

Knolmayer, Gerhard

Working Paper — Digitized Version

Die Zahl der Schlupfvariablen in der Optimalbasis von Programmierungsmodellen: Ein branchenspezifisches Phänomen?

Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 93

Provided in Cooperation with:

Christian-Albrechts-University of Kiel, Institute of Business Administration

Suggested Citation: Knolmayer, Gerhard (1980) : Die Zahl der Schlupfvariablen in der Optimalbasis von Programmierungsmodellen: Ein branchenspezifisches Phänomen?, Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 93, Universität Kiel, Institut für Betriebswirtschaftslehre, Kiel

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/190925>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Nr. 93

DIE ZAHL DER SCHLUPFVARIABLEN IN DER
OPTIMALBASIS VON PROGRAMMIERUNGSMODELLEN:
EIN BRANCHENSPEZIFISCHES PHÄNOMEN ?

GERHARD KNOLMAYER*

COPYRIGHT GERHARD KNOLMAYER, KIEL, IM JUNI 1981

*Dr. Gerhard Knolmayer
o. Prof. für BWL der Universität Kiel
Olshausenstr. 40-60
2300 Kiel

DIE ZAHL DER SCHLUPFVARIABLEN IN DER OPTIMALBASIS VON PROGRAMMIERUNGSMODELLEN: EIN BRANCHENSPEZIFISCHES PHÄNOMEN ?

Zusammenfassung

In dieser Studie wird gezeigt, daß die Zahl der Strukturvariablen in den Optimalbasen linearer Programme von der Branche beeinflusst sein kann, der die anwendende Unternehmung zugehört. Dieser Sachverhalt wird jedoch im Gegensatz zu früheren Arbeiten nicht durch die Besetzungsdichte der linearen Programme erklärt, die von der gewählten Formulierung und nicht primär von der Branche abhängt, sondern auf die technischen Gegebenheiten verschiedener Branchen zurückgeführt. Im Anschluß daran wird der mögliche Wunsch nach Reduzierung der Zahl oder der Werte der im Optimum positiven Schlupfvariablen als zweite Zielgröße interpretiert, die durch Methoden der Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung berücksichtigt werden kann.

Summary

This study shows that the number of structurals in the optimal bases of linear programs may depend on the industry regarded. As opposed to previous studies this fact is not explained by the density of linear programs which primarily depends on the formulation chosen rather than on the industry but is explained by technical properties of the various industries. Furthermore, an eventual desire to reduce the number or the values of positive slack variables in the optimal solution is interpreted as a second optimization criterium which can be taken into account by applying multiple-criteria-optimization methods.

Die Zahl der Schlupfvariablen in der Optimalbasis von Programmierungsmodellen: Ein branchenspezifisches Phänomen ?

1. Problemstellung

Verschiedene Untersuchungen belegen, daß Programmplanungsmodelle der linearen Programmierung (LP) in der Metallindustrie wesentlich dichter besetzt sind als gleich große Modelle etwa in der (petro-) chemischen Industrie (vgl. etwa [4, S. 108]). Experimente zeigen, daß in dicht besetzten LP-Modellen der Anteil der Schlupfvariablen an den optimalen Basisvariablen ceteris paribus höher als in dünn besetzten Modellen ist [4, S. 78 ff; 6, S. 92 ff]. Dementsprechend ist die als "Lösungsmenge" bezeichnete Zahl der Strukturvariablen in der Optimalbasis linearer Programme in dicht besetzten Modellen ceteris paribus niedriger als in dünn besetzten. Daraus werden Akzeptanzprobleme der linearen Programmierung in der Metallindustrie abgeleitet und zu ihrer Vermeidung Methoden gesucht, um die "Lösungsmenge" zu erweitern [1, S. 12 f; 2, S. 57 f; 6, S. 92 ff].

In dieser Studie wird geprüft, ob die Dichte eines linearen Programms bzw. der Anteil der im Optimum positiven Schlupfvariablen tatsächlich branchenspezifisch ist. Sodann werden Wünsche nach Erhöhung der "Lösungsmenge" als (implizite) Berücksichtigung eines Nebenzieles interpretiert und Methoden zur Erreichung dieses Ziels gegenübergestellt.

2. Zusammenhänge zwischen Modellstruktur, Dichte, Optimalbasis und Branche

2.1. Modellstruktur, Dichte und Optimalbasis

Für Standard-Maximum-Probleme vom Typ

$$\begin{aligned} c'x &\rightarrow \text{Max!} \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

mit m Nebenbedingungen und n Strukturvariablen sowie mit $c_j = 1 \ \forall j$, $b_i = 10\,000 \ \forall i$ und $a_{ij} > 0 \ \forall ij$ formulierten Kuhn und Quandt [10, S. 123] (mit teilweise anderen Symbolen) die folgende Vermutung:

$$\text{If } \lim_{m,n \rightarrow \infty} m/(m+n) = L \text{ then } \lim_{m,n \rightarrow \infty} E(A_s) = L. \quad (2)$$

Darin ist $E(A_s)$ der Erwartungswert des Anteils der im Optimum positiven Schlupfvariablen an allen positiven Variablen, deren Zahl nach dem Fundamentalsatz der LP (in primal nichtdegenerierten Lösungen) gleich der Zeilenzahl m ist. Die aus experimentell gewonnenen Daten abgeleitete Vermutung (2) gilt dann, wenn positive Werte aller Variablen unabhängig von ihren Zielfunktionswerten gleich wahrscheinlich sind. Die Eigenschaft (2) widerspricht der naheliegenden Vermutung, daß wegen $c_j > 0$ positive Werte der Strukturvariablen häufiger als positive Werte der Schlupfvariablen sein sollten. In der Tat ist in [10] für 52 von 66 Fällen $A_s < m/(m+n)$. Die Abweichungen von der Gleichverteilung sind jedoch möglicherweise nicht zu groß: So widerlegt Hinz [4, S. 51 ff] für Modelle vom Typ (1) (mit $1 \leq c_j \leq 50$) die Hypothese, daß Strukturvariablen in der Optimalbasis mit 10 % "überrepräsentiert" wären.

Als Besetzungsdichte

$$BD = 100 \cdot w/m.n$$

wird der prozentuelle Anteil der Zahl der Nichtnullkoeffizienten w an allen Elementen der Matrix A aus (1) bezeichnet. Experimente von Kiesel [6, S. 97] zeigen, daß die relative Lösungsmenge RL (in %) für eine bestimmte Relation n/m mit steigender Besetzungsdichte

$$RL = (1 - A_s) \cdot 100$$

sinkt und somit A_s steigt. Dies überrascht deshalb nicht, weil es zusätzliche Nichtnullkoeffizienten bei gegebener Zeilen- und Variablenzahl schwieriger machen, alle oder viele Kapazitäten vollständig auszulasten.

Die von Kuhn und Quandt [10] untersuchten LP-Modelle sind für betriebliche Anwendungen wegen $BD = 100\%$ atypisch.

Daher interessiert, wie in Modellen vom Typ (1) der Anteil der Schlupfvariablen in der Optimalbasis von der Modellstruktur und der Dichte abhängt; gesucht wird

$$A_s = F[m, n, BD(m, n, w)] = G(m, n, w).$$

Die in [3; 4] gebotene Erklärung setzt die Vermutung (2) für voll besetzte Matrizen voraus und berücksichtigt niedrigere Dichten durch einen Korrekturfaktor $f(BD)$; auf diese Weise erhält man den Erwartungswert

$$E(A_s) = f(BD) \cdot m / (m+n) \quad 100 \cdot m / (m \cdot n) \leq BD \leq 100.$$

Nach [3, S. 136; 4, S. 91, 102] steigt $f(BD)$ bis etwa $BD = 15\%$ von Null auf knapp 1,2 an und nimmt für höhere Werte von BD geringfügig bis $f(100) = 1$ ab. Die beiden Grenzwerte werden in [4, S. 84] theoretisch begründet. Dort wird auch $f(BD)$ durch eine nichtlineare Funktion so angenähert, daß die empirisch gefundenen Werte befriedigend erklärt werden.

Die Struktur der zur Erklärung herangezogenen Formel bleibt jedoch theoretisch unbegründet. Die Einführung der Funktion $f(BD)$ ist daher als ein typischer Fall dafür anzusehen, wie eine Theorie gegenüber empirischen Prüfungen immunisiert werden kann. Ob dem angegebenen Verlauf der Funktion $f(BD)$ über die speziellen Experimente hinaus Erklärungswert zukommt, ist zumindest fraglich.

2.2. Modellstruktur, Optimalbasis und Branche

Die in verschiedenen Branchen formulierten LP-Modelle sind unterschiedlich dicht besetzt. Insbesondere werden in der (petro-) chemischen Industrie, die zu den Hauptanwendern der LP zählt, oft sehr dünn besetzte Modelle (mit $BD < 1 \%$) formuliert. Im Gegensatz dazu sind Modelle für die mechanische Fertigung meist dicht (mit $BD > 20 \%$) besetzt (Vgl. z.B. [4, S. 108]). Der im vorigen Abschnitt dargestellte Sachverhalt wirft daher die Frage auf, ob der Anteil der Schlupfvariablen in der Optimalbasis und damit die "Lösungsmenge" als branchenspezifisch angesehen werden kann.

Während in der (petro-) chemischen Industrie die Nebenbedingungen von Programmplanungsmodellen oft in Gleichungsform vorliegen, überwiegen in der Metallindustrie Ungleichungen. Ein erster Grund dafür liegt im unterschiedlichen Ausmaß der Verwendung von Mengenbilanzen, ein zweiter in den technischen Gegebenheiten dieser Branchen. Die erste dieser Ursachen wird im folgenden, die zweite im Abschnitt 2.3. diskutiert.

Die in der (petro-) chemischen Industrie auftretenden Flüsse werden in der Regel durch als Mengenbilanzen bezeichnete Nebenbedingungen abgestimmt. Mengenbilanzen setzen die von einem Gut durch Produktion, Fremdbezug, Lohnarbeit oder Lagerabbau bereitgestellten Mengen den durch Weiterverarbeitung, Absatz, Vernichtung (unerwünschter Kuppelprodukte) oder Lageraufbau verwendeten Mengen gleich [vgl. etwa 8, S. 91 ff]. Werden diese Handlungsmöglichkeiten als Variablen des LP-Modells definiert, so ergibt sich als Element des Beschränkungsvektors $b_k = 0$.

In der Literatur werden insbesondere für Probleme der mechanischen Fertigung zwei alternative Formulierungsmöglichkeiten gegenübergestellt (vgl. z. B. [5, S. 249 ff; 7, S. 179 ff; 13; 15, S. 29 ff]): Der "Arbeitsgangansatz" definiert als Variablen die Arbeitsgänge zur Herstellung der einzelnen Güter und stimmt die bereitgestellten und verwendeten Mengen der (halbfertigen und fertigen) Teile durch

Mengenbilanzen ab. Die sich so ergebende Formulierung ist (unabhängig von der Branche) überaus dünn besetzt. Sie erfordert jedoch in der Metallindustrie zehntausende Mengenbilanzen (vgl. [14, S. 51]) und ist daher mit der in praktischen Anwendungen fast ausschließlich eingesetzten Standard-Software unlösbar. Aus diesem Grund wird eine zweite, verdichtete Formulierung empfohlen, die ohne Mengenbilanzen auskommt. Die dafür u.a. verwendete Bezeichnung "Variantenverfahren" [9, S. 114 ff] weist darauf hin, daß dabei für jede mögliche Herstellungsvariante eines Endproduktes eine Strukturvariable zu definieren ist. Bei Vorliegen umfangreicher Verfahrenswahlmöglichkeiten können in diesem Ansatz sehr viele Variablen notwendig sein. Diese zweite Formulierung ist durch eine hohe Dichte gekennzeichnet.

In [8] wird gezeigt, daß die beiden in der Literatur verglichenen Formulierungen nur zwei von sehr vielen Möglichkeiten darstellen. Ursache dafür ist, daß Mengenbilanzen vor der Optimierung sequentiell eliminiert werden können; existieren im Arbeitsgangansatz K Mengenbilanzen, so sind 2^K Formulierungen möglich. Diese Zahl ergibt sich, weil jede Mengenbilanz entweder vorhanden oder eliminiert sein kann. Die Formulierungen sind in dem Sinne äquivalent, daß aus ihnen (durch Einsatz eines Report Writers) identische Optima abgelesen werden können. Sie unterscheiden sich in der Zeilen- und Spaltenzahl sowie der Dichte, die mit der Eliminierung von Mengenbilanzen in aller Regel steigt.

In der (petro-) chemischen Industrie treten typischerweise weniger Rohstoffe, Zwischen- und Endprodukte als in der Metallindustrie auf. Daher können für Unternehmungen der erstgenannten Branche LP-Formulierungen verwendet werden, die mit Mengenbilanzen operieren und somit sehr dünn besetzt sind. Auch für diese Branche sind aber nach (teilweiser) Eliminierung der Mengenbilanzen LP-Modelle mit geringerer Zeilenzahl und höherer Dichte denkbar: Tabelle 1 veranschaulicht die Strukturen einiger LP-Formulierungen für eine von Meyer/Steinmann [12, S. 361 ff] betrachtete Raffinerie. Die Ableitung dieser Formulierungen wird in [8, S. 208 ff] beschrieben;

die Unterschiede gegenüber den dort genannten Zahlen erklären sich daraus, daß hier zur besseren Vergleichbarkeit explizite Variablengrenzen ("Lower" und "Upper Bounds") als reguläre Nebenbedingungen gezählt werden.

Alle äquivalenten Formulierungen sind (bei Ausschluß degenerierter Optima) dadurch gekennzeichnet, daß dieselbe Zahl von Nebenbedingungen als Ungleichungen erfüllt ist. In den Optimallösungen der äquivalenten Raffineriemodelle sind jeweils 13 Bedingungen als Ungleichungen erfüllt, was für A_s die in Tabelle 1 ausgewiesenen Werte ergibt.

Werden nur in Gleichungsform definierte Mengenbilanzen eliminiert, so stimmt die Zahl der in der Basis befindlichen Schlupfvariablen in allen Formulierungen überein. In dem Tabelle 1 zugrundeliegenden Beispiel wurden jedoch auch in Ungleichungsform definierte Nebenbedingungen k der Form

$$\sum_j a_{kj} x_j \geq 0$$

eliminiert. Aus diesem Grund wird in den verdichteten Formulierungen die Nichtausnutzung von Obergrenzen teilweise über Strukturvariablen dargestellt. Spalte SV der Tab. 1 zeigt, daß bei formaler Betrachtung die Zahl der in der Optimalbasis befindlichen Schlupfvariablen SV kleiner sein kann als die Zahl der nicht in Gleichungsform erfüllten ursprünglichen Nebenbedingungen (hier:13). Der zu SV gehörende Anteil der positiven Schlupfvariablen an der Zeilenzahl wird in Tab. 1 unter $\hat{A}_s$ angegeben.

m	n	w	BD	A_s	SV	$\hat{A}_s$
74	76	327	5,8	0,176	13	0,176
32	34	210	19,3	0,406	13	0,406
30	32	226	23,5	0,433	13	0,433
26	32	307	36,9	0,500	13	0,500
21	116	1379	56,6	0,619	11	0,524
20	240	3079	64,1	0,650	10	0,500

Tabelle 1: Mögliche Strukturen äquivalenter LP-Modelle und der zugehörigen Optimalbasen für eine von Meyer/Steinmann [12, S. 361 ff] betrachtete Raffinerie

- 8 -

Diese Überlegungen zeigen, daß für die Produktionsprogrammplanung unabhängig von der betrachteten Branche mehrere Formulierungen existieren, die sich im Anteil der Schlupfvariablen in der Optimalbasis unterscheiden. Dieser Anteil hängt daher von der gewählten Formulierung ab und kann entgegen den in der Literatur angestellten Überlegungen zunächst nicht als branchenspezifisches Phänomen angesehen werden.

2.3. Zwangslauffertigung, Optimalbasis und Branche

In der (petro-) chemischen Industrie ist die Anzahl der Betriebsmittelgruppen, die aus technischen Gründen voll ausgelastet werden müssen, höher als in der Metallindustrie. Diese Zwangslauffertigung führt dazu, daß Kapazitätsbedingungen Gleichungsform annehmen. In derartigen Nebenbedingungen werden statt Schlupfvariablen künstliche Variablen definiert, die in allen zulässigen Lösungen Null und (in einem primal nichtdegenerierten Optimum) außerhalb der Basis sein müssen. Daher können sich in Modellen der (petro-) chemischen Industrie tatsächlich weniger Schlupfvariablen in der Basis befinden als in gleich strukturierten Modellen der Metallindustrie. Dies ist jedoch auf technische Gegebenheiten und nicht auf die unterschiedliche Dichte der Programmplanungsmodelle zurückzuführen!

3. Die Zahl der Schlupfvariablen in der Optimalbasis - ein Akzeptanzproblem?

3.1. Mögliche Ursachen für Akzeptanzprobleme

In der Literatur wird behauptet, daß Entscheidungsträger oft Lösungen ablehnen, in denen sich sehr viele Schlupfvariablen in der Optimalbasis befinden [1, S. 12 f; 2, S. 57 f; 4, S. 5; 6, S. 17 ff; 11, S. 198 f]. Hier wird nach der Rationalität einer derartigen Verhaltensweise auch im Hinblick darauf gefragt, daß positive Werte von Schlupfvariablen als Anstoß zur Typenbereinigung durchaus von Interesse sein können.

Wird die Optimallösung eines linearen Programmes nicht akzeptiert, so wurden offenbar Ziele, Handlungsmöglichkeiten und/oder Restriktionen, die für die Entscheidung wesentlich sind, in diesem Modell nicht hinreichend berücksichtigt. Schlupfvariablen könnten in der Optimalbasis insbesondere deshalb unerwünscht sein, weil unter langfristigen Gesichtspunkten ein breites Produktionsprogramm angestrebt wird oder weil leerstehende Betriebsmittelgruppen im Hinblick auf die Beschäftigung einer Stammbesatzung unerwünscht sind.

3.2. Ansätze zur Beseitigung möglicher Akzeptanzprobleme

3.2.1. Die Errechnung breiterer Produktionsprogramme

3.2.1.1. "Lösungsmenge" und Breite des Produktionsprogrammes

Während in einer Arbeitsgangformulierung das vollständige Produktions- und Beschaffungsprogramm aus dem Optimaltableau abgelesen werden kann, müssen diese Informationen bei Verwendung einer verdichteten Formulierung im Anschluß an die Optimierung aus den Werten der in dieser Formulierung auftretenden Variablen berechnet werden [vgl. etwa 15, S. 52 f]. Die Breite von Produktionsprogrammen ist selbstverständlich unabhängig von der gewählten LP-Formulierung; für diesbezügliche Aussagen dürfen daher jedenfalls nur die für Endprodukte definierten Strukturvariablen herangezogen werden. Ungelöst bleibt dabei aber das Problem,

daß bei Verfahrenswahlmöglichkeiten ein Endprodukt durch mehrere Strukturvariablen in der Optimalbasis repräsentiert sein kann. Daher stellt die Zahl der positiven Strukturvariablen kein aussagefähiges Maß für die Breite des Produktionsprogrammes dar.

3.2.1.2. Methoden zur Erreichung breiterer Produktionsprogramme

Zur Erreichung breiterer Produktionsprogramme wird in der Literatur vor allem ein Verfahren der proportionalen Reduzierung von Prozeßniveaus vorgeschlagen [1, S. 14 f; 2, S. 60 f; 6, S. 178 ff]. Dabei werden die in der i -ten Optimierung ausgewiesenen Werte der Strukturvariablen mit einem Faktor $0 < f < 1$ gekürzt und für alle weiteren Läufe auf Null fixiert. Die nach der Kürzung freien Kapazitäten stehen für den $(i+1)$ -ten Optimierungslauf zur Verfügung. Die im letzten Lauf errechneten Werte der Strukturvariablen bleiben ungekürzt. Das Produktionsprogramm ergibt sich so, daß die in den einzelnen Läufen errechneten Optimalwerte der Strukturvariablen addiert werden.

Durch diese Vorgangsweise übersteigt die Zahl der positiven Strukturvariablen oft die Zeilenzahl m . Das Verfahren kann jedoch zu ökonomisch unplausiblen Ergebnissen führen. Möglicherweise werden manche Produkte in unterschiedlichen Herstellvarianten erzeugt, ohne daß die Kapazitätssituation dies erfordert. Die Auswirkungen unterschiedlicher Reduzierungsfaktoren bzw. einer verschiedenen Anzahl an Läufen sind schwer abschätzbar. Für den Anwender wird bei dieser Vorgangsweise nicht ersichtlich, warum Optimierungsmethoden eingesetzt werden sollen. Die mit dem Verfahren implizit verfolgten Ziele werden im Algorithmus nicht deutlich. Daher muß befürchtet werden, daß mit dieser Methode eher zusätzliche Akzeptanzprobleme entstehen als bestehende Akzeptanzprobleme gelöst werden. Aus diesem Grund werden im folgenden alternative Vorgangsweisen betrachtet.

Definiert man die Breite eines Produktionsprogrammes durch die Zahl der produzierten Endprodukte, so können Untergrenzen U für die Programmbreite so berücksichtigt werden, daß für jedes Endprodukt eine Binärvariable $u_{\tilde{j}}$ vorgesehen und Nebenbedingungen

$$\sum_{j=\tilde{j}}^{\tilde{j}} x_j - l_{\tilde{j}} u_{\tilde{j}} \geq 0$$

(3)

$$\sum_{\tilde{j}} u_{\tilde{j}} \geq U$$

ergänzt werden. Darin ist $l_{\tilde{j}}$ eine (möglicherweise sehr kleine, bedingte) Untergrenze für die gegebenenfalls mit verschiedenen Herstellvarianten $x_{\hat{j}}, \dots, x_{\tilde{j}}$ berücksichtigte Produktion eines Endproduktes. Die Ergänzung (3) kann den Rechenaufwand zur Lösung des Problems erheblich erhöhen. Rechentechnisch einfacher ist es, für einzelne Produkte (unbedingte) Mindestmengen zu definieren. Der dagegen vorgebrachte Einwand, daß dies den Spielraum der Optimierung einengen | 1, S. 12; 2, S. 57; 6, S. 16 | kann nicht akzeptiert werden: Ein gegenüber der ursprünglichen, nicht akzeptierten Lösung "breiteres" Produktionsprogramm erfordert in jedem Fall zusätzliche Restriktionen und damit "Einengungen". In beiden Fällen ist allerdings zweifelhaft, ob mit vielen, in überwiegend kleinen Mengen $l_{\tilde{j}}$ angebotenen Produkten wirklich die Vorteile verbunden sind, die einem breiten Produktionsprogramm zugeschrieben werden.

3.2.2. Methoden zur Erreichung höherer Kapazitätsauslastungsgrade

Sollen in der Optimallösung mindestens r Betriebsmittelgruppen ausgelastet sein, so kann dies mit zusätzlichen Binärvariablen und Nebenbedingungen erreicht werden. Zunächst formt man die ursprünglichen Nebenbedingungen

$$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$$

durch Ergänzung expliziter Stillstandsvariabler y_i zu

$$\sum_j a_{ij}x_j + y_i = b_i$$

um. Positive Werte der Binärvariablen u_i lassen über die Nebenbedingungen

$$y_i - b_i u_i \leq 0$$

zu, daß die Anlage i nicht voll ausgelastet wird; insgesamt dürfen höchstens U Anlagen nicht voll ausgelastet werden:

$$\sum_i u_i \leq U.$$

Eine derartige Umformulierung kann erhebliche rechentechnische Nachteile mit sich bringen. Im Hinblick auf die Beschäftigung einer Stammbeflegschaft ist überdies weniger die Zahl der in der Optimalbasis befindlichen Schlupfvariablen als die Summe ihrer Werte von Bedeutung. Höhere Auslastungsgrade der Beflegschaft lassen sich im LP-Modell so erreichen, daß die Zielfunktion in (1) zu

$$\sum_j c_j x_j - \sum_i d_i y_i \rightarrow \max! \quad (4)$$

modifiziert wird. Dabei geben die $d_i \geq 0$ den Nutzen der Auslastung der Betriebsmittelgruppe i pro ZE in der Dimension der ursprünglichen Zielfunktion an.

Man könnte auch daran denken, die Abweichungen y_i von der vollen Auslastung der Kapazitäten b_i und die Abweichung

$$v = C^* - \sum_j c_j x_j$$

vom Maximum der ursprünglichen Zielgröße C^* im Rahmen eines "goal-programming"-Ansatzes mit der Zielfunktion

$$g \cdot v + \sum_i h_i y_i \rightarrow \text{Min!} \quad (5)$$

zu verknüpfen. Wie man sich leicht überlegt, führen (4) und (5) für $g = 1$ und $h_i = d_i$ zu übereinstimmenden Lösungen.

Wird die Angabe der in (4) bzw. (5) erforderlichen Gewichte als zu schwierig empfunden, so können durch Veränderung des in der zusätzlichen Nebenbedingung

$$\sum_i d_i y_i = Y \quad (6)$$

definierten Parameters Y für

$$0 \leq Y \leq Y^* = \sum_i d_i y_i^* = \sum_i d_i (b_i - \sum_j a_{ij} x_j^*)$$

jene Lösungen errechnet werden, die im Hinblick auf beide Zielvorstellungen effizient sind. Y^* ist als Summe der gewichteten Leerkapazitäten in der ursprünglichen, nicht akzeptierten "Optimallösung" x^* die Obergrenze für die Veränderung des Parameters. Bei dieser Vorgangsweise muß im LP-Modell zwar in (6) die Nichtausnutzung verschiedener Kapazitäten zueinander, nicht aber im Vergleich mit der ursprünglichen Zielgröße bewertet werden. Oft wird dabei $d_i = 1 \forall i$ sein. Eine Verwendung der einzelnen y_i als Parameter würde die Vorgangsweise und die Ergebnisse zu unübersichtlich machen.

Die parametrische Programmierung zeigt den "Trade-off" zwischen der ursprünglichen Zielgröße und (gewichteten) Kapazitätsauslastungen. Diese Information macht die mit verschiedenen Auslastungsgraden verbundenen Konsequenzen deutlich und ist damit ein Hilfsmittel zum Auffinden von Zielkompromissen. Durch die

Entscheidung für eine bestimmte Kompromißlösung erübrigt sich die explizite Angabe von Zielgewichten.

Die hier vorgeschlagenen Verfahren besitzen gegenüber der proportionalen Reduzierung von Prozeßniveaus den Vorteil, daß sie durch die Theorie der Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung begründet werden können. Aus den diskutierten Verfahren ist die parametrische Programmierung unter Akzeptanzgesichtspunkten hervorzuheben.

Literatur

1. Berr U (1974) Produktionsprogrammplanung mittels linearer Optimierung in der Metallindustrie.
Proceedings in Operations Research 4, hrsg. von
H.-J. Zimmermann, A. Schub, H. Späth, J. Stoer,
Physica-Verlag, Würzburg Wien: 11 - 21
2. Berr U (1975) Über die Praxis der linearen Optimierung zur
Produktionsprogrammplanung in der Metallindustrie.
Industriewirtschaft in Theorie und Praxis, hrsg.
von J. Hentze, M. Herbst, H. Anschütz.
Beuth-Verlag, Berlin Köln Frankfurt/M: 55 - 70
3. Berr U, Hatje H-J, Hinz W (1979) Zur Anzahl der Schlupf-
variablen in der Optimallösung bei der linearen
Optimierung. OR Spektrum 1: 135 - 137
4. Hinz W (1977) Beschränkung der Strukturvariablenanzahl in
der Optimallösung bei der Anwendung der linearen
Optimierung. Diss. TU Braunschweig
5. Jacob H (1962) Produktionsplanung und Kostentheorie. Zur
Theorie der Unternehmung, hrsg. von H. Koch, Gabler-
Verlag, Wiesbaden: 205 - 268
6. Kiesel GH (1971) Probleme bei der praktischen Anwendung der
Linearen Optimierung für die Produktionsprogramm-
planung in der Metallindustrie. Diss. TU Braun-
schweig
7. Kilger W (1973) Optimale Produktions- und Absatzplanung.
Westdeutscher Verlag, Opladen
8. Knolmayer G (1980) Programmierungsmodelle für die Produktions-
programmplanung, Ein Beitrag zur Methodologie der
Modellkonstruktion. Birkhäuser Verlag, Basel Boston
Stuttgart

9. Kruschwitz L (1971) Eigenerzeugung oder Beschaffung? Eigenverwendung oder Absatz? Erich Schmidt Verlag, Berlin
10. Kuhn AW, Quandt RE (1963) An Experimental Study of the Simplex Method. Proceedings Symposia in Applied Mathematics 15, New York: 107 - 124
11. Liesegang G (1980) Aggregation bei linearen Optimierungsmodellen - Beiträge zur Konzipierung, Formalisierung und Operationalisierung, Köln
12. Meyer M, Steinmann H (1971) Planungsmodelle für die Grundstoffindustrie. Physica Verlag, Würzburg Wien
13. Müller-Merbach H (1971) Bestimmung optimaler Produktionsprogramme bei mehrstufiger Fertigung. Werkstatttechnik-Zeitschrift für industrielle Fertigung 61: 19 - 22
14. Scheer A-W (1976) Produktionsplanung auf der Grundlage einer Datenbank des Fertigungsbereichs. Oldenbourg-Verlag, München Wien
15. Wiggert H (1972) Programmoptimierung im Maschinenbau mit Hilfe der linearen Planungsrechnung. Beuth-Vertrieb, Berlin Köln Frankfurt am Main