

Delfau, Emiliano

Working Paper

Métodos de estimación de curvas de rendimiento cupón cero en Argentina

Serie Documentos de Trabajo, No. 623

Provided in Cooperation with:

University of CEMA, Buenos Aires

Suggested Citation: Delfau, Emiliano (2017) : Métodos de estimación de curvas de rendimiento cupón cero en Argentina, Serie Documentos de Trabajo, No. 623, Universidad del Centro de Estudios Macroeconómicos de Argentina (UCEMA), Buenos Aires

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/176596>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Finanzas

**MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE CURVAS DE
RENDIMIENTO CUPÓN CERO EN ARGENTINA**

Emiliano Delfau

Noviembre 2017
Nro. 623

www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding <jae@cema.edu.ar>

Métodos de Estimación de Curvas de Rendimiento Cupón Cero en Argentina

Emiliano Delfau*

*Universidad del CEMA,
Doctorando en Finanzas,
Argentina*

Noviembre 2017

Resumen

El objetivo del presente trabajo es realizar un análisis comparativo entre la metodología comúnmente utilizada por los agentes del mercado local en lo referido a la estimación de Curvas de Rendimiento Cupón Cero (también conocidas como Estructuras Temporales de Tasa de Interés o ETTI), mediante la metodología de estimación de líneas de tendencias logarítmicas respecto a las YTM (*Yield to Maturity*) o TIR (Tasa Interna de Retorno) de un grupo o conjunto de títulos que comparten ciertas características y el desarrollo metodológico de Curvas de Rendimiento Cupón Cero mediante la implementación de un modelo paramétrico denominado Nelson y Siegel (NS). En los siguientes capítulos se abordarán ambas metodologías presentándose las ventajas y desventajas de cada una y sus ámbitos de aplicación. Para esto se tomarán los títulos públicos ajustados por CER a modo de ejemplo práctico dado que éstos presentan una estructura de *cash flows* compleja. El resultado del presente trabajo empírico arroja evidencias ampliamente favorables hacia la implementación del modelo paramétrico de NS. Esta conclusión se fundamenta tanto en las propiedades intrínsecas de la metodología de NS como en las desventajas de la utilización de YTM para extrapolar directamente una curva de rendimientos y, fundamentalmente, en los resultados obtenidos entre la diferencia (error) obtenida entre los precios estimados o teóricos por cada metodología y los precios de mercado.

Palabras Claves: renta fija, estimación de estructura temporal de tasas de interés, estimación de curvas de rendimiento Cupón Cero, Nelson y Siegel.

Modelos de estimación de curvas

Curva TIR o YTM

Por definición, la YTM o simplemente TIR, es la tasa de retorno que obtendríamos si mantuviésemos un título hasta su vencimiento, es decir, toma en cuenta el flujo restante del activo hasta su vencimiento. Dicha tasa es estimada mediante la sumatoria de descuento de todos los flujos futuros de manera tal que éstos igualen el precio de mercado vigente.

Si bien la YTM o TIR es ampliamente aceptada y utilizada en todos los ámbitos de finanzas, su estimación conlleva algunas debilidades. Más precisamente podemos encontrar dos supuestos principales subyacentes en su cálculo. El primero es que la YTM asume que cada cupón será reinvertido a dicha tasa cuando, en contraposición, es sabido que en la práctica las tasas varían diariamente. El segundo supuesto implícito de la YTM queda en manifiesto en su construcción, dado que la misma asume la tenencia del título hasta su vencimiento. Esta situación deriva en el hecho de no contemplar implícitamente el riesgo de reinversión. Solamente los tenedores de títulos cupón cero evitan este tipo de riesgo, dado que no existe pago de cupón durante la vida del activo. Asimismo existe una tercer debilidad en esta unidad de medida de rentabilidad dado que esta tasa de rentabilidad no distingue entre diferentes estructuras o esquemas de pagos, esto es: un título con bajo nivel de cupones paga una porción más alta de sus *cash flows* a fechas más tardías que un título con un alto nivel de cupones con misma madurez. La curva asume una misma estructura de pagos o cupones para todos los bonos. Por lo tanto, en este caso, los flujos no son descontados a una tasa apropiada para el bono dentro del grupo de títulos.

* Las opiniones vertidas en este trabajo son personales del autor y no reflejan necesariamente los puntos de vista de la UCEMA o CEBaFi. Comentarios son bienvenidos en: emiliano.delfau@hotmail.com

La relación existente entre la tasa de interés y distintas fechas futuras en el tiempo se la denomina comúnmente Estructura Temporal de Tasas de Interés (ETTI). No obstante las debilidades antes mencionadas, la estimación de ETTIs mediante la interpolación o tendencia logarítmica de YTM o TIR de un grupo determinado de títulos con pago de cupones (seleccionados por tipo de subyacente o clase) es comúnmente utilizadas en el mercado local tal como se muestra en la Figura 1.

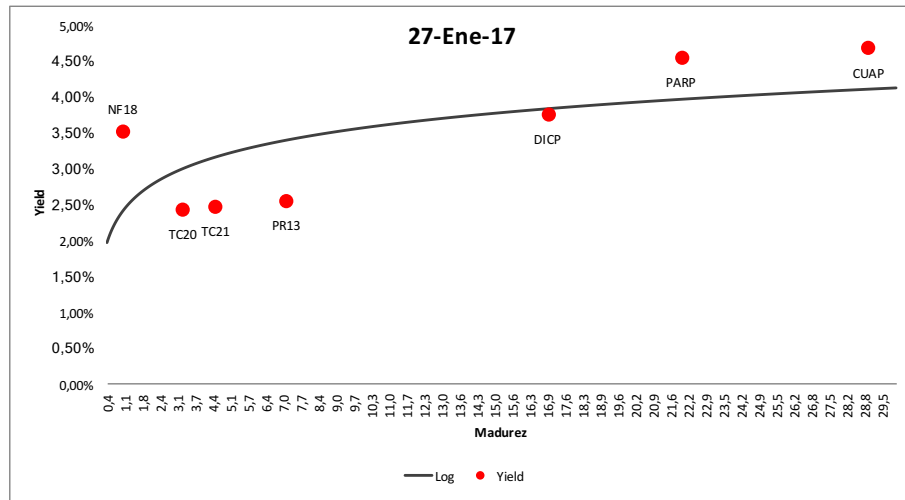


Figura 1: Estimación Curva YTM (tendencia logarítmica)

Curva de Rendimiento Cupón Cero

Un instrumento cupón cero es aquel que paga a vencimiento su capital e interés, es decir, no presenta pago de cupones intermedios. La ventaja de esta estructura de títulos es que su tasa de retorno no presenta ninguna de las debilidades de la TYM antes mencionadas al momento de construir una ETTI. Esto se debe principalmente a las características de los bonos tipo cupón cero. Es decir, si contásemos con suficientes títulos en cada momento de tiempo futuro, los mismos podrían proporcionar una tasa de interés “implícita” que sería consistente con los precios de mercado de los activos valuados (bonos) o, de manera equivalente, se podría construir una especie de curva *benchmark* de tasas de mercado que nos permitiría hallar el precio subyacente de cualquier activo financiero que pueda ser descontado a esa tasa.

Dado que los títulos cupón cero no son comúnmente observables en el mercado de deuda soberana, se requieren modelos estadísticos o econométricos para su estimación, es decir, partiendo de un título con pago de cupones en diferentes momentos de tiempo, el precio de mercado (o precio subyacente) puede estimarse mediante la suma de los valores presentes de esos flujos, cada uno descontado a la tasa de interés cupón cero asociada a su plazo a vencimiento. El Cuadro 1 nos muestra esta equivalencia. En las columnas “TIR” y “VP (TIR)” observamos un título descontado a su TIR, mientras que en las columnas tituladas “ETTI Spot” y “VP (ETTI)” utilizamos el mismo flujo de fondos pero esta vez descontado a diferentes tasas cupón cero obteniendo el mismo precio o valor (asumiendo que el valor presente del título es equivalente al precio de mercado).

Vencimiento (años)	Cash-Flow (cupón 6 %)	TIR	VP (TIR)	ETTI Spot	VP (ETTI)
1	\$6,00	4,98 %	\$5,72	4,50 %	\$5,74
2	\$6,00	4,98 %	\$5,44	4,75 %	\$5,47
3	\$6,00	4,98 %	\$5,19	4,85 %	\$5,21
4	\$106,00	4,98 %	\$87,28	5,00 %	\$87,21
Suma			\$103,62		\$103,62

Cuadro 1: Bondad de ajuste del modelo

Para poder resolver el problema de extraer de manera correcta diferentes tasas cupón cero en diferentes vencimientos y poder construir una curva para cualquier momento de tiempo partiendo de títulos con pago de cupones intermedios, los investigadores han avanzado mediante técnicas econométricas. Los enfoques más conocidos se encuentran descritos en los trabajos de McCulloch (1971, 1975)[1][2], Schaefer (1981)[3], Nelson y Siegel (1987)[4], Deacon y Derry (1994)[5], Adams y Van Deventer (1994)[6] y Waggoner (1997)[7]¹

¹Moorad Choudhry (2007)[8]

La curva ETTI es de especial importancia para inversores, instituciones financieras (privadas o gubernamentales) y bancos centrales dado que la misma es una representación gráfica que explica la relación entre los distintos activos (títulos de deuda soberana) y sus vencimientos. Por lo tanto puede emplearse para valorar instrumentos de inversión de carteras o renta fija, es decir, hallar el precio subyacente de cualquier tipo de activo financiero. Por ejemplo, puede utilizarse como parámetro (o método de estimación) al momento de realizar estimaciones del tipo *mark to model*². Es decir, si se modela un bono como una serie de flujos de fondos en diferentes puntos del tiempo, entonces el precio subyacente puede estimarse mediante la suma del valor presente de cada uno de los flujos descontados a la tasa de interés del tipo cupón cero que corresponda con su plazo a vencimiento.

La comprensión y entendimiento de curvas de rendimiento es especialmente importante para los participantes de mercado de capitales de emisión de deuda y aún más importante para la Gestión de Activos y Pasivos de entidades financieras o ALM³. Es decir, los bancos enfrentan riesgos inherentes a su actividad dentro de los cuales se encuentran fundamentalmente el riesgo de tasas de interés y el riesgo de crédito. El primero de estos, es una medida explícita del costo de tomar dinero prestado y está embebido directamente en la curva de rendimiento. Por esto, para las entidades financieras, comprender el comportamiento y las propiedades de la curva de rendimiento se torna una parte esencial del proceso de ALM. A continuación se presentan algunas de las razones por las cuales esto es así:

- Los cambios en las tasas de interés tienen un impacto directo en los ingresos/rentabilidad bancarios; la curva de rendimiento captura el estado actual de las tasas de interés (tasas *spot*), y también presenta la expectativa actual del mercado de tasas de interés futuras (tasas *forward*);
- El *gap* de tasa de interés refleja el estado de fondeo y préstamos de las entidades financieras; estos *gaps* a lo largo de la estructura temporal de rendimiento son sensibles ante cambios de curvatura y pendiente de la misma;
- La estrategia comercial actual y futura, incluyendo la asignación de activos y la decisión de políticas de crédito, tendrá impacto directo sobre la exposición al riesgo de tasa de interés y, por lo tanto, deberá tener en cuenta la forma y el comportamiento de la curva de rendimiento.

Finalmente, cabe señalar que las últimas crisis financieras han puesto en evidencia la necesidad de mejorar significativamente la gestión de riesgos de las entidades financieras por el mismo hecho de que este tipo de actividad conlleva un riesgo inherente significativo. Es por eso que a partir de la década del 90 el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria (BIS) implementó varios requerimientos de capital por riesgo de mercado y riesgo de tasa de interés. Más precisamente las últimas modificaciones presentadas: “*STANDARS - Interest rate risk in the banking book*” abril 2016 y “*STANDARS - Minimum capital requirements for market risk*” enero 2016, presentan como condición necesaria la estimación de curvas de rendimiento a modo de poder estimar dichos riesgos.

Particularmente el modelo paramétrico de Nelson y Siegel⁴ (NS) ha ganado mucha popularidad en los últimos años, no solo en el ámbito académico sino también en el ámbito de aplicación financiera. Por ejemplo el Banco Central Europeo publica curvas *spot* diariamente mediante esta metodología⁵. La FED publica la *US treasury yield curve* desde 1961⁶. Otros bancos centrales que la utilizan son los de Alemania, Bélgica, España, Finlandia, Francia, Italia y Suiza, entre otros. También es aplicada en el mercado de LIBOR. Parte de su utilidad y popularidad radica principalmente en las propiedades financieras de sus parámetros. Los mismos permiten capturar las tendencias de la curva de mercado, típicamente en cuestiones de política monetaria. Además, permite analizar la existencia de bonos que se encuentran desarbitrados respecto de la curva teórica. Asimismo la utilización de ETTI con una frecuencia dada permite guardar historia de las tasas vigentes en cada plazo, lo que resulta fundamental para derivar cálculos de volatilidad de tasas y correlación entre tasas de distintos períodos. La única crítica teórica financiera planteada sobre el modelo de NS es que éste no se desarrolla bajo un enfoque de modelo de no-arbitraje. Sin embargo, varios trabajos han demostrado que el modelo se ajusta correctamente a los modelos sin arbitraje. La Figura 2 muestra la curva Spot NS para enero 2017 (mismo mes que la Figura 1)

²Se denomina “*mark to model*” a la estimación de precios sobre una inversión específica o portafolio basado en supuestos propios o modelos financieros. Se diferencia del método “*mark to model*” dado que dichos activos no poseen un mercado regular que provea un precio adecuado (suficiente volumen o liquidez).

³Comunmente denominado ALM por sus siglas en inglés *Asset and Liability Management*

⁴Ver Anexo metodológico Nelson y Siegel.

⁵<http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html>

⁶<http://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2006/200628/200628abs.html>

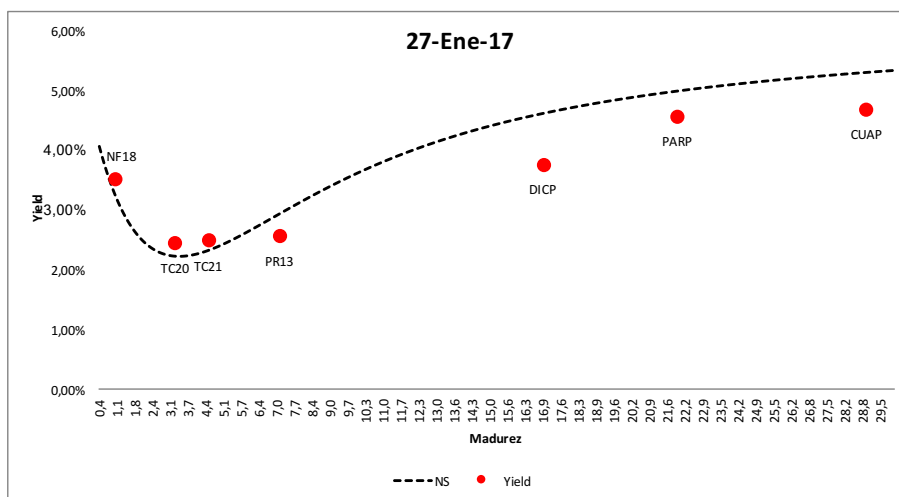


Figura 2: Estimación Curva Spot por NS

Si prestamos atención, la curva de la Figura 2 presenta un tipo particular de curva de rendimientos que se denomina *humped* o con “joroba”. Generalmente al observar curvas de rendimiento en diferentes mercados, podemos notar que las curvas de rendimiento pueden adoptar una de cuatro formas básicas. Estas son:

- *Normal*: presenta rendimientos a niveles “promedio” y la curva se inclina suavemente hacia arriba a medida que aumenta la madurez;
- *Ascendente o Positiva*: en la cual los rendimientos a corto plazo se encuentran en niveles históricamente bajos, presentando tasas de interés largas sustancialmente mayores que las tasas cortas;
- *Invertida o Negativa*: en la que los niveles de rendimiento a corto plazo son altos según los estándares históricos, pero los rendimientos de largo plazo son significativamente más bajos que las tasas de interés más cortas;
- *Joroba o Humped*: donde los rendimientos a corto plazo son altos (bajo) y la curva se eleva (baja) a un pico en el área de vencimiento o madurez de mediano plazo, y luego se inclina hacia abajo (arriba) a vencimientos más largos.

Análisis comparativo títulos CER

Como hemos mencionado anteriormente, el mercado argentino publica de manera frecuente ETTIs utilizando como parámetro las TIR o YTM de los títulos públicos de un mismo grupo (es decir, títulos ajustables por CER, Badlar, emitidos en dólares, etc.) mediante la estimación de una línea de tendencia logarítmica. El objetivo del presente trabajo es comparar los resultados obtenidos mediante la aplicación de este método común contra los resultados surgidos de la estimación por método paramétrico de NS mencionado anteriormente. La contrastación empírica abarca el período enero-agosto de 2017. Los precios de referencia son los suministrados por IAMC y su frecuencia es mensual. El análisis comparativo conlleva el siguiente proceso:

- Se toma como ejemplo práctico los títulos que ajustan por CER dado que éstos presentan una de las estructuras de *cash flows* más complejas.
- La estructura de deuda utilizada considera aquellos títulos con mayor volumen (en términos reales) y liquidez del mercado. Para dicho cálculo se estimaron los valores promedios de cada uno de los títulos ajustables por CER dentro del período de análisis. El resultado señala que el DICP fue operado en promedio un 45.88 %, mientras que el TC21 tuvo un volumen de operación promedio del 38.19 %, lo que arroja un total entre ambos de 84.06 %. El 15.91 % restante del volumen operado corresponde a los títulos PR13, TC20, NF18, CUAP y PARP. Mientras que, por su parte, los títulos NO20, DIP0, PAP0 tuvieron un escaso volumen (menos del 0.1 %) debido a la escasa participación del último grupo mencionado. Éste no fue tomado en consideración para el análisis (el Cuadro 2 resume los resultados).
- Se construyen los *cash flows* de cada uno de los títulos mencionados en función de las condiciones de emisión (prospectos) a modo de poder estimar los parámetros principales tales como TIR y valor presente. Dentro del grupo de títulos encontramos las siguientes agrupaciones posibles según sus características de emisión:

Especie	Volumen (%)
DICP	45,88
TC21	38,19
PR13	4,68
TC20	3,48
NF18	3,07
CUAP	2,45
PARP	2,23
NO20	0,02
DIP0	0,01
PAP0	0,00
TOTAL	100,00

Cuadro 2: Especies utilizadas

- Títulos con tasa cupón fija: Bocones: PR13. Bogar: NF18. Cuasipar: CUAP. Boncer: TC20 y TC21.
- Títulos con tasa de cupón *step-up*: Bonos Par: PARP. Bonos Descuento (Discount): DICP.
- Los esquemas de amortización son los siguientes:
 - Cuotas semestrales iguales: Bonos de Reestructuración de Deuda (DICP, PARP).
 - Cuotas mensuales no homogéneas: NF18, NO20 y PR13.
 - Total al vencimiento: TC20 y TC21.
- Se estiman las ETTIs bajo cada una de las metodologías presentadas, es decir: la línea de tendencia logarítmica (bajo el concepto de Curva YTM) y el modelo paramétrico de NS (bajo el concepto de Curva cupón cero).
- Una vez obtenidas las curvas se procede a estimar el precio teórico sugerido por cada uno de los modelos. Finalmente, los precios teóricos son contrastados contra los precios de mercado (IAMC) mediante dos estimadores de medidas de bondad de ajuste conocidas como RMSE y AABSE⁷

Conclusiones

El Cuadro 3 “Bondad de ajuste de los modelos” presenta los estimadores RMSE y AABSE (NS- y Log- hacen referencia al modelo de Nelson y Siegel y de estimación logarítmica respectivamente) sobre los precios de mercado y los precios teóricos de cada uno de los modelos. Podemos apreciar que los errores del modelo paramétrico de NS son significativamente menores que los del modelo logarítmico en todos los meses de análisis. El incremento relativo de error en el modelo de NS para los meses Marzo-Mayo corresponde principalmente al título PARP. En tal caso dada la estructura de vencimientos de éste, el mismo podría ser omitido, generando así un nivel de bondad de ajuste ampliamente superior.

Modelo	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto
NS-RMSE	1,87	1,11	7,30	5,18	4,90	0,54	0,70	2,66
Log-RMSE	30,15	32,00	50,12	39,26	23,50	19,81	27,33	27,68
NS-AABSE	1,22	0,88	4,84	3,10	3,17	0,38	0,57	2,17
Log-AABSE	18,57	19,22	31,75	25,77	13,13	11,95	17,07	18,42

Cuadro 3: Bondad de ajuste de los modelos

Dado los resultados de bondad de ajuste sobre los precios de los títulos que ajustan por CER del modelo de NS, las propiedades financieras de sus parámetros y las debilidades que conlleva la creación de curvas de rendimiento a partir de las YTM o TIR de títulos que pagan cupones, se logra convalidar que aun en mercados emergentes con poco volumen y condiciones no óptimas de eficiencias de mercado, es viable la implementación de modelos paramétricos como el de NS.

Finalmente, la Figura 3 “Comparación entre estimación Logarítmica y NS” nos otorga una apreciación visual sobre la bondad de ajuste de las curvas de rendimiento CER cupón cero estimadas para las distintas fechas.

⁷Por sus siglas en inglés: *root mean squared error* (RMSE) y *average absolute error* (AABSE).

Podemos observar como las curvas obtenidas mediante el modelo paramétrico de NS presentan las formas básicas antes mencionadas: *Normal*, *Ascendente o Positiva*, *Invertida o Negativa* y *Joroba o Humped* mientras que las curvas obtenidas por el método de estimación logarítmica solo pueden presentar las formas tradicionales del tipo *Positiva o Negativa* no pudiendo presentar cambios de curvatura como el tipo *Joroba o Humped*.

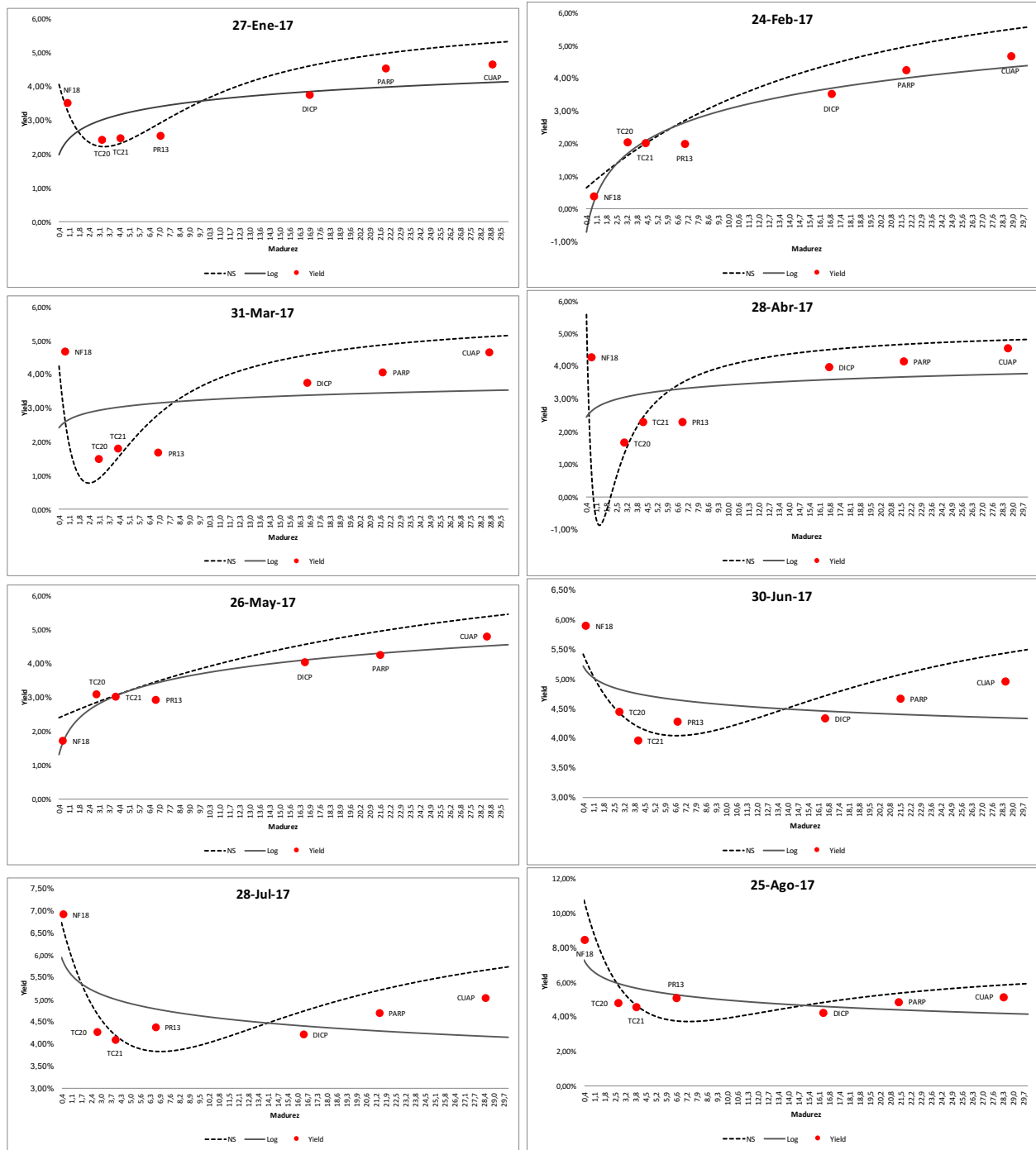


Figura 3: Comparación entre estimación Logarítmica y NS

Anexo

Estimación NS

[10] Antes de desarrollar el método de solución de NS introduciremos algunos conceptos básicos sobre renta fija y su notación asociada. Como ya hemos mencionado, existen dos tipos de títulos de renta fija, títulos a descuento y títulos con cupones. El primer tipo de inversión solo presenta un único pago a vencimiento, mientras que el segundo provee pagos periódicos fijos en el tiempo hasta su vencimiento. Para un título j con pago de cupones, denotaremos estos *cash flows* (incluyendo el pago a vencimiento) como c_{ij} y sus vencimientos asociados como m_{ij} . Para un grupo de títulos k sumaremos los pagos de cupón o *cash flows* y sus vencimientos asociados mediante la matriz $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$ y $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ respectivamente, con t filas y k columnas, con $i = 1, \dots, t$ y $j = 1, \dots, k$. El número de filas t es determinado por el número de cash flows o cupones del j -ésimo título con madurez más grande. Un elemento m_{ij} de $\mathbf{M}$ se refiere, por lo tanto, al tiempo de ocurrencia del *cash flow* o cupón (en años) sobre el i -ésimo cash flow del j -ésimo título. Los vencimientos de los cash flows m_j son agrupados en un vector fila $\mathbf{m} = \{m_{ij}\}$ de dimensión k .

La tasa *spot* de la ETTI $s(m_{ij})$ denota el interés pagado por un título a descuento (cupón cero) dado un vencimiento m_{ij} . Bajo rendimiento continuo y en ausencia de oportunidad de arbitraje el precio “justo” de un título a descuento o cupón cero p_j que paga con fecha m_j se encuentra dado por:

$$p_j = e^{-s(m_j)m_j} \quad (1)$$

La curva *spot* de la ETTI nos muestra las diferentes tasas a diferentes vencimientos. De esta relación también puede ser estimada la tasa *forward*.

Sobre cualquier título de renta fija j el mercado disponibiliza usualmente, la siguiente información: el precio “*clean*” p_j^c (como porcentaje del valor nominal), los *cash flows* c_{ij} (pago de cupones y pago final) y sus vencimientos m_{ij} . Cuando un inversor compra un título j , obtiene el derecho de recibir todos los flujos futuros. Si la compra ocurre en algún momento de tiempo entre dos pagos de cupones, el vendedor debe ser compensado por la fracción de tiempo transcurrida sobre el próximo cupón, llamado comúnmente interés corrido que denominaremos a_j . Dependiendo de la convención de contabilización de tiempo, es decir 30/360 o *Actual/360*, una forma típica de calcular el interés corrido es:

$$a_j = \frac{\text{tiempo transcurrido desde último pago de cupón}}{\text{tiempo transcurrido en cupón corriente}} \times c_{ij}$$

Por lo tanto, al precio de compra se lo denomina usualmente precio “*dirty*” p_j y es igual a la suma del precio de mercado “*clean*” p_j^c más el interés corrido a_j . Nuevamente sumaremos los precios “*clean*”, “*dirty*” y el interés corrido para un grupo de títulos como vectores fila k -dimensionales $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}^c$ y $\mathbf{a}$ donde $\mathbf{p} = \mathbf{p}^c + \mathbf{a} = \{p_j = p_j^c + a_j\}$. Considerando el interés corrido, de manera similar a (1), la ecuación de valuación de títulos para un bono j bajo rendimiento continuo es igual al valor presente de todos sus flujos futuros:

$$p_j^c + a_j = \sum_{i=1}^t c_{ij} \delta(m_{ij})$$

Donde $\delta(m_{ij})$ es el factor de “descuento” dada una madurez m_{ij} . Aplicando el concepto de tasa *spot* los factores de descuentos pueden ser expresados como $\delta(m_{ij}) = e^{-s(m_{ij})m_{ij}}$. La matriz $t \times k$ equivalente a $\mathbf{D} = \delta(m_{ij})$ representa todos los factores de descuento de un grupo de bonos. Por lo tanto la ecuación de valuación en notación matricial viene denotada por:

$$\mathbf{p} = \mathbf{1}^T (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$$

Donde “ $\cdot$ ” denota el operador de múltiplo interno de la matriz y $()^T$ la transpuesta de la matriz y “ $\mathbf{1}$ ” corresponde a un vector columna completo por números 1. Otra manera de expresar la ecuación de valuación es mediante la utilización de la tasa interna de retorno de los flujos. La YTM de un bono j es la solución y_j de la siguiente ecuación

$$p_j^c + a = \sum_{i=1}^t c_{ij} e^{-y_j m_{ij}}$$

Estaremos agrupando las YTM de un grupo de bonos en un vector fila k -dimensional denotado por $\mathbf{y} = \{y_j\}$. La YTM para un bono con descuento es igual a la tasa *spot*. Pero como ya hemos mencionado, ésto no es válido para títulos con pago de cupones. Graficar la YTM de títulos con cupones de vencimientos

diferentes no resulta en una curva de rendimiento que pueda ser utilizada para descontar todos los cash flows de cualquier otro título que no sea el que se esta valuando con esa YTM.

Para cuantificar la sensibilidad del precio de un bono ante cambios en la tasa de interés uno necesita considerar los pagos de cupones intermedios. Una medida de estándar de sensibilidad es la conocida (Macaulay) *duration* que calcula la madurez promedio de un bono utilizando el valor presente de todos sus cash flows como ponderadores. El vector k – *dimensional* d contiene la *duration* individual de cada título mediante:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{1}^T(\mathbf{C.M.D})}{\mathbf{1}^T(\mathbf{C.D})}$$

Donde la matriz de descuento $\mathbf{D}$ contiene los factores de descuento calculados por la YTM de cada título, es decir: $\delta(m_{ij}) = e^{-y_j m_{ij}}$ (la división se aplica por elemento de cada matriz).

El objetivo de estimación de una ETTI es poder extraer las tasas *spot*, *forwards* y de descuento para un grupo de títulos que pagan cupones. Los métodos más simples son los denominados “directos” como el de *bootstrapping*. Este tipo de método directo requiere títulos con *cash flows* casi idénticos en vencimientos y estructura. Por lo tanto se han desarrollado métodos indirectos denominados paramétricos. Denotaremos el vector que contiene los parámetros de dicho método mediante β . Dado que los títulos observados presentan errores idiosincráticos se define el precio “teórico” como:

$$\hat{p} = \mathbf{1}^T(\mathbf{C.D})$$

Por lo tanto la suma de precios de mercado de un grupo de bonos $\mathbf{p}$ puede ser expresada como la suma de precios “teóricos” de títulos $\mathbf{p}$ más un error idiosincrático ϵ . El vector de parámetros estimados β se obtiene mediante un proceso de optimización ponderado no convexo.

Los modelos paramétricos fueron introducidos por Nelson y Siegel (1987)[4] y luego fueron extendidos por Svensson (1994)[9], estos modelos “imponen” una forma funcional sobre la tasa *forward*, instantánea que captura la típica forma de “joroba”. El modelo de NS propone una función parsimoniosa para modelar la tasa *forward* instantánea al plazo n como una solución sobre una ecuación diferencial de segundo orden para el caso de raíces iguales:

$$f(m_{ij}, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \beta_0 + \left[\beta_1 + \beta_2 \left(-\frac{m_{ij}}{\tau} \right) \right] e^{\left(-\frac{m_{ij}}{\tau} \right)}$$

Resultando:

$$NS = s(m_{ij}, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - e^{\left(-\frac{m_{ij}}{\tau} \right)}}{\left(\frac{m_{ij}}{\tau} \right)} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{\left(-\frac{m_{ij}}{\tau} \right)}}{\left(\frac{m_{ij}}{\tau} \right)} - e^{\left(-\frac{m_{ij}}{\tau} \right)} \right] \quad (2)$$

- β_0 es el valor asintótico de la tasa *spot* a largo plazo;
- β_1 determina el grado de convergencia por el cual la función de la tasa *spot* se aproxima a su valor de largo plazo. La pendiente será negativa si $\beta_1 > 1$ y viceversa;
- β_2 determina el tamaño y la forma de la “joroba”. Si $\beta_2 > 0$ obtendremos una “joroba” en τ o t mientras que $\beta_2 < 0$ provocará una “joroba” del tipo U;
- τ determinan el momento en que se producirá la “joroba”.

Los elementos de la matriz de descuento $\mathbf{D}$ correspondientes a la función *spot* definida en (2) puede ser calculada mediante:

$$\delta(m_{ij}, \beta) = e^{-m_{ij} s(m_{ij}, \beta) / 100}$$

Los factores de descuento son no lineales en los parámetros por lo tanto la calibración del mismo requiere un método de mínimos cuadrados no lineal⁸ cuyo objetivo es minimizar las diferencias al cuadrado sobre los precios

⁸Por ejemplo el algoritmo Levenberg-Marquardt

del modelo y los precios de mercado.

Mínimos cuadrados ponderados y estimación paramétrica de óptimo global

Como ya mencionamos, el vector de parámetros desconocido de tasas *spot* $\hat{\beta}$, se obtiene mediante la minimización de errores entre los precios de mercado p y los precios teóricos $\hat{p}$. Sin embargo, minimizar los precios sin ponderar conlleva a que los títulos con mayor vencimiento obtengan un mayor peso, debido a un mayor grado de sensibilidad de precio, lo cual conduce a un ajuste menos preciso en el extremo corto de la curva. Por lo tanto, se debe introducir una ponderación de errores de precio para resolver este problema o al menos para reducir el grado de heterocedasticidad. Como señalan Martellini, Priaulet y Priaulet (2003)[11], la elección de los pesos es una parte crucial del procedimiento de optimización. En el trabajo se emplea el modelo de ponderación propuesto por Bliss (1997)[12] que se basa en la inversa de la duration. El peso w_j para un título j viene dado por:

$$w_j = \frac{d_j^{-1}}{\sum_{i=1}^k d_i^{-1}}$$

Para k títulos agrupamos los pesos individuales en un vector $k - dimensional$ denotado por ω . La consideración de los pesos nos lleva a la primera función objetivo, la cual minimiza la suma de los errores ponderados al cuadrado sobre los precios de los bonos con pago de cupón. La función objetivo $F(\beta)$ está dada por:

$$F(\beta) = (p - 1^T(C.D))^2 \omega^T$$

Para más detalle sobre el problema completo de optimización, las funciones objetivos y la derivación analítica del gradiente $\nabla F(\beta)$ de las mismas ver Ferstl y Hayden (2010)[10].

Referencias

- [1] McCulloch, J *Measuring the Term Structure of Interest Rates*, 1971. Journal of Business, 44, pp. 19–31.
- [2] McCulloch, J *The Tax-Adjusted Yield Curve*, 1975. Journal of Finance, 30, pp. 811–30.
- [3] Schaefer, S. *Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities*, 1981. Economic Journal, 91, pp. 415–38.
- [4] Nelson, C. and Siegel, A. *Parsimonious modeling of yield curves*, 1987. Journal of Business, 60(4), pp. 473–89.
- [5] Deacon, M. and Derry, A. *Estimating the Term Structure of Interest Rates*, 1994. Bank of England Working Paper Series, No. 24, July.
- [6] Adams, K. and Van Deventer, D. *Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness*, 1994. Journal of Fixed Income, 4, pp. 52–62.
- [7] Waggoner, D. *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*, 1997. Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta, 97–10.
- [8] Choudhry, Moorad *Bank Asset and Liability Management: Strategy, Trading, Analysis*, 2007. Wiley.
- [9] Svensson L. *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates*, 1994. Technical Reports 4871, National Bureau of Economic Research, Inc.
- [10] Ferstl, R., and Hayden, J. *Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc*, 2010. Journal of Statistical Software, 36(1), 1–34.
- [11] Martellini L, Priaulet P, Priaulet S. *Fixed-Income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*, 2003. John Wiley and Sons, Hoboken.
- [12] Bliss R. *Testing Term Structure Estimation Methods.*, 1997. Advances in Futures and Options Research, 9, 197–231.