisson compuesto no homogéneo.

Esta revisión de la literatura financiero-actuarial pone de manifiesto el uso frecuente del movimiento geométrico browniano para modelar el comportamiento del índice de pérdidas desencadenante de los derivados vinculados a seguros en general y, dentro de este tipo de activos, de los bonos sobre catástrofes en particular. Trabajar bajo esta hipótesis lleva a asumir un crecimiento exponencial, en promedio, de la declaración de siniestros instantánea; mientras que lo que revela la evidencia empírica es que dicho crecimiento tiende a ser uniforme en el tiempo. En Cummins y Geman (1995), se asume además, que esta tasa es discontinua al introducir el proceso de salto debido a las grandes catástrofes en la definición de $S(t)$; en Geman y Yor (1997), la introducción de las grandes catástrofes se hace en la definición del índice de pérdidas, $L(t)$, directamente. Este planteamiento agregado en cuanto al comportamiento de la velocidad de declaración de los siniestros no se corresponde con una distribución más o menos uniforme de la ocurrencia de los mismos dentro de un intervalo temporal concreto, pues es difícil entender que el proceso de agregación siniestral sea exponencial y no lineal.

Para resolver estas inconsistencias, Alegre *et al.* (2003) desarrollan un modelo aleatorio en tiempo discreto que modela el comportamiento del índice de pérdidas subyacente de los futuros y opciones sobre riesgos catastróficos negociadas en el CBOT, a partir de la definición de la cuantía total de una catástrofe como la suma de dos variables aleatorias, la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, limitando la posibilidad de ocurrencia de catástrofes a una por periodo. Para reflejar la incertidumbre del ritmo de las declaraciones en el tiempo, se define un proceso estocástico discreto formado por variables aleatorias de Bernoulli, denominadas tasas nominales de declaración de siniestros, que permiten simular periódicamente dos velocidades de declaración de siniestros, una rápida y otra lenta. Finalmente, los autores demuestran que, dividiendo infinitamente los periodos de observación, el modelo discreto aleatorio tiende a un modelo continuo basado en un proceso de Wiener.

Posteriormente, Pérez-Fructuoso (2008, 2009) realiza una extensión al campo continuo del modelo discreto aleatorio anterior asumiendo que la dinámica de la cuantía de siniestros pendiente de declarar sigue un movimiento geométrico browniano representativo de un decrecimiento temporal de esta variable a razón de una función real de variable real, denominada tasa de declaración de siniestros, para la cual se proponen tres definiciones alternativas: constante, asintótica y mixta. Para el caso de una tasa de declaración de siniestros constante (tasa instantánea de declaración de siniestros), la cuantía declarada de siniestros, variable fundamental para el cálculo del índice de pérdidas en caso de ocurrencia de una catástrofe, se obtiene entonces fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

Con el objetivo de desarrollar una modelización más ajustada del índice de pérdidas por catástrofes desencadenantes de los bonos sobre catástrofes, en este artículo se presenta una definición alternativa para la dinámica de las declaraciones de siniestros basada en un proceso de Ornstein-Ulhenbeck. La incorporación de un movimiento browniano aditivo a través del proceso de Ornstein-Ulhenbeck permite considerar la irregularidad de las declaraciones de siniestros de forma constante en el tiempo y no proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

La estructura del artículo es la siguiente. Tras la presentación de las hipótesis básicas sobre las que se modela la ocurrencia de las catástrofes y la declaración de los siniestros y describir las expresiones más relevantes obtenidas en el modelo original, la Sección 3 presenta las soluciones de las variables “cuantía declarada de siniestros” y “cuantía de siniestros pendientes de declarar” cuando la dinámica de ésta última se representa mediante un proceso de Ornstein-Ulhenbeck. En la Sección 4, se calcula el índice de pérdidas por catástrofes a partir de los resultados obtenidos en la sección anterior. En la Sección 5, se realiza una validación del modelo propuesto a través de la estimación de los parámetros del modelo original y del modelo de Ornstein-Ulhenbeck y de la comparación de los

resultados obtenidos en ambos casos. Y finalmente, la Sección 6 presenta las principales conclusiones alcanzadas con la realización del artículo.

2. Revisión del modelo original de elaboración del índice de pérdidas

2.1. Hipótesis sobre la ocurrencia de catástrofes

Siguiendo a Pérez-Fructuoso (2008), se considera que $[0, T] \subset [0, T']$ es el periodo de riesgo del bono sobre catástrofes, tal que $T' \geq T$ es la fecha de vencimiento o amortización del contrato y $\tau \in [0, T]$ el momento en el que se produce la catástrofe cubierta con la emisión del bono.

Se define K_τ^i como la variable aleatoria que representa la cuantía total de la catástrofe de intensidad i ocurrida en el momento τ con $i=1, 2, 3$ de forma que: $i=1$, si la catástrofe ocurrida es de pequeña cuantía; $i=2$, si es de cuantía media; e $i=3$, si es de gran cuantía (Alegre *et al.*, 2003).

Finalmente, se introduce en el modelo una variable indicador, δ_τ^i , cuyo valor es 0 si no se produce la catástrofe cubierta en el bono en un momento $\tau \in [0, T]$, o 1 en otro caso.

2.2. Hipótesis sobre la declaración de siniestros. Principales soluciones del modelo original

En el modelo original desarrollado por Pérez-Fructuoso (2008), se asume que el proceso de declaración de los siniestros asociado a la ocurrencia de una catástrofe se inicia en el mismo instante en el que ésta se produce y se extiende hasta el momento del vencimiento del bono, T' . Entonces, para un momento de valoración $t \in (\tau, T'] \subset [0, T']$, se define la cuantía total de la catástrofe ocurrida en el momento τ , K_τ^i , como la suma de dos variables aleatorias:

$$K_\tau^i = S_\tau^i(t) + R_\tau^i(t) \quad (1)$$

donde $S_\tau^i(t)$ es la cuantía declarada de siniestros y $R_\tau^i(t)$ la cuantía de siniestros pendientes de declaración ambas referidas al momento de valoración t .

A partir del análisis de la evidencia empírica, se considera como hipótesis fundamental del modelo que la intensidad en la declaración de los siniestros es muy elevada inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe y va disminuyendo con el tiempo hasta anularse cuando ya no quedan más siniestros por declarar. Como consecuencia de ello, y en una primera fase de construcción del modelo, se representa la siniestralidad instantánea a través de una ecuación diferencial que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar:

$$dS_\tau^i(t) = \alpha_\tau^i R_\tau^i(t) dt \quad (2)$$

siendo α_τ^i un valor constante denominado *tasa instantánea de declaración de siniestros* con $\alpha_\tau^2 > \alpha_\tau^3$ y $\alpha_\tau^1 \rightarrow \infty$.

Las variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$ están sujetas a las siguientes condiciones de contorno:

- (a) Condición de contorno inicial, $t = \tau$: si el momento de valoración del bono coincide con el momento de ocurrencia de la catástrofe:

$$R_\tau^i(t) = K_\tau^i \text{ y } S_\tau^i(t) = 0,$$

la cuantía de siniestros pendiente de declaración coincide con el volumen total de la catástrofe y, consecuentemente, la cuantía declarada de siniestros es cero.

- (b) Condición de contorno final, $t \rightarrow \infty$: si la valoración del bono se produce en un momento lo suficientemente alejado de la ocurrencia de la catástrofe (tiende a infinito):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_\tau^i(t) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} S_\tau^i(t) = K_\tau^i,$$

las pérdidas asociadas a la catástrofe ya se han declarado en su totalidad y, por tanto, ya no queda ningún siniestro pendiente de declarar.

Diferenciando la ecuación (1), resulta:

$$dS_\tau^i(t) = -dR_\tau^i(t)dt \quad (3)$$

y substituyendo en la ecuación (2), $dS_\tau^i(t)$ por el resultado obtenido en la expresión (3), se obtiene la ecuación diferencial que describe la evolución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau^i(t)$, como:

$$dR_\tau^i(t) = -\alpha_\tau^i R_\tau^i(t)dt \quad (4)$$

Para capturar el comportamiento irregular de las declaraciones de siniestros catastróficos a lo largo del tiempo, se introduce un proceso de Wiener en la ecuación (4) dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica (Pérez-Fruitoso, 2008, 2009):

$$dR_\tau^i(t) = -\alpha_\tau^i R_\tau^i(t)dt + \sigma_\tau^i R_\tau^i(t)dW_\tau^i(t - \tau) \quad \forall t \in [\tau, T] \quad (5)$$

siendo α_τ^i la tasa instantánea de declaración de siniestros, que representa la tendencia del proceso; σ_τ^i una constante que indica la volatilidad del proceso; y $W_\tau^i(t - \tau)$ un proceso de Wiener estándar asociado a la catástrofe del tipo i ocurrida en el momento τ .

La ecuación diferencial (5) se resuelve aplicando el lema de Itô a la transformación $y = \ln R_{\tau}^i(t)$ (Arnold, 1974), de donde, considerando las condiciones de contorno (a) y (b), se obtiene:

$$R_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_{\tau}^i W_{\tau}^i(t-\tau)} \quad (6)$$

La cuantía declarada de siniestros hasta t , $S_{\tau}^i(t)$, se deriva fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar, substituyendo (6) en la ecuación (1), que establece la relación entre las variables $R_{\tau}^i(t)$ y $S_{\tau}^i(t)$; esto es:

$$S_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i - R_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_{\tau}^i W_{\tau}^i(t-\tau)} \right] \quad (7)$$

y sin necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica.

3. Variaciones del modelo original. El modelo de Ornstein-Uhlenbeck

En el modelo original, cuando incorporamos la irregularidad en el comportamiento de las declaraciones de siniestros en el tiempo, asumimos que su intensidad es proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar y lo representamos mediante un movimiento browniano geométrico.

El proceso de Wiener introducido en el modelo recoge las diferencias en la intensidad de declaración de siniestros ya que se considera que cada catástrofe tiene características propias no explicitadas en el modelo. Sin embargo, perturbar la tasa de declaración de siniestros con un ruido blanco amplificado por σ_{τ}^i puede dar lugar a valores de dicha tasa negativos, lo que provocaría un crecimiento temporal de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_{\tau}^i(t)$, debido a la variación inversa definida para dicha variable. Esto puede suceder cuando, después de realizadas las declaraciones de siniestros, la tasación de los peritos dé lugar a valoraciones de pérdidas inferiores a las estimadas inicialmente. Por ello, la incorporación de la aleatoriedad mediante un proceso de Wiener únicamente es válida para valores de σ_{τ}^i tales que la probabilidad de que la cuantía de siniestros pendiente de declarar sea creciente, es prácticamente despreciable.

Para solventar esta posible contradicción en el modelo original, consideramos en este artículo que la irregularidad de la intensidad en la declaración de los siniestros es constante en el tiempo y, por tanto, no depende de la cuantía de siniestros pendiente de declarar. Este hecho queda reflejado introduciendo un proceso de Wiener en la ecuación (4) mediante un movimiento browniano aritmético en lugar de uno geométrico, dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dR_\tau^i(t) = \alpha_\tau^i R_\tau^i(t) dt + \sigma_\tau^i dW_\tau^i(t - \tau) \quad (8)$$

Este tipo de proceso gaussiano se conoce como proceso de Ornstein-Uhlenbeck y su solución puede obtenerse a través del cálculo de Itô. Para ello, construimos un polinomio de Taylor de la función $f(Z_t, t)$, donde Z_t es un proceso de Itô de la forma $dZ_t = a_t dt + b_t dW_t$, $dt \rightarrow 0$, y detenemos su desarrollo en $o(dt)$:

$$\begin{aligned} df(Z_t, t) &= \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} dZ_t + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} (dZ_t)^2 + L \\ &= \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} (a_t dt + b_t dW_t)^2 + L \\ &= \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} b_t^2 + o(dt) \\ &= \left(a_t \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} + b_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} \right) dt + b_t \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} dW_t \end{aligned} \quad (9)$$

Utilizamos (9) para aplicar el proceso de Itô en (8) con la función $f(R_\tau^i(t), t) = R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t}$:

$$d(R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t}) = (-\alpha_\tau^i R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t} + \alpha_\tau^i R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t}) dt + \sigma_\tau^i e^{\alpha_\tau^i t} dW_\tau^i(t - \tau) = \sigma_\tau^i e^{\alpha_\tau^i t} dW_\tau^i(t - \tau) \quad (10)$$

Integrando entre 0 y $t - \tau$ ambos lados de la igualdad y considerando la condición de contorno inicial establecida en la Sección 2, la expresión de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau^i(t)$, en este caso es:

$$R_\tau^i(t) = K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} + \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \quad (11)$$

A partir de este resultado, la cuantía declarada de siniestros hasta t , $S_\tau^i(t)$, se obtiene de forma simple, substituyendo (11) en la ecuación (1) y operando:

$$\begin{aligned} S_\tau^i(t) &= K_\tau^i - \left(K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} + \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right) = \\ &= K_\tau^i \left(1 - e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} \right) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \end{aligned} \quad (12)$$

$R_\tau^i(t)$ es un proceso gaussiano cuyos momentos principales, media y varianza, resultan:

$$\begin{aligned}
E[R_\tau^i(t)] &= K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(t-\tau)} \\
\text{Var}[R_\tau^i(t)] &= E\left[R_\tau^i(t) - E(R_\tau^i(t))\right]^2 = E\left[\sigma_\tau^i e^{\alpha_\tau^i(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s)\right]^2 = \\
&= (\sigma_\tau^i)^2 e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)} E\left(\int_0^{t-\tau} e^{2\alpha_\tau^i s} (dW_\tau^i(s))^2\right) = (\sigma_\tau^i)^2 e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)} E\left(\int_0^{t-\tau} e^{2\alpha_\tau^i s} ds\right) = \\
&= (\sigma_\tau^i)^2 e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)} \frac{1}{2\alpha_\tau^i} (e^{2\alpha_\tau^i(t-\tau)} - 1) = \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)})
\end{aligned}$$

y, por tanto, $R_\tau^i(t)$ sigue una distribución normal de parámetros:

$$R_\tau^i(t) \approx N\left(K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(t-\tau)}, \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)})\right) \quad (13)$$

4. Determinación del índice de pérdidas por catástrofes en el modelo de Ornstein-Uhlenbeck

Un índice de pérdidas por catástrofes se define como el cociente entre la cuantía total de pérdidas asociadas a una o varias catástrofes ocurridas a lo largo de un determinado periodo de tiempo y un valor constante cuya definición depende del tipo de índice utilizado. Este índice permite cuantificar la magnitud de las declaraciones de siniestros que se esperan en la industria aseguradora después de la ocurrencia de una o varias catástrofes.

Los bonos sobre catástrofes que utilizan índices de pérdidas como desencadenantes de las indemnizaciones sólo consideran, para la elaboración de dichos índices, la ocurrencia de una catástrofe durante el periodo de riesgo y, a la hora de realizar los pagos, se basan en el valor que el índice de pérdidas utilizado alcance en el momento del vencimiento del contrato, T' . Por tanto, el valor del índice al vencimiento del bono T' puede definirse como:

$$LI(T') = \delta_\tau^i \times \frac{S_\tau^i(T')}{cte} = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_\tau^i = 0 \\ \frac{S_\tau^i(T')}{cte} & \text{si } \delta_\tau^i = 1 \end{cases} \quad (14)$$

Substituyendo en (14) $S_\tau^i(T')$ por su expresión dada en la ecuación (12), el valor de dicho índice tiene la siguiente expresión:

$$LI(T') = \delta_{i,\tau} \times \frac{S_\tau^i(T')}{cte} = \frac{\delta_\tau^i}{cte} \times \left[K_\tau^i (1 - e^{-\alpha_\tau^i(T'-\tau)}) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(T'-\tau)} \int_0^{T'-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right] \quad (15)$$

Resulta evidente que $LI(T')$ es aleatorio porque $S_\tau^i(T')$ es una variable aleatoria: *a priori*, en el momento de la emisión del bono, se desconoce si se va a producir la catástrofe cubierta en el mismo y, por tanto, se ignora el momento de su ocurrencia y la cuantía de los daños asociados a dicha catástrofe.

A continuación, se analiza cómo se va modificando la distribución de probabilidad del índice de pérdidas cuando, en lugar de realizar la valoración en el momento de la emisión del bono, se alcanza un instante $t \in [\tau, T']$ y se incorpora la información disponible sobre las declaraciones siniestralas realizadas hasta ese momento. Para ello, se define una nueva variable aleatoria condicionada, $LI^*(T') = LI(T')/F_t$, que representa la cuantía total de las pérdidas declaradas hasta T' , siendo F_t una filtración que representa la posible historia de declaraciones de siniestros realizadas durante el intervalo $[\tau, t]$.

Para obtener $LI^*(T') = LI(T')/F_t$, se calcula, en primer lugar, la cuantía total de declaraciones de pérdidas en cualquier momento $t \in [\tau, T']$, $LI(t)$, que es el condicionante de $LI(T')$ (es decir $LI(t) \cong F_t$), resultando:

$$LI(T') = \delta_{i,\tau} \times \frac{S_\tau^i(T')}{cte} = \frac{\delta_\tau^i}{cte} \times \left[K_\tau^i (1 - e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)}) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right] \quad (16)$$

Determinado $LI(t)$, se introduce en la variable $LI(T')$ dando lugar al siguiente valor del índice condicionado:

$$LI^*(T') = \frac{(\delta_\tau^i / F_t)}{cte} \left[L(t) + (K_\tau^i / F_t) (1 - e^{-\alpha_\tau^i (T'-t)}) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (T'-t)} \int_{t-\tau}^{T'-t} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right] \quad (17)$$

A partir de esta expresión, el precio del bono sobre catástrofes en un momento t de su periodo de negociación puede calcularse aplicando la teoría general de valoración de opciones –véase, por ejemplo, Loubergé *et al.* (1999) o Pérez-Fructuoso (2008)–.

5. Validación del modelo. Estimación de los parámetros y comparación de los modelos original y de Ornstein-Ulhembeck

En la aplicación práctica del modelo teórico desarrollado para determinar un índice de pérdidas por catástrofes desencadenante de los bonos sobre catástrofes, los principales parámetros a estimar son la tasa de declaración de siniestros y la volatilidad incorporada mediante el proceso de Wiener en el modelo original y a través del proceso de Ornstein-Ulhembeck en el modelo alternativo. Para ello, se

dispone de datos sobre el porcentaje de siniestros pendiente de declarar, acumulado semanalmente, en 6 inundaciones ocurridas en distintas regiones de España en las que este tipo de sucesos se producen con elevada frecuencia¹: Alcira (01/10/1991), San Sebastián (23/06/1992), Barcelona (14/09/1999), Zaragoza (20/10/2000), Valencia (20/10/2000) y Murcia (20/10/2000).

| Semana | Alcira | San Sebastián | Barcelona | Zaragoza | Valencia | Murcia |
|--------|--------|---------------|-----------|----------|----------|--------|
| 0 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 1 | 84,94 | 88,08 | 90,68 | 60,11 | 97,54 | 88,46 |
| 2 | 53,65 | 36,04 | 68,38 | 56,91 | 80,18 | 75,55 |
| 3 | 34,96 | 23,67 | 50,68 | 38,3 | 60,15 | 48,7 |
| 4 | 24,05 | 16,68 | 41,42 | 29,79 | 43,16 | 31,13 |
| 5 | 18,86 | 12,29 | 31,58 | 23,4 | 31,96 | 21,41 |
| 6 | 13,36 | 9,94 | 25,43 | 19,15 | 27,55 | 15,78 |
| 7 | 10,53 | 8,72 | 19,56 | 18,09 | 19,54 | 11,27 |
| 8 | 8,04 | 7,76 | 16,68 | 15,43 | 15,29 | 8,71 |
| 9 | 6,94 | 6,8 | 13,28 | 15,43 | 14,76 | 8,24 |
| 10 | 5,23 | 5,78 | 10,54 | 10,64 | 14,7 | 6,57 |
| 11 | 4,08 | 5,18 | 8,15 | 6,91 | 11,06 | 5,36 |
| 12 | 3,71 | 4,33 | 6,8 | 3,72 | 8,46 | 4 |
| 13 | 3,56 | 3,45 | 6,13 | 3,72 | 6,98 | 3,38 |
| 14 | 2,6 | 2,69 | 3,41 | 2,66 | 6,21 | 2,6 |
| 15 | 1,75 | 1,81 | 3,41 | 2,66 | 5,17 | 2,8 |
| 16 | 1,3 | 1,59 | 2,61 | 1,6 | 4,22 | 2,29 |
| 17 | 0,77 | 1,39 | 1,81 | 1,6 | 3,5 | 2,25 |
| 18 | 0,29 | 1,16 | 1,26 | 1,6 | 2,72 | 2,14 |
| 19 | 0,0 | 0,96 | 0,56 | 0 | 2,26 | 1,67 |
| 20 | | 0,76 | 0,0 | | 1,88 | 1,28 |
| 21 | | 0,45 | | | 1,69 | 1,09 |
| 22 | | 0,28 | | | 1,61 | 0,93 |
| 23 | | 0,2 | | | 0,9 | 0,66 |
| 24 | | 0,17 | | | 0,54 | 0,66 |
| 25 | | 0,11 | | | 0,36 | 0,62 |
| 26 | | 0,06 | | | 0,19 | 0,16 |
| 27 | | 0,0 | | | 0,0 | 0,0 |

Tabla 1: Datos asociados a seis inundaciones ocurridas en España

En el modelo original $R_{\tau}^i(t)$ es una variable aleatoria cuya distribución depende de la distribución de probabilidad de la cuantía total de la catástrofe, K_{τ}^i . Si realizamos la hipótesis, habitual en la literatura actuarial, de que dicha cuantía es un valor constante –véase, por ejemplo, Cummins y Geman (1995) o Geman y Yor (1997) –, la variable $R_{\tau}^i(t)$ seguirá una distribución lognormal, siendo los parámetros de la distribución normal asociada (Johnson *et al.*, 1994):

$$N\left(\ln K_{\tau}^i - \left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t - \tau), \sigma_{\tau}^i \sqrt{t - \tau}\right)$$

con $E[R_{\tau}^i(t)] = K_{\tau}^i e^{-\alpha_{\tau}^i(t-\tau)}$.

¹ Estos datos se han obtenido a través del Departamento Técnico y de Reaseguro del Consorcio de Compensación de Seguros.

Sin embargo, considerando las propiedades de la distribución normal así como las características de los datos disponibles, es posible obtener una expresión más apropiada para obtener los estimadores de los parámetros de los modelos analizados, α_τ^i y σ_τ^i , a partir de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t y en $t-1$, operando como sigue:

$$\frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)} = \frac{K_\tau^i e^{-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_\tau^i w_\tau^i(t-\tau)}}{K_\tau^i e^{-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right)(t-\tau-1) + \sigma_\tau^i w_\tau^i(t-\tau-1)}} = e^{-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right) + \sigma_\tau^i w_\tau^i(1)}$$

Esto implica que $\frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)}$ sigue una distribución lognormal, con parámetros de tendencia y dispersión de la distribución normal asociada:

$$\ln \frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)} \sim N\left(-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right), (\sigma_\tau^i)^2\right)$$

Entonces, si definimos la variable $X(t)$ como:

$$X(t) = -\ln \frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)} \sim N\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}, (\sigma_\tau^i)^2\right) \quad (18)$$

y aplicamos sobre este resultado el método de estimación de máxima-verosimilitud, el estimador de la tasa de declaración de siniestros resulta:

$$(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV} = \bar{X} - \frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}^2}{2} \quad (19)$$

donde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X(t)$ y $(\hat{\sigma}_\tau^i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2$ son, respectivamente, la media y la varianza muestral.

La varianza muestral ha sido estimada a través de la cuasi-varianza muestral, ya que esta última es un estimador insesgado de la primera:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2 \quad (20)$$

Con los datos disponibles en la Tabla 1, calculamos en primer lugar la media muestral para cada catástrofe. Una vez obtenida dicha media, determinamos la cuasi-varianza aplicando la ecuación (20) y, finalmente, calculamos la tasa de declaración de siniestros, $(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$, substituyendo los valores obtenidos de la media muestral y la cuasi-varianza en la ecuación (19). Los resultados derivados de este proceso se muestran en las Tablas 2 y 3.

| | \bar{x} | $(\hat{\sigma}_\tau^i)^2$ | $(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$ |
|---------------|-------------|---------------------------|-------------------------------|
| Alcira | 0,324613586 | 0,0422098269 | 0,3035086722 |
| San Sebastián | 0,28533003 | 0,0351605321 | 0,2677497687 |
| Barcelona | 0,27289414 | 0,0311010319 | 0,2573436251 |
| Zaragoza | 0,22973148 | 0,0434054683 | 0,2080287412 |
| Valencia | 0,240099621 | 0,0257693877 | 0,2281115136 |
| Murcia | 0,24760583 | 0,068754683 | 0,2132287838 |

Tabla 2: Estimadores para el modelo original

| | |
|---------------|-------------------------------|
| Alcira | $N(0,324613586;0,0422098269)$ |
| San Sebastián | $N(0,28533003;0,0351605321)$ |
| Barcelona | $N(0,27289414;0,0311010319)$ |
| Zaragoza | $N(0,22973148;0,0434054683)$ |
| Valencia | $N(0,240099621;0,0257693877)$ |
| Murcia | $N(0,24760583;0,068754683)$ |

Tabla 3: Distribuciones normales de $X(t)$ para el modelo original

En el modelo de Ornstein-Ulhemberk, $R_\tau^i(t)$ es un proceso gaussiano definido en (13) como:

$$R_\tau^i(t) \approx N \left(K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(t-\tau)}, \frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)}) \right)$$

A continuación, obtenemos una expresión cerrada para los estimadores de los parámetros tasa de declaración de siniestros y volatilidad en este modelo, aplicando el método de máxima-verosimilitud. Para ello, en primer lugar determinamos la función de densidad de $R_\tau^i(t)$ condicionada a $R_\tau^i(t-1)$ en un proceso de Ornstein-Ulhembeck:

$$f(R_\tau^i(t) | R_\tau^i(t-1), \alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i \Delta t}) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\left(R_\tau^i(t) - R_\tau^i(t-1) e^{-\alpha_\tau^i \Delta t} \right)^2}{\frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)^2}{\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i \Delta t})}}$$

y, considerando que $\Delta t = t - (t-1) = 1$, el logaritmo de la función de densidad condicional resulta:

$$\ln f(R_\tau^i(t) | R_\tau^i(t-1), \alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i}) \right) - \frac{\alpha_\tau^i}{(\sigma_\tau^i)^2} \frac{(R_\tau^i(t) - R_\tau^i(t-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2}{(1 - e^{-2\alpha_\tau^i})}$$

A partir de esta expresión, sumando todas las funciones de densidad individuales para las n observaciones, se obtiene la siguiente función log-verosímil:

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) &= \sum_{j=1}^n \ln f(R_\tau^i(j) | R_\tau^i(j-1), \alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) = \\ &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i}) \right) - \frac{\alpha_\tau^i}{(\sigma_\tau^i)^2 (1 - e^{-2\alpha_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Para obtener el estimador del parámetro σ_τ^i , derivamos la ecuación (21) respecto de dicho parámetro e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i)}{\partial \sigma_\tau^i} = -\frac{n}{\sigma_\tau^i} + \frac{2\alpha_\tau^i}{(\sigma_\tau^i)^3 (1 - e^{-2\alpha_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 = 0 \quad (22)$$

Operando en la expresión (22), el estimador máximo-verosímil de σ_τ^i , $(\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}$ resulta:

$$(\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}^2 = \frac{2\alpha_\tau^i}{n(1 - e^{-2\alpha_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 \quad (23)$$

Seguidamente, sustituimos el estimador dado por la expresión (23) en la función log-verosímil (21) para obtener la misma función, pero dependiente exclusivamente de α_τ^i :

$$\ln L(\alpha_\tau^i) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 \right) - \frac{n}{2} \quad (24)$$

El estimador máximo-verosímil de α_τ^i , $(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$ se calcula derivando, en primer lugar, la expresión (24) respecto a α_τ^i e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i)}{\partial \alpha_\tau^i} &= -\frac{n}{2} \frac{2 \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i}) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2} = \\ &= -n \frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1) - \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2 e^{-\alpha_\tau^i}}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2} = 0 \end{aligned}$$

Entonces, resolviendo esta ecuación para α_τ^i , $(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1) - \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2 e^{-\alpha_\tau^i} \\ \Leftrightarrow e^{-\alpha_\tau^i} &= \frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2} \\ \Leftrightarrow -\alpha_\tau^i &= \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2} \right) \\ \Leftrightarrow (\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV} &= -\ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Por tanto, las expresiones de los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros del modelo de Ornstein-Uhlenbeck son:

$$\begin{aligned} (\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV} &= \ln \left(\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2 \right) - \ln \left(\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1) \right) \text{ y} \\ (\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}^2 &= \frac{2 \hat{\alpha}_\tau^i}{n(1 - e^{-2\hat{\alpha}_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\hat{\alpha}_\tau^i})^2 \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos para la estimación de los parámetros del modelo de Ornstein-Uhlenbeck en las seis inundaciones consideradas y el proceso gaussiano seguido por $R_t^i(t)$ se muestran en las Tablas 4 y 5.

| | $(\hat{\alpha}^i)_{EMV}$ | $(\hat{\sigma}^i)_{EMV}^2$ |
|---------------|--------------------------|----------------------------|
| Alcira | 0,2990821063 | 16,3988925399 |
| San Sebastián | 0,3858518171 | 52,6399850026 |
| Barcelona | 0,2068640449 | 9,2310979432 |
| Zaragoza | 0,3385379521 | 28,6902771354 |
| Valencia | 0,1773690288 | 14,8410725629 |
| Murcia | 0,2297645911 | 14,3896476717 |

€

Tabla 4: Estimadores para el modelo de Ornstein-Uhlenberk

| | |
|---------------|---|
| Alcira | $N\left(K_t^i \exp(-0,2990821063t); 27,4153688791(1 - \exp(-0,5981642126t))\right)$ |
| San Sebastián | $N\left(K_t^i \exp(-0,3858518171t); 68,2126954814(1 - \exp(-0,7717036342t))\right)$ |
| Barcelona | $N\left(K_t^i \exp(-0,2068640449t); 22,3119922743(1 - \exp(-0,4137280898t))\right)$ |
| Zaragoza | $N\left(K_t^i \exp(-0,3385379521t); 42,3737973252(1 - \exp(-0,6770759041t))\right)$ |
| Valencia | $N\left(K_t^i \exp(-0,1773690288t); 41,8367080763(1 - \exp(-0,3547380577t))\right)$ |
| Murcia | $N\left(K_t^i \exp(-0,2297645911t); 31,3138930696(1 - \exp(-0,4595291821t))\right)$ |

Tabla 5: Proceso gaussiano seguido $R_t^i(t)$ por para el modelo de Ornstein-Uhlenberk

Para contrastar la bondad del ajuste realizado y determinar qué modelo se ajusta mejor a la realidad que queremos representar, realizamos una comparación de los errores de los estimadores en las 6 inundaciones disponibles para el modelo original y el modelo de Ornstein-Uhlenbeck mediante un análisis gráfico; véanse Figuras 1 a 12.

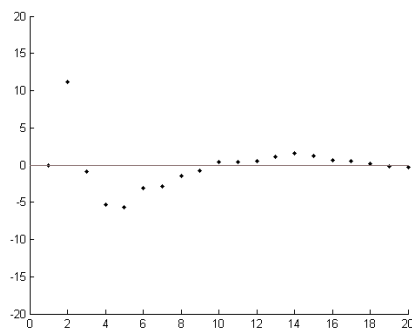


Figura 1: Errores Serie Alcira modelo original

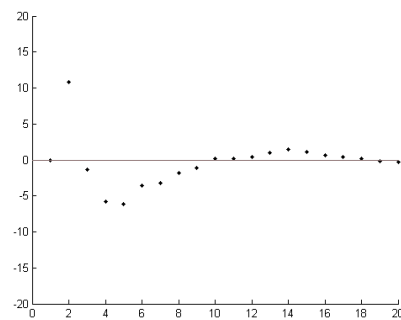


Figura 2: Errores Serie Alcira modelo OU

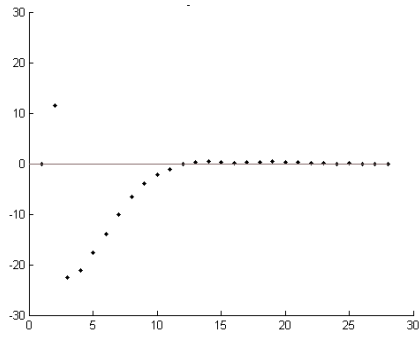


Figura 3: Errores Serie San Sebastián modelo original

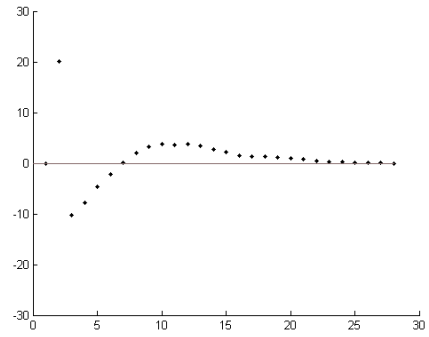


Figura 4: Errores Serie San Sebastián modelo OU

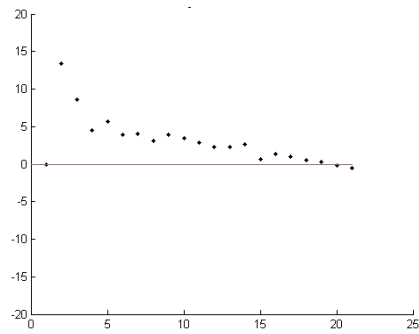


Figura 5: Errores Serie Barcelona modelo original

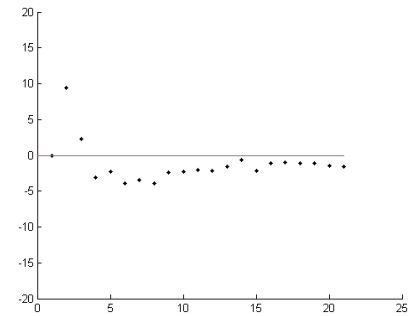


Figura 6: Errores Serie Barcelona modelo OU

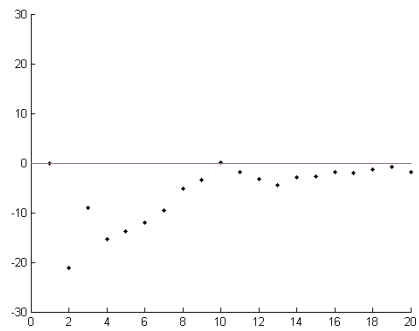


Figura 7: Errores Serie Zaragoza modelo original

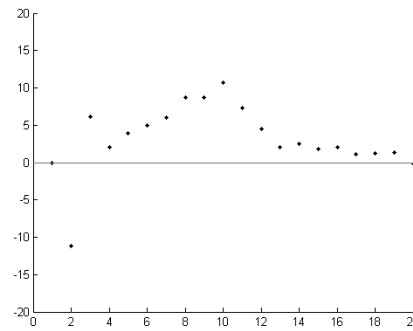


Figura 8: Errores serie Zaragoza modelo OU

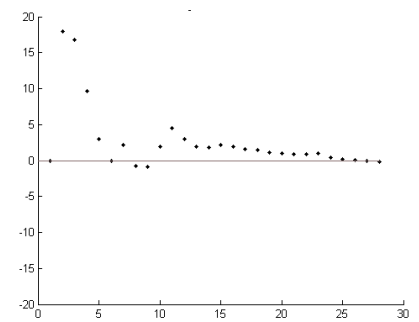


Figura 9: Errores Serie Valencia modelo original

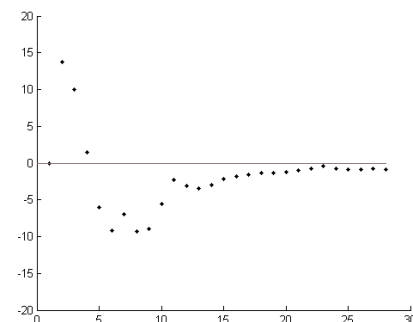


Figura 10: Errores Serie Valencia modelo OU

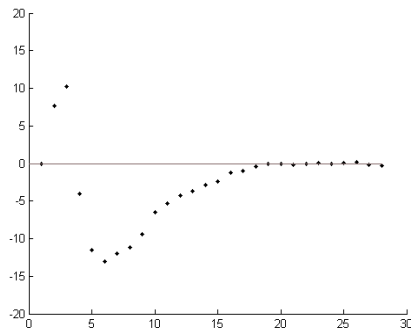


Figura 11: Errores Serie Murcia modelo original

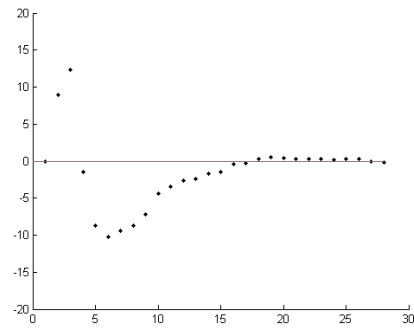


Figura 12: Errores serie Murcia modelo OU

Del análisis visual de los gráficos de errores mostrados en las Figuras 1 a 12, podemos extraer la siguientes conclusiones:

- Los dos modelos desarrollados dan lugar a los mismos resultados en la serie de datos de Alcira.
- El modelo de Ornstein-Uhlenbeck parece ajustarse mejor que el modelo original en la serie de datos de Barcelona.
- No es posible concluir cuál de los dos modelos se ajusta mejor a los datos disponibles sobre la inundación ocurrida en Valencia.
- Los errores para las estimaciones de la serie de datos de Murcia son mayores que los errores que se producen en las tres series de datos analizadas anteriormente. A pesar de ello, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck parece presentar menores errores y por tanto sería la mejor aproximación a los datos reales disponibles.
- La inundación ocurrida en Zaragoza presenta unas características algo diferentes al resto de inundaciones analizadas. El proceso de declaración de siniestros en este caso se vio alterado por la ocurrencia, inmediatamente después de la catástrofe original, de otras inundaciones de menor intensidad lo que condicionó los datos disponibles, dando lugar a mayores errores en las estimaciones realizadas sobre los valores reales. Por esta razón, el análisis gráfico en este caso, pone de manifiesto que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck se ajusta mejor al principio del proceso declaración; mientras que para las semanas finales del mismo, el modelo original resulta más fiable.
- Finalmente, las predicciones sobre la inundación de San Sebastián producen los mismos resultados que en el caso anterior. El modelo de Ornstein-Uhlenbeck se ajusta mejor al principio y el modelo original al final del proceso de declaración de siniestros.

En resumen, para las series de datos de Alcira y Valencia, los dos modelos dan lugar a los mismos resultados. Sin embargo, en el resto de series, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck parece dar mejores resultados (menores errores) que el modelo original. Para verificar estos resultados gráficos, calculamos la raíz de la suma cuadrado de los errores para cada modelo (véase Tabla 6), a partir de la siguiente expresión:

$$RSCE = \sqrt{SCE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}$$

donde Y_i es el valor observado e \hat{Y}_i es el valor estimado.

| | RSCE Modelo Original | RSCE OU |
|---------------|-----------------------------|----------------|
| Alcira | 3,2541320138 | 3,3478729786 |
| San Sebastián | 7,926406564 | 4,9404532812 |
| Barcelona | 4,3877716557 | 2,9974719773 |
| Zaragoza | 8,0230716144 | 5,5091970335 |
| Valencia | 5,2483780645 | 5,0638737475 |
| Murcia | 5,8600227682 | 4,9538378985 |
| Media | 5,7832970622 | 4,4687844861 |

Tabla 6: Valores de la RSCE para los modelos original y de Ornstein-Uhlenbeck

Como puede derivarse de los resultados obtenidos, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck presenta unos errores menores para todas las inundaciones consideradas, excepto para Alcira en la que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck tiene un error ligeramente superior al modelo original. En los casos de San Sebastián, Zaragoza y Murcia, los errores cometidos con el modelo original se reducen considerablemente al realizar el ajuste con el modelo de Ornstein-Uhlenbeck. Podemos concluir, por tanto, que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck ajusta mejor que el modelo original la realidad catastrófica que queremos representar.

6. Conclusiones

Para determinar el índice de pérdidas por catástrofes y proceder posteriormente a la valoración del activo derivado del que es subyacente, la mayor parte de los modelos precedentes –véase, por ejemplo, Cummins y Geman (1995) o Geman y Yor (1997)– asumen un crecimiento temporal de la cuantía declarada de siniestros y representan dicha evolución a través de un movimiento geométrico browniano. La hipótesis central de este artículo, sin embargo, establece un modelo browniano aditivo o proceso de Ornstein-Uhlenbeck para representar la dinámica lineal decreciente de la variable cuantía de siniestros pendientes de declarar. Una vez determinada esta variable, el total de siniestros declarados se obtiene como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, eliminando de esa forma la necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica. El índice de pérdidas catastróficas resulta de multiplicar la

cuantía declarada de siniestros por una variable aleatoria dicotómica que indica si se ha producido o no la catástrofe.

El modelo continuo propuesto en este trabajo permite calcular fácilmente el índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes, lo que simplifica considerablemente su tarificación a lo largo de su periodo de maduración.

La estimación de los parámetros, tanto del modelo original como del modelo alternativo basado en un proceso browniano aditivo de Ornstein-Uhlenbeck, se ha realizado aplicando la metodología de máxima verosimilitud sobre los datos de las seis inundaciones disponibles ocurridas en diferentes localidades españolas. La comparación realizada de los dos modelos, mediante el análisis gráfico de los errores y el cálculo de la raíz cuadrada del error cuadrático medio, permite concluir que el modelo alternativo propuesto, desarrollado a partir de un proceso gaussiano de Ornstein-Uhlenbeck, es el que mejor ajusta la realidad que queremos representar.

Referencias

- Aase, K. (1999): "An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads". *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24, 69-96.
- Aase, K. (2001): "A Markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads". *Journal of Risk and Insurance*, 68 (1), 25-50.
- Alegre, A.; Pérez-Fructuoso, M.J. & Devolder, P. (2003): "Modèles discrets d'options sur risques catastrophiques". *Belgian Actuarial Bulletin*, 3, 28-32.
- Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons.
- Cummins, J.D. & Geman, H. (1995): "Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach". *Journal of Fixed Income*, 4, 46-57.
- Cox, S.H. & Pedersen, H. (2000): "Catastrophe Risk Bonds". *North American Actuarial Journal*, 4(4), 56-82.
- Embrechts, P. & Meister, S. (1997): "Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures". En H. Bühlmann (ed.): *Securitization of Insurance Risk: The 1995 Bowles Symposium*. SOA Monograph M-FI97-1. Schaumburg: Society of Actuaries, pp. 15-26.
- Geman, H. & Yor, M. (1997): "Stochastic time changes in catastrophe option pricing". *Insurance: Mathematics and Economics*, 21, 185-193.
- Johnson, N.L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1994): *Continuous Univariate Distributions, Volume 1*. New York: John Wiley & Sons.

- Lee, J.P. & Yu, M.T. (2002): "Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk". *Journal of Risk and Insurance*, 69 (1), 25-44.
- Loubergé, H.; Kellezi E. & Gilli, M. (1999): "Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds". *Journal of Insurance Issues*, 22 (2), 125-146.
- Muermann, A. (2003): "Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives". *The Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series*, 03-18, 21 pp. Recuperado de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.201.6584&rep=rep1&type=pdf>.
- Nowak, P. & Romaniuk, M. (2013): "Pricing and simulations of catastrophe Bonds". *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 18-28.
- Pérez-Fructuoso, M.J. (2009): "Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model". *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3(2), 34-45.
- Pérez-Fructuoso, M.J. (2008): "Modeling loss index trigger for Cat bonds: A continuous approach". *Variance*, 2(2), 253-265.
- Zong-Gang, M. & Chao-Qun, M. (2013): "Pricing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method". *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 243-254.