ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Schütt, Klaus-Peter

Working Paper — Digitized Version

Unterstützung der Schätzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten durch formale Prozesse

Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 34

Provided in Cooperation with:
Christian-Albrechts-University of Kiel, Institute of Business Administration

Suggested Citation: Schütt, Klaus-Peter (1976) : Unterstützung der Schätzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten durch formale Prozesse, Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 34, Universität Kiel, Institut für Betriebswirtschaftslehre, Kiel

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/175380

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

INSTITUT FÜR BETRIEBSWIRTSCHAFTSLEHRE
DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT KIEL

PROFESSOR DR. KLAUS BROCKHOFF, PROFESSOR DR. REINHART SCHMIDT

Nr. 34

Unterstützung der Schätzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten durch formale Prozesse+

von

Klaus-Peter Schütt

Copyright beim Autor Mai 1976

+ Zwischenbericht für den Zeitraum Juli 1975 bis Mai 1976 zum gleichnamigen DFG-Forschungsprojekt

Gliederung: Seite

0. Übersicht 1

1. Einleitung 3

2. Verfahren zur Ermittlung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten 7

2.1. Allgemeine Bemerkungen und systematische Einordnung der Verfahren 7

2.2. Ausführungen zu den einzelnen Ansätzen 11

2.2.1. Direkte Methoden 11

2.2.2. Indirekte Methoden - Verfahren, die mit Vergleichen bzw. Präferenzen arbeiten 15

2.3. Ein erster Vergleich 27

3. Axiomensysteme zur Konstruktion subjektiver Wahrscheinlichkeiten 32

3.1. Intention beim Aufbau der Axiomensysteme 32

3.2. Erste Ansätze einer behavioristisch orientierten subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie 35

3.3. Die Theorie von Savage 36

3.3.1. Präferenzordnungen zwischen Entscheidungsakten und Ergebnissen 36

3.3.2. Die Einführung der qualitativen Wahrscheinlichkeitsordnung 40

3.3.3. Quantitative subjektive Wahrscheinlichkeiten 42

3.4. Weitere Systeme zur Konstruktion eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes 46

3.5. Zur Relevanz der Axiomensysteme in Entscheidungssituationen 52

3.5.1. Bemerkungen zu den verschiedenen Systemen 52

3.5.2. Die Postulate und das Verhalten der Entscheidungsträger 54

3.5.3. Implikationen der Axiomensysteme für die Ansätze zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten 56

4. Fazit und geplante Fortsetzung der Arbeit 60

Literaturverzeichnis 62

Abbildungsverzeichnis

		Seite
Abb. 1 :	Verfahren zur Abgabe von Wahrscheinlichkeitsurteilen	9
Abb. 2 :	Allgemeine Form einer Dichtefunktion	12
Abb. 3 :	Vergleich der Verfahren zur Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten	29

0 Übersicht

Die bisher durchgeführten Arbeiten befaßten sich gemäß dem im Projektantrag vorgelegten Arbeitsprogramm im wesentlichen mit den folgenden Themen:

(1) Zusammenstellung und Vergleich der verfügbaren Ansätze zur Schätzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten;

(2) Untersuchung und Konkretisierung der Einsatzbedingungen der Verfahren.

Zu (1): Bei der Bearbeitung des ersten Gebietes durch Literaturanalyse wurde eine Anzahl von Ansätzen zur Schätzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten gefunden, deren Autoren offenbar ohne Kenntnis voneinander arbeiteten. Die Fragestellung nach der Auswahl eines dieser Verfahren für eine spezielle Problemstellung erfordert deshalb zunächst einmal einen umfassenden Überblick über die vorhandenen Ansätze und ihre Systematisierung nach problemrelevanten Kriterien. In den meisten Fällen findet man weder bei der Beschreibung und Vorstellung von Verfahren Hinweise auf deren Überlegenheit vor anderen, noch wird bei den anwendungsorientierten Studien eine Begründung für die getroffene Wahl gegeben. Lediglich bei Smith[1] und Winkler[2] finden sich erste, doch leider noch bei weitem nicht erschöpfende Ansätze zu einem Vergleich.

Aus diesem Grunde wurde zunächst einmal eine systematische Zuordnung der verschiedenen Ansätze zu Gruppen vorgenommen, die eine bessere Übersicht gewährleistet und damit als Grundlage für den Vergleich dienen kann. Auf dieser Basis kann dann die Erörterung der einzelnen Methoden geschehen, wobei im Rahmen dieses Berichtes nur die wesentlichen Merkmale der verschiedenen Ansätze beschrieben werden. Einen etwas breiteren Raum

---

1 Vgl. Smith, L.H., Ranking Procedures and Subjective Probability Distributions, in: Management Science, Vol. 14, 1967, S. B-236 - B-249, hier S. B-245 ff.

2 Vgl. Winkler, R.L., The Assessment of Prior Distributions in Bayesian Analysis, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 62, 1967, S. 776-800, hier S. 779 ff.

nimmt lediglich die Darstellung eines von uns vorgeschlagenen Verfahrens ein, bei dem die subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf der Grundlage eines Skalierungsmodells bestimmt werden.

Zu (2): Das Problemfeld der Konkretisierung der Einsatzbedingungen umfaßt mehrere wichtige Aspekte. Zum einen war zu klären, welche der in der Literatur vorgestellten Axiomensysteme zur Konstruktion subjektiver Wahrscheinlichkeiten den Anforderungen an eine allgemeine Basis für die Verwendung subjektiver Wahrscheinlichkeiten bei entscheidungsorientierten Problemstellungen entsprechen. Weiter galt es zu untersuchen, inwieweit sich Unterschiede in den Axiomensystemen auf die Methoden zur Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten auswirken, und ob eventuell einige Axiomensysteme die Wahl eines speziellen Schätzverfahrens angebracht erscheinen lassen.

Im Zusammenhang mit der Struktur und Komplexität des Entscheidungsproblems stellte sich die Frage, ob die Bedingungen einer Entscheidungssituation einen Einfluß auf die Akzeptierbarkeit eines Axiomensystems ausüben, und wie sich dieser auf die Anwendbarkeit bestimmter Verfahren auswirkt. Ziel derartiger Betrachtungen ist es, festzustellen, ob ein Verfahren allgemein oder nur bei speziellen Problemstellungen anwendbar ist.

Schließlich galt es zu untersuchen, ob die Ergebnisse einer Anwendung bei allen Verfahren tatsächlich immer ein quantitatives Wahrscheinlichkeitsmaß ergeben.

1 Einleitung

Es sind grundsätzlich verschiedene Auffassungen zu einem Aufbau der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie möglich[1,2]. Sieht man die Wahrscheinlichkeit als rein objektiv bestimmt an und leugnet jeden subjektiven Einfluß, so ist deren Anwendungsbereich im wesentlichen auf einige Gebiete der Naturwissenschaften beschränkt. Vor allem viele Probleme der Entscheidungstheorie lassen sich mit dieser engen Interpretation nicht erfassen. Eine allgemeinere Konzeption will deshalb auch subjektive Elemente berücksichtigen und den Wahrscheinlichkeitsbegriff derartig formulieren, daß er die Wahrscheinlichkeitstheorie für eine Vielzahl von wissenschaftlichen Problemstellungen aus den verschiedensten Bereichen eröffnet. Anwendungsgebiete sind unter anderem im Bereich der Wettervorhersage[3], bei der Vorhersage von Börsenkursen[4], im Gesundheitswesen[5] sowie im betrieblichen Bereich bei der Produktionsplanung[6], im Bereich der Investitionen[7] und vor allem bei der Beurteilung von Forschungs-

---

1 Vergleiche verschiedener Interpretationen und eine ausführliche Begründung für die subjetivistische Auffassung liefert Savage, L.J., The Foundations of Statistics, New York 1954, S. 56 ff.

2 Eine ausführliche Erörterung verschiedener Ansatzpunkte einer Wahrscheinlichkeitstheorie findet sich auch bei Fishburn, P.C., Decision and Value Theory, New York et al. 1964, S. 131 ff.

3 Vgl. Staël von Holstein, C.-A.S., Assessment and Evaluation of Subjective Probability Distributions, Stockholm 1970, S. 124-147; sowie Murphy, A.H., und R.L. Winkler, Subjective Probability Forecasting: Some Real World Experiments, in: D. Wendt und C. Vlek (Eds.), Utility, Probability, and Human Decision Making, Dordrecht, Boston 1975, S. 177-198.

4 Vgl. Staël von Holstein, C.-A.S., Assessment and Evaluation of Subjective Probability Distributions, a.a.O., S. 104-123.

5 Vgl. Stimson, D.H., Utility Measurement in Public Health Decision Making, in: Management Science, Vol. 16, 1969, S. B -17 - B-30.

6 Kidd, J.B., The Utilization of Subjective Probabilities in Production Planning, in: C.A.J. Vlek, W.A. Wagenaar und G. de Zeeuw (Eds.), Proceedings of the Second Research Conference on Subjective Probability, in: Acta Psychologica, Vol. 34, 1970, S. 338-347.

7 Vgl. Slovic, P., Psychological Study of Human Judgment: Implications for Investment Decision Making, in: Journal of Finance, Vol. 27, 1972, S. 779-799.

und Entwicklungsvorhaben[1] anzutreffen. Insofern wird also die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie von ihren Vertretern als übergeordneter Bereich aufgefaßt, in dem die klassischen, objektiv bestimmten Wahrscheinlichkeiten als Spezialfall enthalten sind.[2] Diese weit gefaßte Interpretation der Wahrscheinlichkeitstheorie bildet die Grundlage für die Ausführungen im Rahmen dieser Arbeit.

Nachdem erste Überlegungen über die Behandlung subjektiver Elemente in der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits im 18. und 19. Jahrhundert unter anderem bei Bernoulli und Laplace zu finden sind, begann die wesentliche Entwicklung einer subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie erst mit den Ansätzen von Borel[3] und den etwas später erschienenen Arbeiten von Ramsey[4] und De Finetti[5]. Ausgehend von den entscheidungstheoretisch orientierten Überlegungen Ramseys gelang es Savage[6] als erstem den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff systematisch aufzubauen, indem er ein Axiomen-

---

1 Vgl. Brockhoff, K., Forschungsprojekte und Forschungsprogramme: ihre Bewertung und Auswahl, (zweite erweiterte und geänderte Auflage von Forschungsplanung im Unternehmen), Wiesbaden 1973, S. 131 ff.

2 Eine Erörterung verschiedener Einteilungskriterien bei Unsicherheit liefert Schneider, wobei für ihn eine Situation mit vorhandenen objektiven Wahrscheinlichkeiten (auf Grund der Möglichkeit identischer Wiederholungen) zu der Erwartung einer einzigen Zukunftslage und somit praktisch zur Sicherheit führt, vgl. Schneider, D., Investition und Finanzierung, (dritte, neubearbeitete Auflage), Opladen 1974, S. 82.

3 Vgl. Borel, E., Apropos of a Treatise on Probability, in: Revue philosophique, 1924, übersetzt und wiederabgedruckt in: H.E. Kyburg und H.E. Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, New York et al. 1964, S. 45-60.

4 Vgl. Ramsey, F.P., Truth and Probability, in: R.B. Braithwaite (Ed.), The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, London, New York 1931, S. 156-198; wiederabgedruckt in: H.E. Kyburg und H.E. Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, New York et al. 1964, S. 61-92.

5 Vgl. De Finetti, B., La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, in: Anales de l'Institut Henri Poincaré, Vol. 7, 1937, S. 1-68; übersetzt und wiederabgedruckt als "Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources", in: H.E. Kyburg und H.E. Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, New York et al. 1964, S. 93-158.

6 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O.

system entwickelte, das eine Verbindung zwischen der Entscheidungstheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie herstellt. Dieser Ansatz bildet den Ausgangspunkt oder zumindest die Anregung für fast alle weiteren Arbeiten zur subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie, von denen unter anderem die Systeme von Suppes und Winet[1], Davidson und Suppes[2], Suppes[3] und von Fishburn[4] zu erwähnen sind. Doch trotz aller Erweiterungen und inzwischen viel diskutierter Mängel stellt der Ansatz von Savage "... nach wie vor für eine große Zahl von Entscheidungstheoretikern die in ihrem Aussagewert bisher unübertroffene Entscheidungstheorie bei Ungewißheit dar."[5]

Ein Element des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist durch die Vorstellung von einem individuellen Vertrauensgrad gegeben. Zusammen mit Regeln, die eine Konsistenz der Bewertungen von Wahrscheinlichkeiten gewährleisten sollen, bildet dieser Begriff die Grundlage für die Anwendung der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie. Ausgehend von dem individuellen Vertrauensgrad kommt De Finetti zu der Aussage, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses keinen eindeutig determinierten Wert zu haben braucht.[6] Eine konsistent handelnde Person bewertet die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Ereignisses auf der Grundlage der ihr zur Verfügung stehenden Information. Die Wahrscheinlichkeitsbewertung hängt also von dem jeweiligen Informationsstand des Urteilenden ab. Unterschiedliche Informationsgrundlagen

---

1 Vgl. Suppes, P. und M. Winet, An Axiomatization of Utility Based on the Notation of Utility Differences, in: Management Science, Vol. 1, 1955, S. 259-270.

2 Vgl. Davidson, D. und P. Suppes, A Finitistic Axiomatization of Subjective Probability and Utility, in: Econometrica, Vol. 24, 1956, S. 264-275.

3 Vgl. Suppes, P., The Role of Subjective Probability and Utility in Decision-Making, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954-1955, Vol. 5, 1956, S. 61-73.

4 Vgl. Fishburn, P.C., Preference-Based Definitions of Subjective Probability, in: The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, 1967, S. 1605-1617.

5 Gottinger, H.W., Grundlagen der Entscheidungstheorie - Ansätze und Kritik, Stuttgart 1974, S. 84.

6 Vgl. De Finetti, a.a.O., S. 148 ff.

führen somit zu verschiedenen Wahrscheinlichkeitsangaben. Weiter kann die Neuaufnahme von Informationen zu einer Veränderung der Beurteilung führen. Ein formaler Mechanismus, der die konsistente Verarbeitung neuer Daten gewährleistet, ist durch das Bayessche Theorem[1] gegeben. Dieses Theorem bietet die Möglichkeit, a priori Wahrscheinlichkeiten auf Grund zusätzlicher Informationen in a posteriori Wahrscheinlichkeiten umzuwandeln.

Die Ableitung der a priori Wahrscheinlichkeiten auf der Basis der vorhandenen Erfahrung des Urteilenden erweist sich aber als ein fundamentales Problem. Wenn gewisse Strukturaxiome erfüllt sind, entscheidet sich ein rational Handelnder unter Berücksichtigung einer a priori Verteilung über die Naturzustände. Benötigt wird aber ein Verfahren, um die a priori Verteilung auszuwählen, die seiner a priori Information am besten entspricht.[2] Zu diesem Zweck wurden in der Literatur bisher verschiedene Methoden vorgeschlagen, die allerdings auf Grund ihrer unterschiedlichen, die Informationsverarbeitung betreffenden Voraussetzungen nicht zu gleichen Ergebnissen führen müssen. Da kein Ansatz bisher als den anderen eindeutig überlegen angesehen wird, liegt schon in der Auswahl des Schätzverfahrens ein Problem.

Zu einer Beurteilung der einzelnen Verfahren erscheint es uns sinnvoll, zunächst einmal die wesentlichen Verfahren vorzustellen, sie nach ihren speziellen Eigenarten zu untersuchen und auf dieser Basis erste Vergleiche vorzunehmen.

---

1 Eine Darstellung des Theorems und einige Anwendungsbeispiele dazu findet man u.a. bei: Lindgren, B.W., Statistical Theory, Second Edition, London 1968, S. 234 ff.

2 Vgl. Suppes P., The Role of Subjective Probability and Utility in Decision Making, a.a.O., S. 72.

2. Verfahren zur Ermittlung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten

2.1. Allgemeine Bemerkungen und systematische Einordnung der Verfahren

Im Zusammenhang mit den Problemen bei der Ableitung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten sind zwei Problemfelder zu unterscheiden, von denen ein Einfluß auf die zu ermittelnden Werte ausgeht. Neben den Schwierigkeiten, die bei der Ermittlung der persönlich empfundenen Bewertung eines Urteilenden auftreten, sind Faktoren zu beachten, die eine Abweichung zwischen den empfundenen und den jeweils geäußerten Bewertungen bewirken.[1] Zur Vermeidung derartiger Abweichungen wird die Verwendung von Bewertungsfunktionen (scoring rules) vorgeschlagen[2]. Das sind Funktionen, die unter Berücksichtigung der angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung und des tatsächlich eingetroffenen Ereignisses eine Punktzahl bilden.[3] Auf diese Weise soll der Urteilende veranlaßt werden, möglichst "gute" (mit seiner Nutzenfunktion positiv verknüpfte) Schätzungen abzugeben.[4] Auf die zu diesem Gebiet zu zählenden Probleme soll zunächst nicht näher eingegangen werden. Für die im Rahmen dieser Arbeit erörterte Ableitung von Wahrscheinlichkeiten sei davon ausgegangen, daß kein Anlaß besteht, zwischen empfundenen und angegebenen Bewertungen zu unterscheiden.

---

1 Vgl. Brockhoff, K., On Determining Relative Values, in: Zeitschrift für Operations Research, Bd. 16, 1972, S. 221-232, hier S. 221 f.; wiederabgedruckt in: R.L. Ackoff (Ed.), Systems and Management Annual 1974, New York 1974, S. 459-470; im folgenden zitiert nach der ersten Veröffentlichung.

2 Vgl. Murphy, A.H. und R.L. Winkler, Scoring Rules in Probability Assessment and Evaluation, in: C. Vlek, W.A. Wagenaar, G. de Zeeuw (Eds.), Proceedings of the Second Research Conference on Subjective Probability, in: Acta Psychologica, Vol. 34, 1970, S. 273-286. Eine mehr theoretisch orientierte Abhandlung bietet: Savage, L.J., Elicitations of Personal Probabilities and Expectations, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 66, 1971, S. 783-801.

3 Vgl. Staël von Holstein, C.-A.S., Measurement of Subjective Probability, in: C. Vlek, W.A. Wagenaar, G. de Zeeuw (Eds.), Proceedings of the Second Research Conference on Subjective Probability. in : Acta Psychologica, Vol. 34, 1970, S. 146-159.

4 Vgl. Hogarth, R.M., Cognitive Processes and the Assessment of Subjective Probability Distributions, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 70, 1975, S. 271-289, hier S. 280.

Betrachtet werden im folgenden somit Verfahren, die eine vorhandene a priori Information des Urteilenden zu a priori Wahrscheinlichkeiten umformen. Die unterschiedlichen Ansatzpunkte der einzelnen Verfahren lassen eine Systematisierung als Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung sinnvoll erscheinen (vgl. Abb. 1). Dazu verwenden Spetzler und Staël von Holstein das Kriterium "direkt-indirekt",[1] wobei die Verfahren als direkt bezeichnet werden, bei denen der Urteilende einen Zusammenhang zwischen seinen Angaben und der daraus resultierenden Verteilung erkennen kann. Bei den indirekten Verfahren kann ein derartiger Zusammenhang in der Regel nicht unterstellt werden. Eine Unterscheidung zwischen einer Punktschätzung und der Schätzung einer Verteilung wird von Hampton et al.[2] vorgenommen, wobei die Beurteilung von vielen möglichen Werten einer unsicheren Größe als Schätzung einer Verteilung bezeichnet wird.[3] Beide Einteilungen unterliegen der Kritik, daß sich bei ihrer Anwendung erhebliche Abgrenzungsprobleme ergeben. Da sie außerdem nur eine grobe Einteilung der Verfahren ermöglichen, wurden weitere Unterscheidungskriterien herangezogen. Die gewählten Merkmale betreffen die Art der dem Urteilenden bei der Abgabe seiner Bewertungen gewährten Unterstützung.

Ausgehend von der Einteilung in direkte und indirekte lassen sich die Verfahren nach folgenden Kriterien klassifizieren:

(1) Direkte Verfahren:

- ohne Unterstützung: einfache direkte Befragung;
- grafische Unterstützung durch Vorgabe von Kurvenverläufen der Dichtefunktion;
- Unterstützung durch gezielte Befragung;
- Unterstützung durch a priori-Annahmen über die Art der Verteilung.

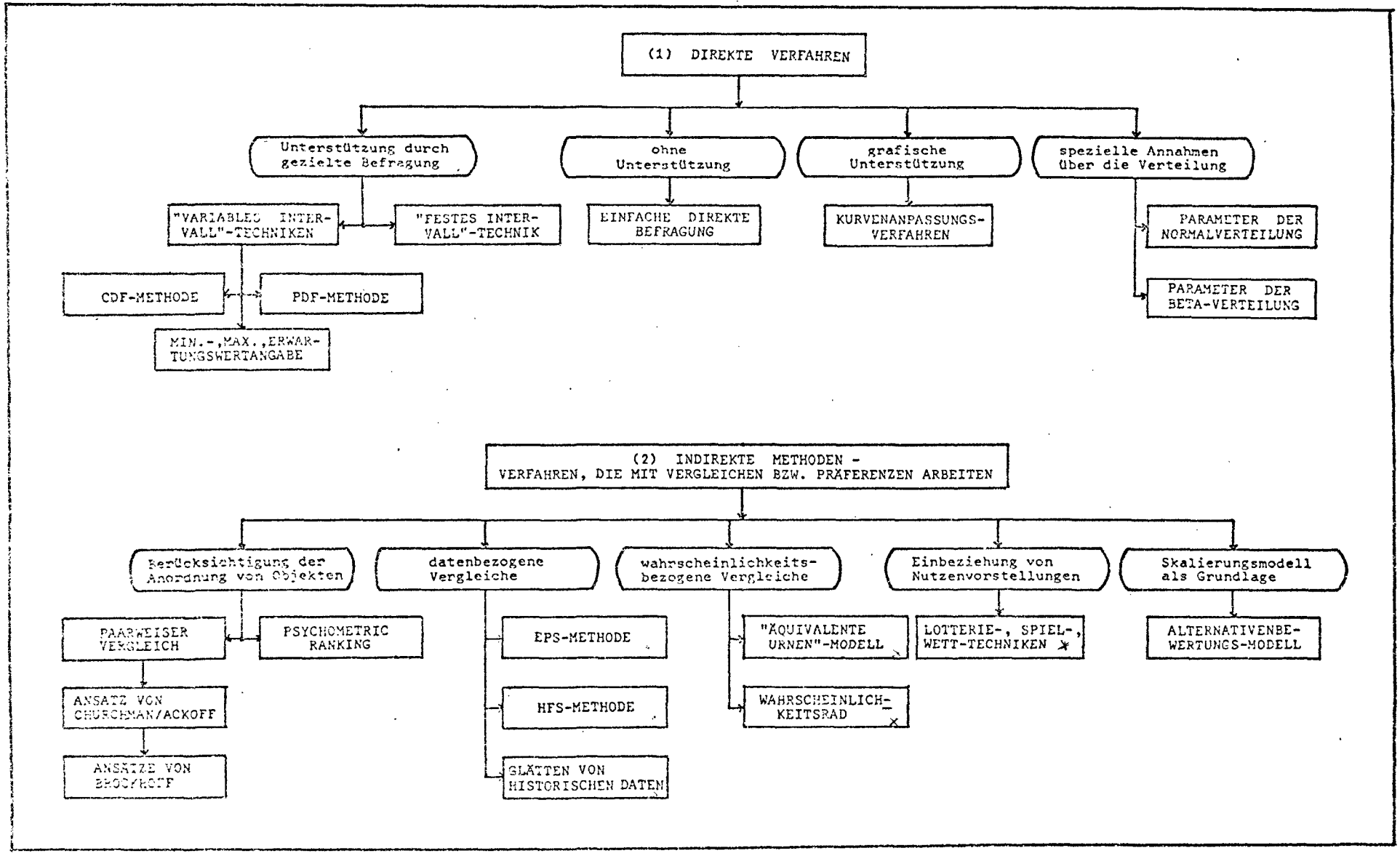
---

1 Vgl. Spetzler, C.S. und C.-A.S. Staël von Holstein, Probability Encoding in Decision Analysis, in: Management Science, Vol. 22, 1975, S. 340-358, hier S. 348. Dieses Unterscheidungskriterium verwendet auch Winkler, R.L., a.a.O., S. 787.

2 Hampton, J.M., P.G. Moore und H. Thomas, Subjective Probability and its Measurement, in: Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Vol. 136, 1973, S. 21-42, hier S. 22.

3 Ebenda, S. 23.

Abb. 1 : Verfahren zur Abgabe von Wahrscheinlichkeitsurteilen



(2) Verfahren, die mit Vergleichen, bzw. Präferenzen arbeiten (indirekte Verfahren):

- Datenbezogene Vergleiche;
- Wahrscheinlichkeitsbezogene Vergleiche;
- Berücksichtigung der Anordnung von Objekten;
- Verfahren auf der Grundlage von Skalierungsmodellen;
- Einbeziehung von Nutzenvorstellungen.

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist ein Entscheidungsmodell, das sich durch das Tripel (Z^+, A, ℓ) kennzeichnen läßt. Dabei bedeuten:

- $Z^+ = (Z, G(Z))$: ein Paar, bestehend aus

  Z, einem Zustandsraum, der die Menge der möglichen Zustände z der Umwelt enthält, die für das zu lösende Problem von Bedeutung sind, und
  G (Z), der Menge aller möglichen a priori Verteilungen g(z) über Z.

- A : ein Entscheidungsraum, der die Menge aller möglichen Entscheidungen a enthält, die der Entscheidungsträger treffen kann.[1]

- ℓ : eine Verlustfunktion, die ein Bewertungskriterium für die Auswirkungen der Entscheidungen a beim jeweiligem Zustand z der Umwelt ist. Diese Funktion ist somit eine Abbildung von Z x A in den Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$\ell : Z \times A \to \mathbb{R}. \qquad (2.1)$$

Ein denkbares Untersuchungsobjekt der Entscheidungssituation ist dann die Funktion B

$$B : Z^+ \times A \to \mathbb{R}, \qquad (2.2)$$

die sich als Erwartungswert der Verlustfunktion über alle z ergibt

$$B(Z^+, A) = \underset{z}{E}(\ell(z,a)) = \int_Z \ell(z,a)g(z)\,dz. \qquad (2.3)$$

---

1 Auf die Betrachtung einer Randomisierung bezüglich des Entscheidungsraumes A wird hier verzichtet.

2.2. Ausführungen zu den einzelnen Ansätzen

2.2.1. Direkte Methoden

(1) Im Rahmen der einfachen direkten Befragung hat der Urteilende seine Wahrscheinlichkeitsvorstellungen für die betrachteten Ereignisse sofort numerisch in Werten zwischen Null und Eins anzugeben. In einer leicht abgewandelten Form dieses Verfahrens ist die Angabe der relativen Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse durch Teilung einer Strecke in zwei Teile vorgesehen[1]. Dadurch wird eine Verzerrung des Ergebnisses durch die zu beobachtende Vorliebe für bestimmte Werte vermieden.

Beide Arten haben den Vorteil, daß sie schnell und einfach durchzuführen sind, doch fehlt bei ihnen eine vorgeschriebene Struktur des Prozesses der Urteilsbildung, wodurch die Gefahr der unvollständigen Berücksichtigung der vorhandenen Information stark ins Gewicht fällt. Zudem bewirkt die fehlende Unterstützung bei der Ableitung der Bewertungen auch bei dem Urteilenden eine vermehrte Unsicherheit gegenüber den eigenen Angaben.

(2) Eine Unterstützung der Urteilsabgabe durch grafische Vorgabe von Kurvenverläufen der Dichtefunktion wird von Schlaifer[2] in seinem Kurvenanpassungsverfahren (judgmental curve fitting) vorgeschlagen. Wenn für das Problem die Annahmen:

- Es liegt eine unimodale Häufigkeitsdichte vor, die sanft nach beiden Seiten abfällt.
- Ein großer Teil der Fläche unter der Kurve ist innerhalb eines kleinen Intervalls um den Modus konzentriert.
- Es bestehen aber auch noch ziemlich weit vom Modus entfernt nicht zu vernachlässigende Wahrscheinlichkeiten.

---

1 Vgl. Hampton, J.M., P.G. Moore und H. Thomas, a.a.O., S. 22

2 Vgl. Schlaifer, R., Analysis of Decision under Uncertainty, New York 1969, S. 283 ff.

akzeptiert werden können, dann lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte einer Größe x durch eine Dichtefunktion f(x) von der in Abbildung 2 dargestellten allgemeinen Form beschreiben:

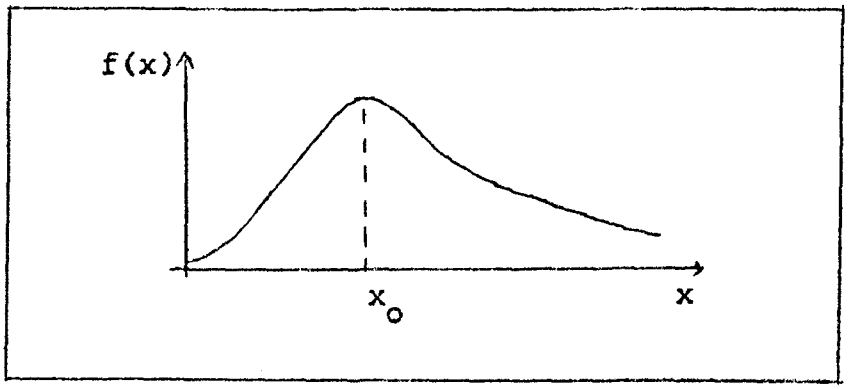


Abb. 2 : Allgemeine Form einer Dichtefunktion

Wird dieser allgemeine Kurvenverlauf für das Problem als repräsentativ angesehen, dann ist es einfach, den entsprechenden Verlauf der kumulierten Verteilungsfunktion daraus abzuleiten. Es sind nur noch wenige Schätzungen des folgenden Typs erforderlich, um die Verteilungsfunktion endgültig zu spezifizieren:

"Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert von x kleiner oder gleich dem Modus x_o ist?"

Außer für die Enden der Verteilung ist es nicht zu erwarten, daß diese Angaben große Schwierigkeiten machen.

(3) Unter dem Oberbegriff "gezielte Befragung" lassen sich mehrere Ansätze zusammenfassen, deren gemeinsames Merkmal eine Unterstützung der Abgabe von Bewertungen durch gezielte Befragung ist.

Bei der Technik der festen Intervalle[1] wird die Verteilung dadurch bestimmt, daß der mögliche Wertebereich der betrachteten Größe zunächst in einzelne Intervalle aufgeteilt wird. Für jedes Intervall ist dann die Wahrscheinlichkeit anzugeben, daß der wahre Wert gerade in dieses Intervall fällt.

---

[1] Vgl. Huber, P., Methods for Quantifying Subjective Probabilities and Multi-Attribute Utilities, in: Decision Sciences, Vol. 5, 1974, S. 430-459, hier S. 436.

Ein Verfahren, das man zu den variablen Intervalltechniken zählt, ist die von Morrison[1] vorgeschlagene direkte Quantile-Schätzung der Verteilungsfunktion (direct fractile assessment of the cumulative density function), kurz auch CDF-Methode genannt. Zur Bestimmung der Quantile einer Verteilung schlägt Morrison Fragen der folgenden Art vor:

- Zur Bestimmung von $x_{0.5}$: Für welchen Wert $x_{0.5}$ der Variablen x ist die Chance gleich 50%, einen wahren Wert kleiner als $x_{0.5}$ zu erhalten?
- Zur Bestimmung von $x_{0.25}$ ($x_{0.75}$): Angenommen, der wahre Wert sei kleiner (größer) als $x_{0.5}$. Für welchen Wert $x_{0.25}$ ($x_{0.75}$) der Variablen x ist die Chance gleich 50%, einen wahren Wert kleiner als $x_{0.25}$ ($x_{0.75}$) zu erhalten?

Aus diesen und weiteren auf diese Art ermittelten diskreten Punkten der Verteilung läßt sich deren Verlauf approximativ angeben. Die Bestimmung des Verlaufs einer Dichtefunktion durch die PDF-Methode[2] (probability density function) geschieht in analoger Weise: diskrete Punkte der Dichtefunktion werden durch gezielte Befragung unter Berücksichtigung der relativen Dichte und relativen Lokalisation geschätzt.

Ein etwas vereinfachtes Verfahren versucht der Tatsache Rechnung zu tragen, daß die Verwendung der Begriffe und die Art der Fragen hohe Anforderungen an das Abstraktionsvermögen eines methodisch nicht ausgebildeten Urteilenden stellt. Es beschränkt sich deshalb auf die Ermittlung des am stärksten vermuteten Wertes (x_e), des erwarteten minimalen (x_{min}) und maximalen (x_{max}) Wertes, sowie der Wahrscheinlichkeit (w), daß der aktuelle Wert zwischen w_e und w_{max} liegt[3]. Mit Hilfe dieser Angaben wird approximativ der Verlauf der Verteilungsfunktion dargestellt.

---

1 Vgl. Morrison, D.G., Critique of: "Ranking Procedures and Subjective Probability Distributions", in: Management Science, Vol. 14, 1967, S. B-253-B-254, hier S. B-253.

2 Vgl. Winkler, R.L., a.a.O., S. 779.

3 Vgl. Cole, T.D., How to Obtain Probability Estimates in Capital Expenditure Evaluations: A Practical Approach, in: Management Accounting, Vol. 52, 1970, S. 61-64, hier S. 62.

(4) Zur einfachen und schnellen Bewertung von Unsicherheitssituationen werden Approximations-Formeln zur Schätzung des Mittelwertes $\hat{\mu}$ und der Standardabweichung $\hat{\sigma}$ von subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen vorgeschlagen, die von Annahmen über die Verteilung der betrachteten Größe ausgehen. Die häufig verwendeten PERT-Formeln[1]

$$\hat{\mu} = (x_o + 4m + x_1)/6 \qquad (2.1)$$

$$\hat{\sigma} = (x_1 - x_o)/6 \qquad (2.2)$$

gehen von der Annahme einer Beta-Verteilung aus und verlangen von dem Urteilenden nur Angaben über den Modus m und die Endpunkte der Verteilung x_o und x_1 . Hillier[2] schlägt zur Bewertung von Investitionsvorhaben Formeln zur Ermittlung von $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ unter der Annahme der Normalverteilung vor. Da es sich erwiesen hat, daß Angaben zu den Enden einer Verteilung häufig mit einem großen Fehler versehen sind[3], erscheinen die von Perry und Greig[4] vorgestellten Formeln

$$\hat{\mu} = (x_{o.o5} + 0{,}95\ m + x_{o.95})/2{,}95 \qquad (2.3)$$

$$\hat{\sigma} = (x_{o.95} - x_{o.o5})/3{,}25 \qquad (2.4)$$

interessant, die unter Verwendung der Quantile $x_{o.o5}$ und $x_{o.95}$ zu guten Ergebnissen führen. Für diese Formeln spricht weiterhin, daß von der Verteilungsfunktion lediglich ein glockenförmiger Verlauf der Kurve gefordert wird.

---

1 Vgl. Malcolm, D.G., J.H. Roseboom, C.E. Clark und W. Fazar, Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, in: Operations Research, Vol. 7, 1959, S. 646-669, hier S. 652.

2 Vgl. Hillier, F.S., The Deviation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments, in: Management Science, Vol. 9, 1963, S. 443-457.

3 Vgl. Selvidge, J., A Three-Step Procedure for Assigning Probabilities to Rare Events, in: D. Wendt, C. Vlek (Eds.), Utility, Probability, and Human Decision Making, Dordrecht, Boston 1975, S. 199-216, hier S. 200.

4 Vgl. Perry, C. und I.D. Greig, Estimating the Mean and Variance of Subjective Distributions in PERT and Decision Analysis, in: Management Science, Vol. 21, 1975, S. B-1477 - B-1480.

2.2.2 Indirekte Methoden - Verfahren, die mit Vergleichen bzw. Präferenzen arbeiten

(1) Zu den Ansätzen, die Abstandsmaße aus dem Vergleich unterschiedlicher Anordnungen von Objekten verwenden, zählt das von Smith[1] vorgeschlagene Verfahren "Psychometric Ranking". Ausgehend von Kendalls[2] Überlegungen zur Quantifizierung von Informationen aus der Anordnung von Objekten und deren Differenzen befürwortet Smith ein Vorgehen in folgenden fünf Schritten:

(a) Gliederung des Untersuchungsgegenstandes in sieben bis zehn zu beurteilende Objekte;

(b) Aufstellen einer wachsenden Ordnung der Objekte in Hinsicht auf die erwartete relative Eintreffenswahrscheinlichkeit;

(c) Anordnung der relativen Differenzen zwischen den geordneten Objekten nach ihrer Größe;

(d) Quantifizierung der in diesen Angaben[3] liegenden Informationen. Dazu geht Kendall davon aus, daß bei einem zufällig in n Einzelteile zerlegten Gegenstand die Erwartungswerte der Teilgrößen T_i in folgendem Verhältnis zueinander stehen:[4]

$$
\begin{aligned}
T_1 &\triangleq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right) \\
T_2 &\triangleq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2}\right) \\
&\vdots \\
T_n &\triangleq \frac{1}{n}\ \frac{1}{n} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

---

1 Vgl. Smith, L.H., a.a.O.

2 Vgl. Kendall, M.G., Ranks and Measures, in: Biometrika, Vol. 49, 1962, S. 133-137.

3 Eine bei Smith auch zu findende Erweiterung des Ansatzes durch Ordnung der weiteren Differenzen nach ihrer eingeschätzten Größe halten wir in der Regel aufgrund von Bewertungsschwierigkeiten für eine praktische Anwendung nicht sinnvoll.

4 Vgl. Kendall, M.G., a.a.O., S. 134.

(e) Transformation der auf diese Art quantifizierten Rangordnungen in eine Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Normierung, wozu eine Schätzung der Enden der Verteilung notwendig ist.

Smith bewertet disen Ansatz zur Ermittlung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung als logisch, wohl definiert, konsistent und damit anderen deutlich überlegen.[1] Dem wird in einer scharfen Kritik von Morrison, der sich auch Hampton et al.[2] anschließen, unter anderem entgegengehalten, daß es zwar vom mathematischen Standpunkt her ein interessanter Ansatz sei, doch gegenüber Verfahren wie der CDF-Methode keine Vorteile, sondern nur ein vermehrter Aufwand feststellbar seien.[3]

Ein in bezug auf die praktische Anwendung relativ leicht zu handhabendes Verfahren ist der paarweise Vergleich, bei dem die Aufstellung einer Präferenzordnung durch den Vergleich von jeweils zwei Objekten geschieht. Den geordneten Objekten werden anschließend die Wahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung der Anordnung zugewiesen.

Als eine mehrstufige Erweiterung dieses Ansatzes kann ein von Churchman und Ackoff[4] vorgeschlagenes Verfahren angesehen werden, bei dem auf der m-ten Stufe Vergleiche eines Objektes mit Vereinigungen von m Objekten vorgenommen werden. Auf der Basis derart bestimmter Ordnungen werden den Objekten auf jeder Stufe relative Werte zugewiesen[5]. Ergeben sich bei diesen Zuordnungen Widersprüche zu vorher auf niedrigerer Stufe durchgeführten Bewertungen, so ist eine Revision der alten Wahrscheinlichkeitsangaben unter Beachtung der auf allen Stufen entdeckten Präferenzen notwendig. Es sind also bis zur letzten Stufe hin Änderungen der angegebenen Wahrscheinlichkeiten möglich. Die Anzahl N der durch-

---

1 Vgl. Smith, L.H., a.a.O., S. B-245.

2 Vgl. Hampton, J.M., P.G. Moore und H. Thomas, a.a.O., S. 27

3 Vgl. Morrison, D.G., a.a.O., S. B-254.

4 Vgl. Churchman, C.W. und R. Ackoff, An Approximate Measure of Value, in: Operations Research, Vol. 2, 1954, S. 172-187

5 Das Modell ist allgemein zur Bestimmung von relativen Werten entwickelt worden. Die Interpretation von subjektiven Wahrscheinlichkeiten als spezielle relative Werte ermöglicht eine direkte Übertragung auf unsere Problemstellung.

zuführenden Bewertungsvorgänge ergibt sich (für den Fall, daß keine auch als Bewertungsvorgänge zu zählenden Revisionen auftreten) in Abhängigkeit von der Anzahl der zu beurteilenden Objekte n durch

$$N = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m+1} , \qquad (2.6)$$

woraus zu ersehen ist, daß N mit wachsendem n sehr schnell ansteigt.

Als ein wesentlicher Mangel der letzten beiden Verfahren ist die Tatsache anzusehen, daß sie nicht zu einer endlichen Lösungsmenge und somit erst recht nicht zu einer eindeutigen Lösung führen[1]. Um aber die dann erforderliche Auswahl eines speziellen Punktes aus dieser unendlichen Menge zu begründen, schlägt Brockhoff zwei Programmierungsansätze vor[2]. Die bei Churchman und Ackoff formulierten Bedingungen für die Angabe der Bewertungen faßt er als einen Satz von N Beschränkungen auf, die durch eine Lösung nicht verletzt werden dürfen. Nachdem es ihm gelingt, eine Umwandlung der zunächst strikten Ungleichungen in einfache Ungleichungen zu begründen, ergibt sich ein System von Nebenbedingungen, das durch folgende Bedingungen für die subjektiven Wahrscheinlichkeiten p_1

$$p_i \geq 0 \ , \ \forall_i \quad (i = 1,\ldots,n) \ , \qquad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad (2.8)$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1 \wedge \sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1 \qquad (2.9)$$

---

1 Vgl. Brockhoff, K., On Determining Relative Values, a.a.O., S. 226.

2 Ebenda, S. 226 ff.

zu ergänzen ist. Es liegen somit M = N+n+2 Nebenbedingungen eines Optimierungsmodells vor, für dessen Zielfunktion Brockhoff zwei mögliche Formulierungen erörtert. In einem "Ziel-Programmierungs-Ansatz"[1] wird gefordert, die Summe der M Schlupfvariablen unter Beachtung der durch die Nebenbedingungen festgelegten Beschränkungen zu minimieren. Da aber dieser Ansatz unter anderem Probleme in Bezug auf die Existenz einer zulässigen Lösung[2] und in Hinsicht auf die Einstellung des Urteilenden zu dem durch diese Zielfunktion festgelegten Kriterium mit sich bringt, wird statt dessen in einem "Fehlerminimierungs-Ansatz" versucht, den durch

$$Z = \sum_{i=1}^{n} |p_i - P_i| \qquad (2.10)$$

gemessenen Schätzfehler zu minimieren[3]. Die P_i seien dabei Größen, die durch irgendein (allerdings nicht bekanntes) Verfahren objektivierbar sind. Aufgrund von Bedingung (2.7) und für $P_i \geq 0$, $\forall_i$ läßt sich Z durch die Ungleichung

$$Z \leq \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} P_i \qquad (2.11)$$

ausdrücken. Da die P_i in Bezug auf unser Problem Konstante sind, ist die Gleichung (2.10) der Zielfunktion

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} p_i \qquad (2.12)$$

äquivalent, die zur Lösung des Problems unter Beachtung der M + n Nebenbedingungen zu minimieren ist.

(2) Ein völlig anderer Weg zur Ableitung von Wahrscheinlichkeiten aus a priori Informationen wird bei den Verfahren eingeschlagen, die eine Unterstützung durch datenbezogene oder wahrscheinlichkeitsbezogene Vergleiche verwenden.

---

1 Vgl. Brockhoff, K., On Determining Relative Values, a.a.O., S. 229.

2 Aus diesem Grund soll die in der Gleichung (2.8) angesprochene Beschränkung beim Fehlerminimierungs-Ansatz nicht in die Nebenbedingungen aufgenommen sondern durch a posteriori Normierung berücksichtigt werden.

3 Vgl. Brockhoff, K., On Determining Relative Values, a.a.O., S. 230.

Winkler[1] und später auch Schaefer und Borcherding[2] benutzen ein von ihnen als EPS-Methode (equivalent prior sample) bezeichnetes Verfahren, bei dem der Urteilende Schätzwerte für die beiden Größen r und n anzugeben hat, die äquivalent zum Ergebnis einer gedachten Stichprobe (z.B. r von n zufällig gezogenen Objekten sind rot) sein sollen. Das Verhältnis r/n soll nahe bei dem Schätzwert für p liegen, und die Größe des Stichprobenumfangs zeigt für ein gegebenes Verhältnis r/n das Vertrauen in die abgegebene Schätzung an. Die vorhandene a priori Information wird hier also in Form einer äquivalenten früheren Stichprobe ausgedrückt.

Liegt bereits eine Schätzung der gesuchten Wahrscheinlichkeit vor, dann untersucht die HFS-Methode[3] (hypothetical future sample) den Effekt zusätzlichen Wissens auf die Verteilung. Der Urteilende soll angeben, welchen Einfluß hypothetische zusätzliche Informationen auf seine angegebenen Wahrscheinlichkeiten ausüben.

Ist ein Rückgriff auf vorhandene Daten möglich, so sollten diese Informationen bei der Schätzung der Wahrscheinlichkeitsfunktion beachtet werden. Dieses ist der Ansatzpunkt eines von Schlaifer[4] vorgestellten und als "Glätten von historischen Daten" (smoothing of historical data) bezeichneten Verfahrens, bei dem je nach Qualität der Daten die Dichtefunktion oder die kumulierte Wahrscheinlichkeitsfunktion verwendet wird; spärlich vorhandene Daten lassen sich besser mit Hilfe der kumulierten Funktion verarbeiten. Die historischen relativen Häufigkeiten sind für jeden vorhandenen Wert in eine Grafik einzuzeichnen.

---

1 Vgl. Winkler, R.L., a.a.O., S. 799.

2 Vgl. Schaefer, R.E. und K. Borcherding, The Assessment of Subjective Probability Distributions: A Training Experiment, in: Acta Psychologica, Vol. 37, 1973, S. 117-129.

3 Vgl. Winkler, R.L., a.a.O., S. 798. Eine von Du Charme und Donnell vorgestellte "null datum method" ist der HFS-Methode sehr ähnlich: Du Charme, W.M. und M.L. Donnell, Intrasubject Comparisons of Four Response Modes for Subjective Probability Assessment, in: Organizational Behavior and Human Performance, Vol. 10, 1973, S. 108-117.

4 Vgl. Schlaifer, R., a.a.O., S. 290 ff.

An diese Punkte wird eine Kurve angepaßt, deren genereller Verlauf[1] mit den allgemeinen Vorstellungen über das langfristige Verhalten des Prozesses übereinstimmen soll.

Zur Unterstützung der Bewertung von wenigen Ereignissen kann eine Urne verwendet werden, die mehrere verschiedenfarbige Kugeln enthält. Unter der Annahme, daß jede Farbe ein Ereignis repräsentiert, soll der Urteilende das Mischungsverhältnis der Kugeln gemäß seinen Vorstellungen über die Eintreffenswahrscheinlichkeiten angeben[2]. Für den Fall der Beurteilung von Einzelereignissen schlagen Spetzler und Staël von Holstein die Verwendung eines Wahrscheinlichkeitsrades vor, das aus zwei verschiedenfarbenen, verstellbaren Sektoren und einem fest installierten Zeiger besteht[3]. Die Größen der beiden Sektoren hat der Urteilende so anzugeben, daß das relative Verhältnis der Farben seiner Einschätzung der zu bewertenden Ereignisse entspricht.

(3) Obwohl Spiel- und Lotterietechniken hauptsächlich zur Ableitung von Nutzenvorstellungen vorgeschlagen werden, lassen sie sich auch zur Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten verwenden[4]. Es sei der Erwartungswert eines Spieles $E[a]$ durch

$$E[a] = pz_1 + (1-p)z_2 \qquad (2.13)$$

mit

- p : zu schätzende Eintreffenswahrscheinlichkeit
- z_1 : Höhe des Gewinns
- z_2 : Höhe des Verlustes

berechnet, dann wird ein risikoneutraler Spieler einen Ein-

---

1 Wenn die Werte als durch einen Zufallsprozeß mit einem Grund- und einem Zufallselement erzeugt angesehen werden können, wie es sich als Effekt einer großen Anzahl von kleinen unabhängigen Faktoren ergibt, dann wird die allgemeine Form unimodal und glatt sein.

2 Vgl. Raiffa, H., Decision Analysis, Reading 1968.

3 Vgl. Spetzler, C.S. und C.-A.S. Staël von Holstein, a.a.O., S. 348 f.

4 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 28 ff.

satz in Höhe von B = E [a] für die Teilnahme am Spiel als "fair" ansehen. Unter den Annahmen, daß der Spieler E [a] maximieren will, seine Nutzenfunktionen für B, z_1 und z_2 linear verlaufen[1] und die Werte für B, z_1 und z_2 bekannt sind, läßt sich dann die erwartete Eintreffenswahrscheinlichkeit p aus Gleichung (2.13) berechnen. Die Zahl der durchzuführenden Spiele ist durch die Anzahl der gesuchten Wahrscheinlichkeiten gegeben und kann somit in speziellen Situationen recht groß werden.

(4) Für ein Entscheidungsproblem, in dem eine große Anzahl von Handlungsalternativen zur Auswahl stehen, schlagen wir ein Verfahren vor, das auf der Basis eines von Srinivasan und Shocker entwickelten Modells[2] beruht. Betrachtet werde die durch das Tripel (A, Z^+, e) gekennzeichnete Entscheidungssituation, wobei $e = (-1) * \ell$ eine Ergebnisfunktion ist. Weiter sei "$\succsim$" eine zweistellige Präferenzrelation auf A, dann sollen die zu einer Aktion $a_i \in A$ gehörenden Ergebnisse $e_{i1},\ldots, e_{im}$ unter Verwendung von gesuchten und nicht explizit bekannten relativen Werten $p_1^+,\ldots,p_m^+$ zu einem Kriterium s_i

$$s_i = \sum_{j=1}^{m} p_j^+ e_{ij} \qquad (2.14)$$

verknüpft werden, wobei für zwei Aktionen a_i und a_k dann gilt:

$$\begin{aligned} s_i \succ s_k \quad &\Leftrightarrow \quad a_i \succ a_k \\ s_i \prec s_k \quad &\Leftrightarrow \quad a_i \prec a_k \\ s_i = s_k \quad &\Leftrightarrow \quad a_i \sim a_k \end{aligned} \qquad (2.15)$$

---

1 Laux gibt auch ein allerdings sehr aufwendiges Verfahren für den Fall an, daß der Urteilende nicht risikoneutral ist; vgl. Laux, H., Zur Entscheidung beim Fehlen objektiver Wahrscheinlichkeiten, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Bd. 46, 1976, S. 59-68, hier S. 62 ff.

2 Vgl. Srinivasan, V. und A.D. Shocker, Linear Programming Techniques for Multidimensional Analysis of Preferences, in: Psychometrika, Vol. 38, 1973, S. 337-369. Eine vereinfachte Version ihres Modells, bei der die Gewichte der einzelnen Dimensionen eines Merkmalvektors für die Berechnung eines Gesamtkriteriums auf der Basis von paarweisen Urteilen zwischen den Objekten geschätzt werden, findet man in: Srinivasan, V. und A.D. Shocker, Estimating the Weights for Multiple Attributes in a Composite Criterion Using Pairwise Judgments, in: Psychometrika, Vol. 38, 1973, S. 473-493.

Für die Ableitung dieser relativen Werte (p_j^+) sei jetzt angenommen, daß es einem Urteilenden unter strenger Beachtung seiner a priori Informationen möglich ist, einen Teil der Aktionen paarweise zu vergleichen und Präferenzurteile zwischen ihnen abzugeben. Es sind zwar nicht alle $n(n-1)/2$ Vergleiche notwendig, doch entsprechen die mit diesem Verfahren berechneten Wahrscheinlichkeiten dem vorhandenen a priori Wissen um so besser, je größer die Zahl der angegebenen Vergleiche ist. Eine Transitivität der Beurteilungen wird für das Verfahren nicht gefordert.

Es sei Q eine Menge von Paaren (ℓ,k), die den angegebenen Dominanzurteilen entsprechen, wobei $(\ell,k) \in Q$ die Bedeutung von $a_\ell \succ a_k$ hat. Für die zu bestimmenden relativen Werte sei zunächst nur

$$p_j^+ \geq 0 \quad \forall j = 1,\ldots,m \tag{2.16}$$

gefordert. Die für die eigentlich gesuchten subjektiven Wahrscheinlichkeiten p_j, $j = 1,\ldots,m$, notwendige zusätzliche Bedingung

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$

soll durch a posteriori Normierung erfüllt werden. Es sei eine Lösung $P^+ = (p_1^+,\ldots, p_m^+)$ gegeben, dann lassen sich die Kriterien $s_i \; \forall \; a_i \in A$ berechnen. Für ein beliebiges $(\ell,k) \in Q$ sollte die Lösung dann zu $s_\ell > s_k$ führen. Ergibt sich dagegen $s_\ell \leq s_k$, so stimmen die berechneten relativen Werte nicht mit dem angegebenen paarweisen Vergleich überein. Der Fehler $f_{\ell k}^-$ einer Lösung für ein Paar $(\ell,k) \in Q$ sei deshalb durch

$$f_{\ell k}^- = \max \{0, (s_k - s_\ell)\} \tag{2.17}$$

definiert. Für alle Paare aus Q ergibt sich dann ein Fehlermaß F^- durch

$$F^- = \sum_{(\ell,k)\in Q} f_{\ell k}^- \quad . \tag{2.18}$$

Nach Definition ist $f_{\ell k}^{-} \geq 0$, somit gilt auch $F^{-} \geq 0$. Zu suchen ist eine Lösung P^{+}, für die F^{-} unter Beachtung von (2.16) minimal wird.

Es gilt jetzt allerdings, die unerwünschte triviale Lösung $P^{+} = 0$ zu vermeiden, die zu $F^{-} = 0$ führt und somit F^{-} in der Tat minimiert. Weiter ist zu verhindern, daß eine Transformation der Lösung $P^{+'} = \lambda P^{+}$, die das Verhältnis der relativen Werte untereinander unverändert läßt, aufgrund von $s_{\ell}' = \lambda s_{\ell}$ und somit $f_{\ell k}^{-'} = \lambda f_{\ell k}^{-}$ eine Veränderung von F^{-} zu $F^{-'} = \lambda F^{-}$ bewirkt, da über eine Minimierung des Fehlermaßes für $\lambda \to 0$ wieder die triviale Lösung erreicht wird. Aus diesem Grunde sei für ein Paar $(\ell,k) \in Q$ und eine gegebene Lösung P^{+} die Größe $f_{\ell k}^{+}$ durch

$$f_{\ell k}^{+} = \max \{0, (s_{\ell} - s_{k})\} \tag{2.19}$$

definiert. Die durch

$$F^{+} = \sum_{(\ell,k)\in Q} f_{\ell k}^{+} \tag{2.20}$$

bestimmte Größe, für die wieder $F^{+} \geq 0$ gilt, sei als Gütemaß bezeichnet. Das Problem einer unerwünschten trivialen Lösung läßt sich dann durch die Bedingung

$$F^{+} - F^{-} = 1 \tag{2.21}$$

beheben. Aufgrund von (2.18) und (2.20) gilt:

$$F^{+} - F^{-} = \sum_{(\ell,k)\in Q} \max \{0,(s_{\ell}-s_{k})\} - \sum_{(\ell,k)\in Q} \max \{0,(s_{k}-s_{\ell})\}$$

$$= \sum_{(\ell,k)\in Q} (s_{\ell}-s_{k}) \; . \tag{2.22}$$

Weiter gilt unter Berücksichtigung von (2.14):

$$(s_{\ell}-s_{k}) = \sum_{j=1}^{m} p_{j}^{+} (e_{\ell j}-e_{kj}) = \sum_{j=1}^{m} p_{j}^{+} e_{\ell kj}, \tag{2.23}$$

mit

$$e_{\ell kj} = e_{\ell j} - e_{kj} \; , \tag{2.24}$$

so daß

$$F^+ - F^- = \sum_{(\ell,k)\in Q} \sum_{j=1}^{m} p_j^+ e_{\ell kj} = \sum_{j=1}^{m} p_j^+ E_j \qquad (2.25)$$

mit

$$E_j = \sum_{(\ell,k)\in Q} e_{\ell kj} \qquad (2.26)$$

geschrieben werden kann. Dann läßt sich die Bedingung (2.21) auch durch

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^+ E_j = 1 \qquad (2.27)$$

wiedergeben. Aus dieser Form ist zu sehen, daß die neu eingeführte Bedingung in der Tat die triviale Lösung $P^+ = 0$ ausschließt. Jetzt ist noch zu zeigen, daß die Bedingungen (2.16) und (2.27) die Existenz einer Lösung nicht verhindern. Wenn aber wenigstens für ein $\ell \in (1,\ldots,m)$ $E_\ell > 0$ gilt, so kann mit $p_\ell^+ = {}^1/E_\ell$ und $p_j^+ = 0 \;\forall_j;\; j=1,\ldots,m;$ $j \neq \ell$ immer eine Lösung erreicht werden, die den beiden Bedingungen gerecht wird. Da aber die Bewertungen des Urteilenden in sich sehr widersprüchlich sein müßten, damit nicht mindestens ein $E_\ell > 0$, $\ell \in (1,\ldots,m)$, ist, kann die Existenz einer Lösung unter den beschriebenen Annahmen als gesichert angesehen werden.

Damit sind die Beschränkungen des Modells festgelegt. Unter Beachtung von (2.23) läßt sich das Fehlermaß durch

$$F^- = \sum_{(\ell,k)\in Q} \max\{0, -\sum_{j=1}^{m} p_j^+ e_{\ell kj}\} \qquad (2.28)$$

angeben. Die optimale Lösung $\tilde{P}^+$ wird dann durch Minimierung von (2.28) unter Berücksichtigung von (2.16) und (2.27) erhalten. Die numerische Bestimmung der optimalen Lösung kann durch den folgenden "goal programming"-Ansatz[1] erreicht

---

[1] Vgl. Charnes, A. und W.W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, Vol. I, New York 1961, S. 215 ff.

werden:

$$\text{Minimiere} \quad F = \sum_{(\ell,k)\in Q} z_{\ell k} \tag{2.29}$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{m} e_{\ell kj}\, p_j^+ + z_{\ell k} \geq 0 \quad \forall\, (\ell,k)\in Q, \tag{2.30}$$

$$\sum_{j=1}^{m} E_j p_j^+ = 1 \ , \tag{2.27}$$

$$p_j^+ \geq 0 \quad \forall_j ; \quad j = 1,\ldots,m \tag{2.16}$$

und

$$z_{\ell k} \geq 0 \quad \forall\, (\ell,k)\in Q \ . \tag{2.31}$$

Dabei sind die $z_{\ell k}$, $(\ell,k)\in Q$, Schlupfvariablen, für die nach (2.30) und (2.31)

$$z_{\ell k} \geq \max \{0, - \sum_{j=1}^{m} e_{\ell kj}\, p_j^+\} \tag{2.32}$$

gilt. Da die optimale Lösung durch Minimierung von (2.29) erreicht wird, gilt im Optimum das Gleichheitszeichen in (2.32), womit die Äquivalenz von F^- und F gegeben ist.

Für den Fall, daß durch dieses Verfahren keine Eindeutigkeit erreicht wird, schlagen wir vor, alle optimalen Lösungen berechnen zu lassen und aus diesen die Lösung herauszusuchen, bei der die Anzahl der 'verletzten' angegebenen Beurteilungen $(\ell,k)\in Q$ minimal ist.

Die auf diese Art erhaltene optimale Lösung $\tilde{P}^+$ ist dann nach

$$\tilde{p}_\ell = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} p_j^+}\, \tilde{p}_\ell^+ \quad \forall_\ell ; \quad \ell=1,\ldots,m, \tag{2.33}$$

zu transformieren, damit die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{p}_j = 1 \qquad (2.34)$$

erfüllt wird. Die Werte $\tilde{p}_j$, $j=1,\ldots,m$, können dann als subjektive Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden, die unter Verwendung der vorhandenen a priori Information des Urteilenden abgeleitet wurden.

Dieses hier vorgestellte Verfahren erscheint uns in mehrfacher Hinsicht vorteilhaft. Es vermeidet die für den Urteilenden so schwierige Angabe seiner a priori Informationen in quantifizierter Form und verlangt statt dessen nur die vergleichende Bewertung einzelner Alternativen. Dabei sind nicht einmal alle $n(n-1)/2$ paarweisen Vergleiche notwendig, sondern es können Paare, deren Beurteilung Schwierigkeiten bereitet, ausgelassen werden. Außerdem lassen sich die Angaben des Urteilenden sogar dann verwenden, wenn die Transitivitätsbedingung nicht erfüllt ist. Nur kurz erwähnt werden soll die Möglichkeit, das Vertrauen des Urteilenden in die eigenen Angaben als Gewichtungsfaktor zu berücksichtigen. Weiter erscheint es problemlos, das Bewertungsverfahren und Verarbeitung der Angaben auf die Urteile mehrerer Personen auszudehnen.

2.3. Ein erster Vergleich

In diesem Stadium der Untersuchung sollen für einen Vergleich der vorgestellten Ansätze vor allem die Aspekte berücksichtigt werden, die einen Einfluß auf die Einsatzmöglichkeiten ausüben. Eine wesentliche Rolle spielen dabei die impliziten und expliziten Voraussetzungen der Verfahren, da durch sie ein möglicher Einsatz auf spezielle Situationen beschränkt werden kann. So bedingt der Aufbau einer Reihe von Verfahren implizit eine nicht allzu große Zahl von zu bewertenden Objekten. Andere mehrfach anzutreffende Einschränkungen der Anwendbarkeit sind durch Annahmen über den Verlauf der Verteilungsfunktion gegeben.

An die Person des Urteilenden gestellte Anforderungen sind ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt für eine Beurteilung der Einsatzmöglichkeiten.[1] Während die Forderung nach einer fachlichen Qualifikation des Urteilenden in der Regel als problemlos erfüllbar anzusehen ist, beinhaltet die Voraussetzung von hinreichenden Kenntnissen statistischer Zusammenhänge und Methoden in den meisten Fällen zumindest einen erhöhten Aufwand in Form von ausführlichen Einweisungen.[2] Weiter erweist sich die bei vielen Verfahren vorhandene Notwendigkeit einer numerischen Spezifizierung der Bewertungen für manchen Urteilenden als eine harte Anforderung.[3] Besonders bei wenig geübten Schätzern ist das Vertrauen in die eigenen Angaben in diesen Fällen nur gering, so daß diese Schätzwerte als sehr unsicher anzusehen sind.

---

1 Vgl. Pickhardt, R.C. und J.B. Wallace, A Study of the Performance of Subjective Probability Assessors, in: Decision Science, Vol. 5, 1974, S. 347-369.

2 Allerdings stellt Winkler fest, daß geringe Kenntnisse von statistischen Zusammenhängen nur einen kaum nennenswerten Einfluß auf die Qualität der Schätzergebnisse haben. Erst eine intensive Ausbildung in Statistik führt zu einer deutlich verbesserten Transformation der Informationen in numerische Wahrscheinlichkeiten. Vgl. Winkler, R.L., a.a.O., S. 789.

3 Vgl. Spetzler, C.S. und C.-A.S. Staël von Holstein, a.a.O., S. 350.

Die Unsicherheit des Urteilenden bei der Abgabe von Schätzwerten ist oftmals auch eine Folge nicht vollständig durchdachter Fragestellungen. Eine angemessene Strukturiertheit des Urteilsprozesses erweist sich in dieser Hinsicht als hilfreich, um eine Berücksichtigung aller vorhandenen Informationen zu gewährleisten.[1] Auch ein vermehrter Arbeitsaufwand, wie er z.B. durch eine vorgeschaltete systematische Rangordnungsbildung zwischen den zu bewertenden Objekten gegeben ist, läßt sich aus diesem Grunde vertreten.

Die Berücksichtigung der hier angesprochenen Aspekte bei den einzelnen Ansätzen ist der Übersicht auf den Seiten 28 und 29 zu entnehmen.[2] Aus dieser Gegenüberstellung lassen sich bezüglich der Vorteilhaftigkeit der Verfahren einige erste Schlüsse ziehen. Unter den Verfahren, die nur einen geringen Aufwand verursachen, erscheint das Kurvenanpassungsverfahren als besonders geeignet, da durch die grafische Darstellung der Dichtefunktion eine einfache aber wirkungsvolle Unterstützung des Urteilsprozesses gegeben wird. Nur wenn die Zahl der zu schätzenden Verteilungen sehr groß ist, sind die PERT-Formeln und vor allem die von Perry und Greig vorgestellten Formeln vorzuziehen.

Ein weiterer Sonderfall ist gegeben, wenn historische Daten vorliegen, die der Situation angemessen sind. Die mit diesen Daten vorhandenen Informationen sollen durch Anwendung der Methode "Glätten von historischen Daten" genutzt werden.

---

1 Vgl. Winkler, R.L., a.a.O., S. 786. Er stellt vor allem einen Unterschied zwischen den direkten und den indirekten Techniken fest. Bei der Anwendung von direkten Schätzverfahren scheinen die Urteilenden unwillig oder unfähig zu sein, die vorhandenen Informationen vollständig zu nutzen.

2 Obwohl es sich als ziemlich schwierig erweist, die von verschiedenen Faktoren beeinflußte Größe "Aufwand" zu bestimmen und für einen Vergleich heranzuziehen, wurde wenigstens eine grobe Klassifikation vorgenommen, da auf derartige Angaben für eine Beurteilung der Verfahren nicht verzichtet werden sollte.

Abb. 3 : Vergleich der Verfahren zur Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten

NAME DES VERFAHRENS	SPEZIELLE VORAUSSETZUNGEN	AUSGANGSINFORMATION	VERLAUF DES SCHÄTZPROZESSES	UNTERSTÜTZUNG DES URTEILSPROZESSES	ANFORDERUNGEN AN DEN URTEILENDEN	AUFWAND	BEMERKUNGEN, SPEZIELLE VOR- UND NACHTEILE
Einfache direkte Befragung	——	——	Einfaches Interview	——	Numerische Spezifizierung der Bewertungen	Gering	Gefahr großer Unsicherheit beim Urteilenden
Kurvenanpassungsverfahren	Annahmen über den Verlauf der Dichtefunktion	Allgemeiner Verlauf der Dichtefunktion	Beurteilung spezieller Werte; Interviewtechnik	Grafische Darstellung	Numerische Spezifizierung der Bewertungen	Gering	Die grafische Darstellung schränkt die Unsicherheit des Urteilenden ein.
Technik der festen Intervalle	——	Aufteilung des Wertebereichs in feste Intervalle	Bewertung der vorgegebenen Intervalle	Vorgabe der Intervalle	Numerische Spezifizierung der Bewertungen	Gering	Vorgabe der Intervalle bedeutet keine wesentliche Unterstützung des Prozesses.
CDF-Methode und PDF-Methode	——	——	Interview in festgelegter Form, Schätzung bestimmter Quantilswerte	Systematisches Vorgehen beim Interview	Numerische Spezifizierung der Bewertungen; methodische Kenntnisse	Mäßig	Angabe von bedingten Wahrscheinlichkeiten erfordert methodische Kenntnisse
Min.-, Max.-, Erwartungswertangabe	Annahmen über den Verlauf der Dichtefunktion	——	Direkte Erfassung von Erwartungswert und Extremwerten der Verteilung	——	——	Sehr gering	Approximative Bestimmung des Kurvenverlaufs; Angabe der Extremwerte ist schwierig
PERT-Formeln und ähnliche Arten	Annahmen über die Art der Dichtefunktion	Spezielle Art der Verteilung	Angabe von wenigen speziellen Werten zur Schätzung von $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$	——	——	Sehr gering	Approximative Bestimmung des Kurvenverlaufs; Angabe der Extremwerte ist schwierig
Psychometric Ranking	Annahmen über die Aufteilung einer zufällig in n Teile zerlegten Größe	Aufteilung des Untersuchungsgegenstandes in höchstens zehn zu beurteilende Objekte	Rangordnungsbildung der Objekte und der relativen Differenzen zwischen den Objekten	Systematische Rangordnungsbildung	Bildung einer Rangordnung zwischen Differenzen	Erheblich	Keine numerische Spezifizierung der Bewertungen notwendig; Bildung einer Rangordnung zwischen Differenzen kann schwierig sein
Paarweiser Vergleich	Zahl der zu bewertenden Objekte nicht allzu groß	——	Rangordnungsbildung durch paarweisen Vergleich; direkte Angabe der Wahrscheinlichkeiten	Systematische Rangordnungsbildung	Numerische Spezifizierung der Bewertungen; Beachtung der Transitivitätsbedingung	Mäßig	Unsicherheit bei der Quantifizierung der Information kann nicht vermieden werden
Verfahren nach Churchman und Ackoff	Zahl der zu bewertenden Objekte nicht allzu groß	——	Mehrstufiger paarweiser Vergleich; Angabe von Wahrscheinlichkeiten auf jeder Stufe möglich	Systematische Rangordnungsbildung	Bewertung von vereinigten Objekten; numerische Spezifizierung der Bewertungen; methodische Kenntnisse	Sehr groß	Eindeutigkeit der Lösung nicht gewährleistet; Bewertung von vereinigten Objekten erfordert methodische Kenntnisse

Abb. 3 : (Fortsetzung)

NAME DES VERFAHRENS	SPEZIELLE VORAUSSETZUNGEN	AUSGANGSINFORMATION	VERLAUF DES SCHÄTZPROZESSES	UNTERSTÜTZUNG DES URTEILSPROZESSES	ANFORDERUNGEN AN DEN URTEILENDEN	AUFWAND	BEMERKUNGEN, SPEZIELLE VOR- UND NACHTEILE
Fehlerminimierungsansatz von Brockhoff	Zahl der zu bewertenden Objekte nicht allzu groß	Mehrstufiger paarweiser Vergleich; Zielfunktion	Lineares Programm als Fehlerminimierungsansatz	Systematische Rangordnungsbildung; Vorgabe einer Zielfunktion	Bewertung von vereinigten Objekten; methodische Kenntnisse	Groß	Eindeutige Lösung; keine numerische Spezifizierung der Bewertungen notwendig
Goal-Programming-Ansatz von Brockhoff	Zahl der zu bewertenden Objekte nicht allzu groß	Mehrstufiger paarweiser Vergleich; Zielfunktion	Lineares Programm als Goal-Programming-Ansatz	Systematische Rangordnungsbildung; Vorgabe einer Zielfunktion	Bewertung von vereinigten Objekten; methodische Kenntnisse	Groß	Eindeutige Lösung; keine numerische Spezifizierung der Bewertungen notwendig; Zielfunktion problematisch
X EPS-Methode	Zahl der zu bewertenden Objekte nicht allzu groß		Angabe von Schätzwerten, die äquivalent zu einer gedachten Stichprobe sind.	Vergleich mit einer Stichprobe	Methodische Kenntnisse	Mäßig	Der Vergleich mit einer Stichprobe ist nur bei hinreichenden methodischen Kenntnissen hilfreich
X HPS-Methode	Es liegt bereits eine Schätzung vor	Vorliegende Schätzwerte	Untersuchung des Einflusses hypothetischer Informationen auf die angegebenen Wahrscheinlichkeiten		Methodische Kenntnisse	Mäßig	Mehr zur Überprüfung vorhandener Angaben als zur Ableitung neuer Angaben geeignet
X Glätten von historischen Daten	Es liegen der Situation angemessene historische Daten vor	Grafische Darstellung der historischen Daten	Anpassung einer allgemeinen Kurve an die Punkte der historischen Daten	Vorliegende Daten		Gering	Die Information vorhandener Daten wird genutzt
X Modell der äquivalenten Urnen	Zahl der zu bewertenden Objekte nicht allzu groß		Vergleich der Problemstellung mit einem Urnenmodell	Wahrscheinlichkeitsbezogener Vergleich	Methodische Kenntnisse	Mäßig	Keine numerische Spezifizierung der Bewertungen notwendig; Vergleich mit Urnenmodell erfordert hinreichende methodische Kenntnisse
X Wahrscheinlichkeitsrad	Bewertung von Einzelereignissen		Angabe des Verhältnisses zweier Sektoren des Wahrscheinlichkeitsrads	Wahrscheinlichkeitsbezogener Vergleich		Gering	Keine numerische Spezifizierung der Bewertungen notwendig; einfaches Verfahren
X Lotterie-, Spiel- oder Wett-Techniken	Lineare Nutzenfunktion	Vorgegebene Spiel-, bzw. Wettsituation	Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus eingegangenen Wetten	Finanzielle Anreize		Groß	Einbeziehung von Nutzenvorstellungen; keine numerische Spezifizierung der Bewertungen notwendig
Bewertung von Alternativen	Möglichkeit der Ordnung von Entscheidungsalternativen	Geordnete Alternativen	Lineares Programm als Goal-Programming-Ansatz	Systematische Ordnung von Alternativen		Mäßig	Keine numerische Spezifizierung der Bewertungen notwendig; speziell für Entscheidungssituationen geeignet

Unter Beachtung der auch empiririsch festgestellten Schwierigkeiten einer numerischen Spezifizierung der Bewertungen,[1] scheinen besonders der Fehlerminimierungsansatz von Brockhoff sowie das hier vorgestellte Verfahren der Bewertung von Alternativen geeignete Ansätze zur Überwindung dieser Probleme zu sein. Bei beiden Verfahren wird die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Optimierung einer Zielfunktion unter Berücksichtigung der durch Bewertungen bestimmten Nebenbedingungen erhalten. Doch während der Fehlerminimierungsansatz als Ausgangsinformation einen (eventuell mehrstufigen) Vergleich der zu bewertenden Objekte erfordert, geht das zweite Verfahren indirekt von der Beurteilung der durch die Objekte (Elemente aus dem Zustandsraum) beeinflußten Alternativen aus. Ob eine der beiden Vorgehensweisen der anderen überlegen ist, kann nur unter den Bedingungen einer speziellen Problemstellung geklärt werden. Ein Vorteil des neu vorgestellten Verfahrens ist vor allem dadurch gegeben, daß eine strenge Beachtung der Transitivitätsbedingung nicht verlangt wird. Dieses bedeutet zusammen mit dem Verzicht auf einen vollständigen paarweisen Vergleich eine erhebliche Reduzierung sowohl der Anforderungen an den Urteilenden in Bezug auf seine methodischen Kenntnisse als auch des allgemeinen Aufwands.

---

[1] Viele Personen, die zunächst eine direkte numerische Quantifizierung ihrer Vorstellungen vorziehen, haben später nur noch wenig Vertrauen in ihre Angaben. Aus diesem Grunde erscheinen die indirekten Methoden Spetzler und Stael von Holstein mehr geeignet. Vgl. Spetzler, C.S. und Stael von Holstein, C.-A.S., a.a.O., S. 351.

3. Axiomensysteme zur Konstruktion subjektiver Wahrscheinlichkeiten

3.1. Intention beim Aufbau der Axiomensysteme

Subjektive Wahrscheinlichkeiten wurden bisher als Maße eines individuellen Vertrauensgrades aufgefaßt, die gewissen Konsistenzregeln gerecht werden sollten. Damit stellt sich aber die Frage nach den Grundlagen, die eine Einführung von numerischen Wahrscheinlichkeiten rechtfertigen. Gesucht wird eine Theorie, die das Problem der klassischen (objektiven) Wahrscheinlichkeitstheorie, individuelle Entscheidungen mit dem Hinweis auf das schwache Gesetz der großen Zahlen gleichartig zu behandeln, vermeidet. Die Basis derartiger Ansätze bildet der "primitive Begriff" einer qualitativen Wahrscheinlichkeit.

Je nach Art der Zielsetzung wird diese qualitative Wahrscheinlichkeit unter einem behavioristischen (entscheidungstheoretischen) oder unter einem mehr formalen, mathematischen Aspekt eingeführt.[1] So hat Koopman ein allgemeines nicht entscheidungsorientiertes Axiomensystem vorgestellt, das sich auch für die Begründung subjektiver Wahrscheinlichkeiten eignet.[2] Eine stärkere Betonung der formalen Richtung beinhaltet auch die Darstellung und der Vergleich mehrerer Systeme bei Gottinger[3], wobei er sich allerdings stets bemüht, nachzuprüfen, inwieweit die relevanten Axiome behavioristisch interpretiert werden können. Im Zusammenhang mit den übrigen, entscheidungs-

---

1 Es sei hier angemerkt, daß eine axiomatische Behandlung der qualitativen Wahrscheinlichkeit nicht unbedingt an eine subjektivistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit gebunden ist, obwohl die Bayesianer sie plausibel im subjektiven Sinne begründet haben. Vgl. Gottinger, H.-W., Konstruktion subjektiver Wahrscheinlichkeiten, in: Mathematische Operationsforschung und Statistik, Bd. 5, 1974, S. 509-539, hier S. 511.

2 Das Axiomensystem qualitativer Wahrscheinlichkeiten bei Koopman eignet sich gleichermaßen für subjektive und für logische (intuitive) Wahrscheinlichkeiten. Vgl. Koopman, B.O., The Axioms and Algebra of Intuitiv Probability, in: Annals of Mathematics, Vol. 41, 1940, S. 269-292. In die gleiche Richtung zielt auch der Ansatz von :Good, I.J., Probability and the Weighting of Evidence, London und New York 1950.

3 Vgl. Gottinger, H.-W., Konstruktion subjektiver Wahrscheinlichkeiten, a.a.O., S. 511 ff.

orientierten Teilen dieser Abhandlung scheint hier die mehr behavioristische Betrachtungsweise angemessen zu sein. Diese im wesentlichen von Ramsey, De Finetti und Savage beeinflußte Richtung steht deshalb im Mittelpunkt der folgenden Ausführungen.

Ausgangspunkt für die Definition einer qualitativen Wahrscheinlichkeitsstruktur ist das Tripel $(Z, U, \leq o)$ mit

- Z : ein Ereignisraum (Z sei endlich) ;
- U : ein System von Teilmengen $Z_i \subseteq Z$, das entweder eine endliche Boolesche Algebra oder sogar eine Boolesche σ-Algebra von Z darstellt;
- "$\leq o$": eine zweistellige Relation auf U mit folgender Interpretation: "$Z_i \leq o\ Z_j$" bedeutet, daß für zwei Ereignisse $Z_i, Z_j \in U$ gilt:
  "Z_i ist höchstens so wahrscheinlich wie Z_j" .

Die Frage, ob U als eine endliche Boolesche Algebra gefordert werden soll, somit also ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß auf U konstruiert wird, oder ob von U die Eigenschaften einer Booleschen σ-Algebra verlangt werden sollen, was zu einem abzählbar additiven Wahrscheinlichkeitsmaß auf U führt, ist in der Literatur der Anlaß einer Reihe von Kontroversen.[1] Zwar ist die abzählbare Additivität (σ-Additivität) von Wahrscheinlichkeitsmaßen vom theoretischen Standpunkt aus eine außerordentlich angenehme Eigenschaft, da mit ihrer Hilfe viele Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie bequem bewiesen werden können, doch erscheint ihre Forderung empirisch nicht genügend abgesichert und wird für viele interessante wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme als unnatürlich empfunden.[2] Da sich die Wahrscheinlichkeitsbewertungen in einer endlichen Welt auf endliche Bereiche beschränken, begnügt sich Savage in Übereinstimmung mit De Finetti und Koopman mit

---

1 Vgl. Gottinger, H.-W., Subjektive Wahrscheinlichkeiten, Göttingen 1974, S. 46 f.

2 Ebenda, S. 46.

der Forderung der endlichen Additivität.[1] Obwohl auch für sein Entscheidungsmodell die Existenz eines σ-additiven Wahrscheinlichkeitsmaßes gezeigt werden konnte,[2] scheint für die Untersuchung der Axiomensysteme in Hinsicht auf die Probleme bei der Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten in praxisrelevanten Entscheidungssituationen die Betrachtung von endlich additiven Wahrscheinlichkeitsmaßen auszureichen. Deshalb sei U im folgenden eine endliche Boolesche Algebra von Z.

Definition 3.1.: **endliche Boolesche Algebra:**

Ein System U von Teilmengen $Z_1, \ldots, Z_m$ von Z heißt endliche **Boolesche Algebra von Z, wenn gilt:**

(1) $Z \in U$,

(2) $Z_j \in U \rightarrow \bar{Z}_j \in U$,

(3) $\bigcup_{j=1}^{m} Z_j \in U$.

---

1 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 43.

2 Vgl. Fine, T., A Note on the Existence of Quantitative Probability, in: Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, 1971, S. 1182-1186.

3.2. Erste Ansätze einer behavioristisch orientierten subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie

Der Aufbau zahlreicher Axiomensysteme subjektiver Wahrscheinlichkeiten ist wesentlich durch die Ansätze von De Finetti und Ramsey geprägt, die auf zwei verschiedenen Wegen die Grundlagen eines Entscheidungsmodells bei Unsicherheit darstellen.

Ein auf Ramsey zurückzuführender Gedanke geht von der Suche nach einem Zufallsereignis mit der subjektiven Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ aus.[1] Mit Hilfe dieses Ereignisses wird eine Nutzenfunktion der Ergebnisse bestimmt, die für die Messung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten der Naturzustände herangezogen wird. Allerdings wird von Ramsey nur kurz skizziert, wie eine Nutzenfunktion festgelegt werden kann, ohne daß die Existenz eines numerischen Wahrscheinlichkeitsmaßes vorausgesetzt werden muß. Dabei geht er davon aus, daß ein Individuum die Schätzung der Wahrscheinlichkeiten auf seinen intuitiven hypothetischen Grad des Glaubens stützt.[2]

De Finettis Ansatz geht dagegen von der unmittelbaren Betrachtung subjektiver Wahrscheinlichkeiten aus. Seine Theorie besteht aus einer Reihe von Regeln, die eine konsistente subjektive Bewertung der Ereignisse festlegen.[3] Er führt eine qualitative Wahrscheinlichkeitsordnung ein, über die er zu den subjektiven Wahrscheinlichkeiten für alle Ereignisse gelangt. Das somit festgelegte Wahrscheinlichkeitsmaß kann dann zur Nutzenmessung herangezogen werden.

---

1 Vgl. Ramsey, F.P., a.a.O., S. 77 ff.

2 Ebenda, S. 82 ff.

3 Vgl. De Finetti, B., a.a.O., S. 103 ff.

3.3. Die Theorie von Savage

3.3.1. Präferenzordnungen zwischen Entscheidungsakten und Ergebnissen

Indem er den Ansatz von Ramsey systematisch erweiterte, gelang es Savage durch die Definition von Präferenzordnungen zwischen Ergebnissen, eine Verbindung von Präferenzordnungen zwischen Entscheidungsakten und einer qualitativen Wahrscheinlichkeitsordnung zwischen den Naturzuständen herzustellen und somit einen geschlossenen entscheidungstheoretisch orientierten Aufbau des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu erreichen.

Ausgangspunkt für sein System ist eine durch das Tripel (Z, A, e) gekennzeichnete Entscheidungssituation.[1] Weiter führt er eine zweistellige Relation "$\precsim$" auf A ein, für die er fordert:

Postulat P 1 : schwache Präferenzordnung auf A:[2]

Die zweistellige Relation "$\precsim$" ist eine schwache Präferenzordnung zwischen Entscheidungsakten, d.h. für a_i, a_j, $a_k \in A$ gilt:

(a) Vollständigkeit:

$$a_i \precsim a_j \quad \vee \quad a_j \precsim a_i \ ;$$

(b) Transitivität:

$$(a_i \precsim a_j \quad \wedge \quad a_j \precsim a_k) \Rightarrow \quad a_i \precsim a_k \ .$$

Dieses Postulat ist im normativen Sinne zu verstehen. Eine Verletzung der Forderungen wird von Savage als "logisch widersprüchliche" Handlung angesehen. Für ähnlich allgemein akzeptierbar hält er die Aussage des Sicherheitsprinzips, das er mit Hilfe der Definition einer bedingten Äquivalenz von Entscheidungsakten einführt.

---

1 Im folgenden wird die Funktion e nicht nur auf ihrem vollständigen Definitionsbereich sondern auch auf Teilbereichen e_i, geschrieben als $e_i \in e$, betrachtet, deren Definitionsbereich sich aus dem jeweiligen Zusammenhang ergibt.

2 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 18; wie er zeigt, lassen sich aus "$\precsim$" auch die Relationen "$\succsim$", "$\prec$", "$\succ$" und "$\sim$" leicht ableiten.

Definition 3.2.: bedingte Äquivalenz von Entscheidungsakten:

Zwei Entscheidungsakte $a_i, a_j \in A$ heißen äquivalent in $Z_\ell \subseteq Z$, wenn $\forall z \in Z_\ell$ gilt

$$a_i(z) = a_j(z) .$$

Postulat P 2 : das Sicherheitsprinzip:[1]

Wenn es $a_i, a_i^*, a_j, a_j^* \in A$ und $Z_\ell \subseteq Z$ gibt mit:

(1) $a_i \precsim a_j$,

(2) a_i, a_j äquivalent in $\bar{Z}_\ell \wedge a_i^*, a_j^*$ äquivalent in $\bar{Z}_\ell$,

(3) a_i, a_i^* äquivalent in $Z_\ell \wedge a_j, a_j^*$ äquivalent in Z_ℓ,

dann gilt

$$a_i^* \precsim a_j^* .$$

Bei der Formulierung des Sicherheitsprinzips fällt implizit die Definition einer bedingten Präferenz an.

Definition 3.3.: bedingte Präferenzordnung:

Eine Präferenzbeziehung $a_i \precsim a_j$ $(a_i, a_j \in A)$ gilt unter der Voraussetzung, daß $Z_\ell \subseteq Z$ eingetroffen ist,

$(a_i \precsim a_j) \mid Z_\ell$, wenn $\exists\, a_i^*, a_j^* \in A$ mit

(1) $(a_i = a_i^* \wedge a_j = a_j^*)$ auf Z_ℓ ,

(2) $a_i^* = a_j^*$ auf $\bar{Z}_\ell$ und

(3) $a_i^* \precsim a_j^*$.

---

[1] Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 23.

Weiter folgt aus dem Postulat P 2 eine Art Dominanzforderung für die Präferenzrelation auf A.

Satz 3.1.:

Es seien $Z_1, \ldots, Z_r$ eine Partition von $Z_\ell \subseteq Z$; $a_i, a_j \in A$, dann gilt :

(1) Aus $(a_i \precsim a_j) \mid Z_k \quad \forall k = 1, \ldots, r$

folgt $(a_i \precsim a_j) \mid Z_\ell$.

(2) Aus $(a_i \precsim a_j) \mid Z_k \quad \forall k = 1, \ldots, r$

und $\exists j,\ j \in (1, \ldots, r) : (a_i \prec a_j) \mid Z_j$

folgt $(a_i \prec a_j) \mid Z_\ell$.[1]

Bisher galt die Betrachtung der Konstruktion einer Präferenzordnung zwischen Entscheidungsakten. Im folgenden gilt es mit dieser Beziehung auch eine Präferenzordnung zwischen den Ergebnissen (Konsequenzen) festzulegen. Dazu definiert Savage zunächst einen konstanten Entscheidungsakt.

Definition 3.4.: Konstanter Entscheidungsakt:

Ein Entscheidungsakt $a_i \in A$ heißt konstant, wenn für $e_{ij} = e_i(z_j)$ und c eine beliebige Konstante gilt:

$$e_i(z_j) = c \quad \forall z_j \in Z .$$

Diese Beziehung, die im folgenden mit

$$a_i \equiv e_i$$

beschrieben sei, bildet die Grundlage für die Konstruktion einer Präferenzordnung zwischen Ergebnissen und das darauf basierende Postulat 3.

---

1 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 24; wenn die Partition als Vereinigung paarweise elementfremder Teilmengen definiert ist, dann läßt sich die Aussage einfach mittels Induktionsbeweises herleiten.

Definition 3.5.: Präferenzordnung zwischen Ergebnissen:

Für zwei Ergebnisfunktionen e_i, e_j gilt:

$$e_i \precsim e_j \iff (1)\ e_i \equiv a_i \wedge e_j \equiv a_j\ ;$$
$$(2)\ a_i \precsim a_j\ .$$

Postulat P 3 :

Wenn für a_i, $a_j \in A$ $a_i \equiv e_i$ und $a_j \equiv e_j$ gilt, dann ist folgende Beziehung richtig:

$$a_i \precsim a_j \iff e_i \precsim e_j\ .^1$$

In Verbindung mit dem Satz 3.1. ergibt sich unter Berücksichtigung von Postulat P 3 eine weitere Dominanzforderung:

Satz 3.2.:

Es seien $Z_1, \ldots, Z_r$ eine Partition von $Z_\ell \subseteq Z$; $Z_\ell \neq \emptyset$;

a_i, $a_j \in A$; e_i, e_j zwei Ergebnisfunktionen, dann gilt:

(1) Schwache Dominanz

$$\bigwedge_{k=1,\ldots,r} \left[\bigwedge_{z \in Z_k} (e_i \equiv a_i \wedge e_j \equiv a_j \wedge e_i \precsim e_j) \mid Z_k \right]$$

$$\Rightarrow (a_i \precsim a_j) \mid Z_\ell\ ;$$

(2) Starke Dominanz

$$\bigwedge_{k=1,\ldots,r} \left[\bigwedge_{z \in Z_k} (e_i \equiv a_i \wedge e_j \equiv a_j \wedge e_i \precsim e_j) \mid Z_k \right] \wedge$$

$$\bigvee_{k \in (1,\ldots,r)} \left[\bigwedge_{z \in Z_k} (e_i \equiv a_i \wedge e_j \equiv a_j \wedge e_i \prec e_j) \mid Z_k \right]$$

$$\Rightarrow (a_i \prec a_j) \mid Z_\ell\ .^2$$

---

1 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 26.

2 Indem Satz 3.1. berücksichtigt wird, ist dieses Theorem offensichtlich; vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 26.

Mit diesem Satz ist der speziell entscheidungstheoretisch orientierte Teil abgeschlossen.

3.3.2. Die Einführung der qualitativen Wahrscheinlichkeitsordnung

Die zweite Gruppe der Savage-Axiome ist auf den wahrscheinlichkeitstheoretischen Teil seiner Entscheidungstheorie bezogen. Dabei wird die subjektive Wahrscheinlichkeit als eine zweistellige Relation ("nicht wahrscheinlicher als") auf der Menge U derart eingeführt, daß sie dann und nur dann existiert, wenn eine übereinstimmende Präferenzrelation ("$\precsim$") auf A definiert werden kann. Dazu wird zunächst der Begriff der Lotterieaussicht mit dem des Entscheidungsaktes verbunden.

Definition 3.6.:

Einer Person eine Wette für den Fall anzubieten, daß $Z_1 \in U$ eintrifft, bedeutet, daß ein Entscheidungsakt a_{Z_1} existiert, für den gilt:

$$e_{Z_1}(z) = e_{Z_1} \; \forall_z \in Z_1 ,$$

$$e_{Z_1}(z) = e'_{Z_1} \; \forall_z \in \bar{Z}_1$$

und $e_{Z_1}' \prec e_{Z_1}$.

Das folgende Postulat bewirkt dann, daß die Präferenzordnung zwischen den Entscheidungsakten von dem Wert der Ergebnisse unberührt bleibt, egal welches Ereignis auch immer eintrifft.[1]

---

[1] Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 31.

Postulat P 4 :

Wenn e_i, e_i', e_j, e_j'; $Z_\ell, Z_k \in U$ und

$a_{iZ_\ell}, a_{iZ_k}, a_{jZ_\ell}, a_{jZ_k}$ derart existieren, daß

(1) $e_i' \prec e_i$, $e_j' \prec e_j$;

(2a) $e_{iZ_\ell}(z) = e_i$, $e_{jZ_\ell}(z) = e_j$ $\forall z \in Z_\ell$;

$e_{iZ_\ell}(z) = e_i'$, $e_{jZ_\ell}(z) = e_j'$ $\forall z \in \bar{Z}_\ell$;

(2b) $e_{iZ_k}(z) = e_i$, $e_{jZ_k}(z) = e_j$ $\forall z \in Z_k$;

$e_{iZ_k}(z) = e_i'$, $e_{jZ_k}(z) = e_j'$ $\forall z \in \bar{Z}_k$;

(3) $a_{iZ_\ell} \preceq a_{iZ_k}$

erfüllt sind, dann gilt auch

$a_{jZ_\ell} \preceq a_{jZ_k}$.

Unter Verwendung des Postulats P 4 läßt sich eine qualitative Wahrscheinlichkeitsordnung für beliebige Entscheidungsakte und Ereignisse definieren.

Definition 3.7.: qualitative Wahrscheinlichkeitsordnung:

Eine qualitative Wahrscheinlichkeitsordnung auf U, verstanden als Relation $Z_\ell \preceq_o Z_k$ (Z_ℓ ist "nicht wahrscheinlicher als" Z_k) zwischen Ereignissen $Z_\ell, Z_k \in U$, existiert dann und nur dann, wenn es $e_*' \prec e_*$ und $a_{Z_\ell}, a_{Z_k} \in A$ derart gibt, daß gilt:

$e_{Z_\ell}(z) = e_* \; \forall z \in Z_\ell$, $e_{Z_\ell}(z) = e_*' \; \forall z \in \bar{Z}_\ell$

$e_{Z_k}(z) = e_* \; \forall z \in Z_k$, $e_{Z_k}(z) = e_*' \; \forall z \in \bar{Z}_k$

$\Rightarrow a_{Z_\ell} \preceq a_{Z_k}$.

Um den trivialen Fall zu vermeiden, daß alle Ergebnisse zueinander indifferent sind, wird eine zusätzliche technische Bedingung benötigt.

Postulat P 5 :

Es gibt mindestens zwei Ereignisse e_i, e_j , so daß

$$e_i \prec e_j$$

gilt.[1]

Wenn die Postulate P 1 bis P 5 gegeben sind, kann gezeigt werden, daß das Tripel $(Z, U, \leq o)$ tatsächlich die Eigenschaften einer qualitativen Wahrscheinlichkeitsordnung hat, d.h. für $Z_1, Z_2, Z_3 \in U$ gilt:

(1) "$\leq o$" ist eine schwache Ordnung (Transitivität, Vergleichbarkeit);

(2) $Z_1 \leq o\ Z_2 \wedge (Z_1 \cap Z_3 = Z_2 \cap Z_3 = \emptyset)$

$\Longleftrightarrow\ Z_1 \cup Z_3 \leq o\ Z_2 \cup Z_3$;

(3) $\emptyset \leq o\ Z_i \quad \forall Z_i \in U$, $\emptyset < o\ Z$.

3.3.3. Quantitative subjektive Wahrscheinlichkeit

Zu untersuchen sind jetzt noch die Bedingungen, die die Existenz eines endlich additiven Maßes P auf einer Booleschen Algebra U sicherstellen, das die Eigenschaften eines quantitativen Wahrscheinlichkeitsmaßes[2] hat und mit $(Z, U, \leq o)$ verträglich ist.

---

1 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 31.

2 Ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Menge U ist eine Funktion $P : U \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(1) $P(Z_i) \geq 0 \quad \forall Z_i \in U$;

(2) $P(U) = 1$;

(3) $P(Z_i \cup Z_j) = P(Z_i) + P(Z_j)$ für $Z_i, Z_j \in U$ und $Z_i \cap Z_j = 0$.

Definition 3.8.: Verträglichkeit:

Seien Z_i, $Z_j \in U$ gegeben, dann heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf U:

(a) "strikt verträglich" mit $(Z, U, \leq_o)$, wenn

$$Z_i \leq_o Z_j \iff P(Z_i) \leq P(Z_j) ;$$

(b) "fast verträglich" mit $(Z, U, \leq_o)$, wenn

$$Z_i \leq_o Z_j \Rightarrow P(Z_i) \leq P(Z_j).$$ [1]

Um diese Verträglichkeit nachzuweisen, geht Savage von dem Begriff der uniformen Zerlegung von Ereignissen und von bestimmten Eigenschaften der Relation $\leq_o$ aus.

Definition 3.9.: fast uniforme Zerlegung:

Eine h-fache fast uniforme Zerlegung eines Ereignisses $Z_i \in U$ ist eine Zerlegung in Teilmengen Z_{ij}, $(j = 1,\ldots, h)$ so daß für $r < h$ gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{r} Z_{ij} \leq_o \bigcup_{j=1}^{r+1} Z_{ij} .$$

Definition 3.10.:

(a) "$<_o$" ist fein:

Dann und nur dann, wenn $\forall Z_i \in U$, $\emptyset <_o Z_i$, eine Partition $\{Z_j^*, j = 1,\ldots,h\}$ von Z mit

$$Z_j^* \leq_o Z_i$$

existiert, heißt "$\leq_o$" fein, und $(Z, U, \leq_o)$ ist eine feine qualitative Wahrscheinlichkeitsstruktur bezüglich einer Familie von Zerlegungen $\{Z_j^*\}$.

---

[1] Im Sinne der Meßtheorie kann ein strikt verträgliches Wahrscheinlichkeitsmaß P als eine reelle nichtnegative und additive Mengenfunktion

$$(S, U, \leq_o) \xrightarrow{P} ([0,1], \mathfrak{A}, \leq)$$

verstanden werden, wobei $\mathfrak{A}$ die Klasse der Borelschen Mengen von $[0,1]$ bezeichnet.

(b) Fast äquivalente Ereignisse:

Zwei Ereignisse $Z_i, Z_j \in U$ heißen "fast äquivalent", geschrieben als "$Z_i \sim_o Z_j$" , dann und nur dann, wenn für alle $Z_k, Z_\ell \in U$, $\emptyset <_o Z_k, Z_\ell$, mit $Z_i \cap Z_k = Z_j \cap Z_\ell = \emptyset$ gilt:

$$Z_j \leq_o Z_i \cup Z_k \wedge Z_i \leq Z_j \cup Z_\ell \ .$$

Nebenbemerkung: Äquivalente Ereignisse ($Z_k = Z_\ell$) sind natürlich auch fast äquivalent.

(c) "$\leq_o$" ist fest:

Die Relation "$\leq_o$" soll als fest bezeichnet werden, wenn jedes Paar von fast äquivalenten Ereignissen auch äquivalent ist.

Mit Hilfe der Definitionen lassen sich die gewünschten Aussagen bezüglich der Verträglichkeitsbedingungen treffen.

Satz 3.3.: "fast verträglich":[1]

Es sei $(Z, U, \leq_o)$ eine feine qualitative Wahrscheinlichkeitsstruktur, dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß P, das mit dieser Struktur fast verträglich ist.

Während auch die bei De Finetti und Koopmann angegebenen Bedingungen zu dieser Aussage führen, erreicht Savage sogar die strikte Verträglichkeit.

Satz 3.4.:

(a) "strikt verträglich":

Wenn "$\leq_o$" sowohl "fein" als auch "fest" ist, dann ist das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß P, das mit $(Z, U, \leq_o)$ fast verträglich ist, mit dieser qualitativen Wahrscheinlichkeitsstruktur auch strikt verträglich, und es existieren Zerlegungen von Z in beliebig viele äquivalente Ereignisse.

---

[1] Zum Beweis dieser Aussage vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 34 ff.

(b) Existenz einer feinen und festen Relation "$\leq o$" :

Die Relation "$\leq o$" ist dann und nur dann fein und fest, wenn für alle $Z_i, Z_j \in U$ mit $Z_i <o Z_j$ Partitionen $\{Z_k^*\}$ von Z existieren mit

$$Z_i \cup Z_k^* <o Z_j \quad , \quad \forall Z_k^* \in \{Z_k^*\} \; .^1$$

Die Bedingung für die Existenz einer feinen und festen Relation ist der Inhalt des Postulats P 6' bei Savage. Aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht reicht dieses Postulat voll aus, doch um in einer allgemeinen Formulierung die Entscheidungsakte mit einbeziehen zu können, stellt er mit Postulat P 6 eine etwas stärkere Forderung auf:

Postulat P 6 :

Es seien $a_i, a_j \in A$ mit $a_i \prec a_j$ und e_k , eine beliebige Ergebnisfunktion, gegeben, dann gibt es eine Partition $\{Z_r \mid r = 1,\ldots,h\}$ von Z derart, daß falls

(a) a_i auf einem beliebigen $Z_r \in \{Z_r\}$ derart zu a_i' modifiziert wird, daß

$$a_i'(z) = e_k \quad \forall z \in Z_r$$
$$a_i'(z) = a_i(z) \quad \forall z \in \bar{Z}_r$$

gilt, die Beziehung $a_i' \prec a_j$ erhalten bleibt;

(b) a_j auf einem beliebigen $Z_r \in \{Z_r\}$ derart zu a_j' modifiziert wird, daß

$$a_j'(z) = e_k \quad \forall z \in Z_r$$
$$a_j'(z) = a_j(z) \quad \forall z \in \bar{Z}_r$$

gilt, die Beziehung $a_i \prec a_j'$ erhalten bleibt.[2]

---

1 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 38 f.

2 Ebenda, S. 39 f.

3.4. Weitere Systeme zur Konstruktion eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes

Als eine Weiterentwicklung des Systems von Ramsey können auch die Arbeiten von Suppes und Winet sowie von Davidson und Suppes angesehen werden. Suppes und Winet verfolgen in erster Linie das Ziel der Axiomatisierung von Nutzenvorstellungen über die Betrachtung von Nutzendifferenzen. Mit dieser Intention stellen sie ein System auf, dessen elf Axiome eine unendliche Differenzenstruktur $(e, \precsim, \leq)$ begründen, wobei

- " $\precsim$ " als zweistellige Präferenzrelation zwischen Ergebnissen zu interpretieren ist und
- " $\leq$ " als vierstellige Relation zu verstehen ist, die sich auf die Nutzendifferenzen zwischen Paaren von Ergebnissen bezieht.[1]

Indem sie implizit von der ethisch neutralen Proposition (Ereignis mit der subjektiven Wahrscheinlichkeit von $p = 1/2$) ausgehen, erreichen sie, daß durch die Axiome die Existenz einer bis auf positive lineare Transformationen eindeutig bestimmten reellen Nutzenfunktion auf e gewährleistet wird. Die problemlos mögliche Ergänzung dieses Systems durch ein zusätzliches Postulat führt dann zu einem quantitativen Wahrscheinlichkeitsmaß.[2]

Durch eine Abwandlung der unendlichen Differenzenstruktur zu einem endlichen System und der zusätzlichen Betrachtung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten erreichen Davidson und Suppes eine simultane Axiomatisierung von Nutzen und subjektiven Wahrscheinlichkeiten.[3] Zusätzlich zu dem die Ausgangssituation beschreibenden Tripel (A, Z^+, e) und dem Tripel $(Z, U, \leq o)$ führen sie zunächst noch

---

1 Vgl. Suppes, P. und M. Winet, a.a.O., S. 263.

2 Vgl. Fishburn, P.C., Decision and Value Theory, a.a.O., S. 174.

3 Vgl. Davidson, D. und P. Suppes, a.a.O.

- eine fünfstellige Relation M ein, die eine Indifferenz zwischen Alternativen beschreibt (z.B. $e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4$ <=> jemand ist indifferent zwischen $e_1|Z_1$, $e_2|\bar{Z}_1$ und $e_3|Z_1$, $e_4|\bar{Z}_1$) ; [1]
- das ethisch neutrale Element $Z_* \in U$ ein.

Außerdem wird zur Vereinfachung der folgenden Darstellung definiert:

- die Nachfolgerelation I :

$$e_i\ I\ e_j \iff e_i <_o e_j \wedge \forall e_k : e_i <_o e_k \Rightarrow e_j \leq_o e_k ;$$

- die Mächtigkeit von I :

$$e_i\ I^1 e_j \iff e_i\ I\ e_j$$

$$e_i\ I^n e_j \iff \exists e_k \text{ mit } e_i\ I^{n-1} e_k \text{ und } e_k\ I\ e_j ;$$

- die Verhältnisfunktion r:

$$r(e_1, e_2; e_3, e_4) = \alpha$$

$\iff \exists n,m\ (n,m = 0, 1, 2, \ldots)$ mit

(i) $\alpha = m/n$

(ii) $e_1 \neq e_2 \vee e_3 \neq e_4$

(iii) $[e_1 I^m e_2 \wedge e_3 I^n e_4] \vee$
$[e_2 I^m e_1 \wedge e_4 I^n e_3] \vee$
$[e_1 = e_2, m=0 \wedge (e_4\ I^n\ e_3 \vee e_3 I^n\ e_4)] \vee$
$[e_3 = e_4, n=0 \wedge (e_2\ I^m\ e_1 \vee e_1 I^m\ e_2)]$;

dabei kann r als das Verhältnis der Anzahl der Intervalle zwischen e_1 und e_2 und der Zahl der Intervalle zwischen e_3 und e_4 interpretiert werden.

---

[1] Bei ihrer Darstellung des Systems beziehen sich Davidson und Suppes auf eine 2 x 2 Entscheidungssituation:

	Z_1	$\bar{Z}_1$
a_1	e_1	e_2
a_2	e_3	e_4

; vgl. Davidson, D. und P. Suppes, a.a.O., S. 265.

Mit Hilfe dieser Begriffe werden die Axiome für eine "endliche rationale Wahlhandlungsstruktur" angegeben.

Definition 3.11: endliche rationale Wahlhandlungsstruktur:[1]

Es seien e, Z, U, $\leq o$, M und Z_* gegeben, dann und nur dann bildet (e, Z, U, $\leq o$, M, Z_*) eine endliche rationale Wahlhandlungsstruktur, wenn für alle e_i, $e_i' \in e$, $i = 1,2,3,4$ und für alle Z_1, $Z_1' \in U$ die folgenden Axiome gelten:

A1 : "$\leq o$" ist eine schwache Ordnung auf e ;

A2 : $e_1 \nparallel e_2 \Rightarrow e_1, e_2\ M(Z_*)\ e_2, e_1$;

A3 : $e_1, e_2\ M(Z)\ e_3, e_4 \Rightarrow e_1 \sim e_3$;

A4 : $e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4 \Rightarrow e_1 \nparallel e_2 \wedge e_3 \nparallel e_4$;

A5 : $e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4 \Rightarrow e_3, e_4\ M(Z_1)\ e_1, e_2$;

A6 : $e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4 \Rightarrow e_2, e_1\ M(\bar{Z}_1)\ e_4, e_3$;

A7 : $[e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4 \wedge e_3, e_4\ M(Z_1)\ e_3'\ e_4']$
$\Rightarrow e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3', e_4'$;

A8 : $[e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4 \wedge e_2 \nparallel e_4 \wedge e_1 <o\ e_3]$
$\Rightarrow e_4 <o\ e_2$;

A9 : $[e_1\ I\ e_2 \wedge c_3\ I\ e_4 \wedge e_1 \nparallel e_4 \wedge e_2 \nparallel e_3]$
$\Rightarrow e_1, e_4\ M(Z_*)\ e_3, e_2$;

A10: $[r\ (e_1,e_2; e_3,e_4) \sim r\ (e_1', e_2'; e_3', e_4')$
$\wedge e_1, e_4\ M(Z_1)\ e_2, e_3 \wedge e_1' \nparallel e_4' \wedge e_2' \nparallel e_3']$
$\Rightarrow e_1', e_4'\ M(Z_1)\ e_2', e_3'$;

A11: $[e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4 \wedge e_1', e_2'\ M(Z_1')\ e_3', e_4'$
$\wedge Z_1 \subseteq Z_1']$
$\Rightarrow r\ (e_4, e_2; e_1, e_3) \leq r\ (e_4', e_2'; e_1', e_3')$,
vorausgesetzt daß $(e_1 \nparallel e_3 \vee e_2 \nparallel e_4) \wedge$
$(e_1' \nparallel e_3' \vee e_2' \nparallel e_4')$;

---

[1] Vgl. Davidson, D. und P. Suppes, a.a.O., S. 267.

A12 : $\exists e_i \in e$, $i = 1,\ldots,4$ mit

$$e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4 \wedge (e_1 \neq e_3 \vee e_2 \neq e_4) .$$

Auf Grund dieses Axiomensystems gelingt es Davidson und Suppes, die Existenz einer reellen Nutzenfunktion und eines nicht negativen additiven Wahrscheinlichkeitsmaßes zu zeigen.

Satz 3.5 : [1]

Es sei $(e, Z, U, \leq_o, M, Z_*)$ eine endliche rationale Wahlhandlungsstruktur und n^+ die Anzahl der Elemente in e, dann

(1) existiert ein geordnetes Paar (ϕ,p) von **reellwertigen** Funktionen, wobei ϕ auf e und p auf U derart definiert seien, daß $\forall\ e_i \in e$, $i = 1,\ldots,4$, und $Z_1, Z_2 \in U$ gilt:

(a) $e_1 <_o e_2 \iff \phi(e_1) < \phi(e_2)$,

(b) $p(Z_1) \geq 0$,

(c) $p(Z) = 1$,

(d) $p(Z_1) + p(\bar{Z}_1) = 1$,

(e) $Z_1 \subseteq Z_2 \Rightarrow p(Z_1) \leq p(Z_2)$,

(f) $e_1, e_2\ M(Z_1)\ e_3, e_4$

$$\iff \phi(e_1) \neq \phi(e_2) \wedge \phi(e_3) \neq \phi(e_4) \wedge$$

$$p(Z_1)\ \phi(e_1)+p(\bar{Z}_1)\ \phi(e_2) = p(Z_1)\ \phi(e_3)+p(\bar{Z}_1)\phi(e_4)$$

(2) **gilt für** $n^+ \geq 5$ falls (ϕ_1, p_1) und (ϕ_2, p_2) zwei geordnete Paare sind, die die Bedingungen unter (1) erfüllen:[2]

(a) $p_1 = p_2$,

(b) $\exists\ a,b \in \mathbb{R}$ mit $a > o$ derart, daß $\forall\ e_i \in e$ gilt:

$$\phi_1(e_i) = a\ \phi_2(e_i) + b .$$

---

1 Die Darstellung und den Beweis des Satzes siehe bei: Davidson, D. und P. Suppes, a.a.O., S. 271 ff.

2 Die Voraussetzung $n^+ \geq 5$ ist notwendig, da M eine fünfstellige Relation ist.

Im Gegensatz zu dem System von Savage wird also eine schwache Präferenzordnung auf der Menge A für die Ableitung dieses Wahrscheinlichkeitsmaßes nicht vorausgesetzt.

Ein weiteres System, das der Theory von Savage in vielen Punkten mehr ähnelt, wurde von Suppes[1] vorgestellt. Doch statt der von Savage eingeführten Präferenzrelation " $\precsim$ " auf A führt er eine zweistellige Präferenzrelation "$\precsim o$" auf dem kartesischen Produkt A X A ein, die eine Menge geordneter Paare $(a_i, a_j) \varepsilon A \times A$ derart erzeugt, daß $(a_i, a_j) \precsim o (a_i', a_j')$ bedeutet: $(1/2\ a_i', 1/2\ a_j')$ wird gegenüber $(1/2\ a_i, 1/2\ a_j)$ schwach vorgezogen. Über diese Möglichkeit des Vergleichs von Entscheidungsakten kommt er auf ein System von elf Axiomen, das eine "rationale subjektive Wahlhandlungsstruktur" $(Z, e, A, \precsim o)$ definiert.[2] Auf der Grundlage dieser Axiome kann er zeigen, daß es eine reelle Funktion ϕ auf A gibt, mit

(1) $\forall\ a_i, a_j, a_i', a_j' \varepsilon A$:

$(a_i, a_j) \precsim o\ (a_i', a_j') \Longleftrightarrow \phi(a_i) + \phi(a_j) \geq \phi(a_i') + \phi(a_j')$

(2) ϕ ist eindeutig bis auf positive lineare Transformationen bestimmt;

(3) wenn es eine auf e definierte Funktion u gibt, so daß $\forall\ e_i \varepsilon e : u(e_i) = \phi(e_i^+)$

gilt, dann existiert ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß p auf Z derart, daß $\forall\ a_i \varepsilon A$, $u \circ a_i$ beschränkt, gilt:

$$\phi(a_i) = \int_Z (u \circ a_i)(z)\, dp(z).$$ [3]

Kurz erwähnt seien auch noch einige weitere Vorschläge zur axiomatischen Bestimmung eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes, die aber keine wesentlich neuen Gesichtspunkte berücksichtigen, bzw. nur auf Teilprobleme beschränkt sind.

---

1 Suppes, P. The Role of Subjective Probability and Utility in Decisio Making, a.a.O.

2 Ebenda, S. 64; auf die Angabe der Axiome soll verzichtet werden, da es hier nur auf das Ergebnis ankommt.

3 Ebenda, S. 68.

Eine Verbindung der von Neumann-Morgensternschen Theorie[1] mit subjektiven Elementen versuchen Anscombe und Aumann über Renn(wett)lotterien herzustellen.[2] Ihr Ansatz, eine Objektivierung der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie über die Betrachtung von Glücksspielen und Wettsituationen zu erreichen, ist aber kaum auf allgemeine Entscheidungssituationen zu übertragen. Diese Aussage gilt auch für das Modell von Pratt, Raiffa und Schlaifer, das auf der Basis von hypothetischen Experimenten mit bestimmten Eigenschaften (canonical experiments) und durch die Verwendung von Lotteriefunktionen zu einer Skalierung von Nutzen und subjektiven Wahrscheinlichkeiten gelangt.[3]

Auch Fishburn geht zunächst von der von Neumann-Morgensternschen Theorie aus und erweitert diese durch geeignete Interpretationen im subjektiven Sinne zu einem Axiomensystem auf der Basis eines Nutzenmodells.[4] Ein zweiter Ansatz kommt zu einem System, das dem von Suppes stark ähnelt und nur in einigen Punkten etwas weniger allgemeine Anforderungen stellt,[5] auch wenn er von wesentlich anderen Voraussetzungen ausgeht.

---

1 Die von Neumann-Morgenstern Axiome setzen voraus, daß dem Urteilenden die (objektiven) Wahrscheinlichkeiten bekannt sind; vgl. von Neumann, J. und O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, second edition, Princeton und New York 1947.

2 Vgl. Anscombe, F.J. und R.J. Aumann, A Definition of Subjective Probability, in: The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 34, 1963, S. 199-205.

3 Vgl. Pratt, J.W., H. Raiffa, und R. Schlaifer, The Foundations of Decision under Uncertainty: An Elementary Exposition, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 59, 1964, S. 353-375, hier S. 365 ff.

4 Vgl. Fishburn, P.C., Preference-Based Definitions of Subjective Probability, a.a.O., S. 1606 ff.

5 Ebenda, S. 1613 f.

3.5. Zur Relevanz der Axiomensysteme in Entscheidungssituationen

3.5.1. Bemerkungen zu den verschiedenen Systemen

Obwohl nur die behavioristisch orientierten Ansätze betrachtet wurden, die alle gewisse ähnliche Züge aufwiesen und im wesentlichen auch das gleiche Ergebnis, die Existenz einer eindeutigen Verteilungsfunktion auf Z, erreichten, zeigten sich schon unter diesen Systemen unterschiedliche Ansatzpunkte und Ausprägungen. Jedes dieser Axiomensysteme auf der Grundlage einer Präferenzstruktur hat seine speziellen Eigenschaften und daraus folgend seine besonderen Vor- und Nachteile.

Die Theorie von Savage ging als erste über die frühen Ansätze hinaus und erreichte einen geschlossenen, systematischen Aufbau einer entscheidungsorientierten subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie. Aus der Kritik an diesem Modell entstanden Systeme, die den Haupteinwand an dem System von Savage, die implizite Annahme einer nichtendlichen Menge Z durch das Postulat P6, zwar vermieden, dafür aber erhebliche Einschränkungen in der Allgemeinheit oder Probleme an anderer Stelle in Kauf nehmen mußten.

Das Axiomensystem von Davidson und Suppes berücksichtigt die Endlichkeit des Zustandsraumes Z, bezieht sich aber nur auf Entscheidungssituationen, bei denen der Zustandsraum in zweielementige Partitionen zerlegt werden kann. Zu dieser einschränkenden Annahme kommt als weiteres Problem, daß auf Grund der Endlichkeit von Z, die zu der Forderung führt, daß alle Ergebnisse "equally spaced in utility" sind, die sich ergebende Wahrscheinlichkeitsfunktion nicht allgemein additiv ist.[1] Während dieses System somit nur in ganz speziellen Situationen eine adäquate Beschreibung darstellt, ist der diesem System ähnliche Ansatz von Suppes eher eine Alternative zu der Theory von Savage. Auch bei ihm ist die Anzahl der Zustände der Natur beliebig, was ihn zu der Aussage veranlaßt,

---

[1] Vgl. Davidson, D. und P. Suppes, a.a.O., S. 274.

daß sein Ansatz für viele Anwendungen als Grundlage mehr geeignet erscheint, als die vom ästhetischen Gesichtspunkt vielleicht vorzuziehenden Axiome von Savage.[1] Dabei gewichtet er aber den Haupteinwand gegen sein System, daß die Eindeutigkeit der a priori Verteilungsfunktion auf Z auf der Grundlage seiner Axiome nicht nachgewiesen werden kann, nur sehr gering.

Die Systeme von Anscombe und Aumann; Pratt, Raiffa und Schlaifer sowie der erste Ansatz von Fishburn leiden alle an einer fehlenden Allgemeingültigkeit, so daß ihnen nur in sehr speziellen Fällen eine Bedeutung zukommt. Auch der zweite Ansatz von Fishburn, der als Spezialfall des Systems von Suppes angesehen werden kann, unterliegt dieser Kritik, wenn auch nicht in dem starken Maße.

Es zeigt sich somit, daß vom formalen Standpunkt aus keine der vorgestellten Theorien den Anforderungen an ein allgemein anwendbares behavioristisch orientiertes Axiomensystem vollständig gerecht wird. Das führt bei Suppes in einer neueren Arbeit zu dem Schluß, die Zielrichtung einer exakten Messung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten aufzugeben. Statt dessen schlägt er ein Axiomensystem vor, das eine Theorie des inexakten Messens von subjektiven Wahrscheinlichkeiten begründet.[2] Obwohl dieser Ansatz für einige Problemstellungen der Entscheidungstheorie bei Unsicherheit eine geeignete Basis abzugeben verspricht, erscheint eine generelle Beschränkung auf die Theorie des inexakten Messens als eine zu extreme Folgerung aus den erörterten Schwierigkeiten.

---

1 Vgl. Suppes, P., The Role of Subjective Probability and Utility in Decision-Making, a.a.O., S. 68.

2 Seine Theorie des inexakten Messens von subjektiven Wahrscheinlichkeiten begründet er durch die Einführung von qualitativen Axiomen, die obere und untere Wahrscheinlichkeiten betreffen; vgl. Suppes, P., The Measurement of Belief, in: Journal of the Royal Statistical Society, B, Vol. 36, 1974, S. 160-175.

Betrachtet man die gegen die übrigen Systeme angebrachten Einwände, so erweist sich das Axiomensystem von Savage, unter Berücksichtigung der von ihm zur Verteidigung seines Postulats P6 gemachten Ausführungen,[1] als eine in ihrem Aussagewert und ihrer Allgemeingültigkeit bisher unübertroffene Theorie. Aus diesem Grunde beziehen sich die folgenden Betrachtungen im wesentlichen auf dieses System.

3.5.2. Die Postulate und das Verhalten der Entscheidungsträger

Einen breiten Raum in der Diskussion um die Axiomensysteme nimmt die Frage ein, ob die Postulate als allgemein anerkannte logische Grundsätze in dem Sinne zu verstehen sind, daß eine vernünftig handelnde Person deren Verletzung als fehlerhafte und widersprüchliche Handlungsweise empfindet.[2] Während die von Savage behauptete generelle Akzeptierbarkeit[3] in bezug auf sein Postulat P1 kaum bestritten wird, wurde die gleiche Aussage beim Sicherheitsprinzip zum Gegenstand verschiedener Einwände. Besonders die Urnenexperimente von Ellsberg scheinen zu zeigen, daß dieses Postulat auch von rationalen Personen verletzt werden kann.[4] Dabei

---

1 Savage erklärt die Akzeptierbarkeit seines Postulats P6 damit, daß er eine vom Entscheidungsträger für jede endliche Folge von Würfen als "fair" angesehene Münze betrachtet; vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 33.

2 Die Diskussion geht dabei um die Frage, ob die Axiome nur willkürlich gesetzte, rein formal zu interpretierende Anfangssätze darstellen, oder ob sie zugleich selbstevident sind; vgl. zu dieser Unterscheidung: Seiffert, H., Einführung in die Wissenschaftstheorie, Bd. 1, München 1973, S. 115 ff.

3 Vgl. Savage, L.J., The Foundations of Statistics, a.a.O., S. 21.

4 Vgl. Ellsberg, D., Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, 1961, S. 643-669; sowie die Kommentare und Ergänzungen zu dieser Arbeit von Raiffa und Roberts: Raiffa, H., Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms: Comment, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, 1961, S. 690-694; Roberts, H.V., Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms: Comment, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 77, 1963, S. 327-336.

erweist es sich, daß die Verletzung von Savages behavioristischen Axiomen zugleich bedingt, daß auch die von Neumann-Morgensternschen Bedingungen nicht erfüllt werden.[1]

Eine Verletzung der entscheidungsorientierten Axiome Savages stellte auch MacCrimmon bei Experimenten zum Entscheidungsverhalten von erfahrenen Managern (highlevel business executives) fest.[2] Er beobachtet in vielen Fällen Inkonsistenzen zwischen dem aktuellen Verhalten der Entscheidenden und den durch die Postulate vorgeschriebenen Aktionen. Bemerkenswert ist jedoch, daß während anschließender Diskussionen die Bereitschaft zur Korrektur der Angaben in Richtung auf das "richtige" Ergebnis sehr groß war und die Abweichungen von dem normativen Verhalten als Fehler angesehen wurden.[3] Die daraus gezogene Schlußfolgerung, Savages Theorie könne allgemein akzeptiert werden, wurde in Hinsicht auf das auch bei MacCrimmon am häufigsten verletzte Sicherheitsprinzip von Slovic und Tversky[4] in weiteren Experimenten untersucht.[5] Obwohl ihre Ergebnisse nicht so eindeutig sind wie die von MacCrimmon, können sie doch als eine Bestätigung dafür angesehen werden, daß die Bereitschaft zur Anerkennung der Axiome mit wachsendem Verständnis der Theorie immer größer wird.[6]

---

1 Vgl. Gottinger, H.W., Grundlagen der Entscheidungstheorie, a.a.O., S. 102.

2 Vgl. MacCrimmon, K.R., Descriptive and Normative Implications of the Decision-Theory Postulates, in: K. Borch and J. Mossin (Eds.), Risk and Uncentainty, London et al. 1968, S. 3-24.

3 Ebenda, S. 21.

4 Vgl. Slovic, P. und A. Tversky, Who Accepts Savage's Axioms?, in: Behavioral Science, Vol. 19, 1974, S. 368-373.

5 Allerdings verwenden sie Studenten als Untersuchungsobjekte, was die Vergleichbarkeit mit der Arbeit von MacCrimmon beeinträchtigt, zumal dieser als Nebenergebnis herausfand, daß die ranghöheren Manager im Durchschnitt bessere Ergebnisse erzielten als ihre weniger erfahrenen Kollegen; vgl. MacCrimmon, K.R., a.a.O., S. 21.

6 Vgl. Slovic, P. und A. Tversky, a.a.O., S. 372 f. Aus diesem Grunde fordert Lindley, weitaus mehr Bemühungen auf eine Verbesserung der entsprechenden Ausbildung der Urteilenden zu verwenden; vgl. Lindley, D.V., Discussion of the Papers by Professor Tversky and by Professor Suppes, in: Journal of the Royal Statistical Society, B, Vol. 36, 1974, S. 175-191, hier S. 181.

Wenn man zusätzlich die Art der Fragestellungen betrachtet, mit denen die kritischen Ergebnisse erzielt wurden, so stellt man fest, daß bei diesen Experimenten Fälle untersucht wurden, bei denen Wetten mit Gewinnwahrscheinlichkeiten angeboten und verglichen wurden, die sich um 1% oder weniger unterscheiden. Es ist aber zu erwarten, daß in derartigen Grenzsituationen die Zahl der formal inkonsistenten Antworten relativ hoch ist, da gerade in diesen Fällen die Faktoren den Ausschlag geben können, die zusätzlich das Eingehen von Wetten beeinflussen.[1] Wenn man davon ausgeht, daß in praxisrelevanten Entscheidungssituationen diese Grenzfälle nicht die Regel darstellen, dann scheint die Aussage durchaus gerechtfertigt, daß die entscheidungsorientierten Postulate Savages im allgemeinen als akzeptierbar angesehen werden können.

3.5.3. Implikationen der Axiomensysteme für die Ansätze zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten

Betrachtet man die Ergebnisse der Untersuchungen zum Verhalten der Entscheidungsträger in Hinsicht auf die Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten, so bleibt festzuhalten, daß eine intensive Aufklärung über die den Entscheidungshandlungen entsprechenden Postulate zu einer Verringerung der Anzahl der Verletzungen dieser normativen Regeln führt. Aus diesen Beobachtungen läßt sich folgern, daß im Vorfeld des eigentlichen Schätzprozesses eine ausführliche Unterweisung der urteilenden Personen über die normativen Forderungen, wie Transitivität, Sicherheitsprinzip und Konsistenz, durchzuführen ist. Wenn möglich, empfiehlt sich sogar ein mehrstufiger Prozeß, bei dem im Anschluß an die Abgabe der Schätzung die Ergebnisse auf entsprechende Fehler zu unter-

---

1 Den Einfluß von Faktoren, die zusätzlich zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten das Eingehen von Wetten bestimmen, erörtert Tversky in einer Untersuchung der Einflußfaktoren bei der Abgabe von Schätzungen; vgl. Tversky, A., Assessing Uncertainty, in: Journal of the Royal Statistical Society, B, Vol. 36, 1974, S. 148-159, hier S. 157 f.

suchen sind, auf die dann durch Hinweis auf die theoretischen Grundlagen aufmerksam gemacht wird. Nach einer Diskussion dieser Fälle wird dem Urteilenden die Möglichkeit gegeben, seine Schätzung zu wiederholen. Aufgrund der Untersuchungen von MacCrimmon kann erwartet werden, daß sich durch einen derartigen mehrstufigen Prozeß die Abweichungen der Urteilenden vom normativen Verhalten verringern.

Für die Verfahren zur Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten stellt sich somit zusätzlich zu der schon erwähnten Forderung nach möglichst vollständiger und systematischer Verarbeitung der vorhandenen a priori Informationen die Aufgabe, eine Unterstützung der durch die Postulate vorgeschriebenen Verhaltensweisen zu gewährleisten. Wenn diese Aufgabe von einem Verfahren nicht hinreichend erfüllt werden kann, so sind auf jeden Fall die Ergebnisse daraufhin zu untersuchen, ob sie den theoretischen Anforderungen gerecht werden. Gegebenenfalls ist der vorgeschlagene mehrstufige Prozeß durchzuführen.

In bezug auf die Beurteilung der einzelnen Schätzverfahren ist eine Unterscheidung zwischen den Verfahren, die gleich zu einer quantitativen Wahrscheinlichkeit führen, und den Ansätzen notwendig, die zunächst die Ableitung einer qualitativen Wahrscheinlichkeitsstruktur erfordern, um auf deren Basis die quantitativen Werte zu bestimmen. Während die zuerst genannten Verfahren von der rein formalen Seite keine wesentlichen Probleme aufwerfen, erweist sich die Additivitätsbedingung des quantitativen Wahrscheinlichkeitsmaßes P

$$P(Z_i \cup Z_j) = P(Z_i) + P(Z_j)$$

$$\text{für } Z_i, Z_j \in U \quad \text{und} \quad Z_i \cap Z_j = \emptyset$$

für die Verfahren, die den von der systematischen Informationsverarbeitung her im Grunde anzustrebenden Weg über die qualitative Wahrscheinlichkeitsstruktur wählen, als scharfe Restriktion. Während bei den Ansätzen "Psychometric Ranking" und "Paarweiser Vergleich" eine Verletzung dieser Bedingung

in der Regel nicht ausgeschlossen werden kann, ist deren Beachtung nur bei dem Verfahren von Churchman und Ackoff und den darauf aufbauenden Ansätzen von Brockhoff immer gewährleistet.

Es sei weiterhin kurz auf Zusammenhänge zwischen Axiomensystemen und Schätzverfahren in ganz speziellen Entscheidungssituationen hingewiesen. So bildet das System von Anscombe und Aumann eine adäquate Beschreibung von Renn(wett)-lotterien und ähnlichen Entscheidungssituationen, bei denen sich die Lotterie-, Spiel- oder Wett-Techniken als angemessene Verfahren zur Schätzung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten anbieten. Diese erscheinen zusammen mit dem Verfahren unter Verwendung des Wahrscheinlichkeitsrades und dem Modell der äquivalenten Urnen auch bei den für das System von Davidson und Suppes vorausgesetzten 2 x 2 Spielsituationen als besonders geeignet. Schließlich bleibt zu überlegen, ob in den Fällen, bei denen durch die Angabe von Minimum-, Maximum- und Erwartungswerten lediglich eine approximative Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunktion angestrebt wird, die Theorie des inexakten Messens von Suppes als eine eventuell angemessenere Grundlage angesehen werden kann.

Eine Sonderstellung nimmt bei der Betrachtung der Schätzverfahren unter dem Aspekt der Übereinstimmung mit den Forderungen der Postulate das von uns vorgeschlagene Modell der Bewertung von Alternativen ein, da es als einziges in einer dem Aufbau des Systems von Savage ähnlichen Weise vorgeht, d.h. über eine Präferenzstruktur auf der Menge A wird ein quantitatives Wahrscheinlichkeitsmaß auf Z erreicht. Mit einer dem Postulat P 1 entsprechenden Zielsetzung verlangt das Modell zunächst die Ableitung einer Präferenzstruktur auf A (die Menge Q), wobei die nur schwer einzuhaltende normative Bedingung einer schwachen Präferenzordnung auf A für den Urteilenden bei der Angabe seiner Bewertungen zwar ein anzustrebendes Ideal darstellt, als Eingangsinformation aber in

dieser strengen Form nicht gefordert wird. Somit sind die Voraussetzungen des Verfahrens schwächer als die durch das Postulat P1 vorgeschriebenen Anforderungen, doch ist das Modell so angelegt, daß die Ergebnisse des Optimierungsprozesses zu einer P1 entsprechenden Ordnung auf A führen, wobei als Optimierungskriterium die Abweichungen zwischen der angegebenen Präferenzstruktur und der sich ergebenden, den normativen Ansprüchen gerecht werdenden schwachen Präferenzordnung auf A verwendet werden. Als Resultat läßt sich festhalten, daß in analoger Weise wie das Axiomensystem von Savage eine Theorie darstellt, die auf allgemeine Entscheidungssituationen angewendet werden kann, das Modell der Bewertung von Alternativen ein allgemein anwendbares Schätzverfahren zu sein verspricht.

4. Fazit und geplante Fortsetzung der Arbeit

Die im Rahmen dieses Berichtes dargestellten Teile des Projektes können im wesentlichen als abgeschlossen angesehen werden. Als Ergebnis lassen sich zusammenfassend folgende Aussagen treffen.

(1) Als theoretische Basis für die Verfahren zur Schätzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten bietet sich für allgemeine Entscheidungssituationen die Theorie von Savage an.

(2) Für spezielle Entscheidungsprobleme können auch andere Axiomensysteme zur Konstruktion subjektiver Wahrscheinlichkeiten als adäquate Grundlage für eine Reihe von Schätzverfahren angesehen werden.

(3) Die Verfahren zur Schätzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten sind unter zwei wichtigen Aspekten zu betrachten:

   (a) Inwieweit erfüllen sie die Aufgabe einer möglichst vollständigen und systematischen Verarbeitung der vorhandenen a priori Informationen?

   (b) Bieten sie eine Unterstützung der durch das Axiomensystem vorgeschriebenen Verhaltensweisen?

(4) Nur wenige der in der Literatur vorgestellten Schätzverfahren erfüllen beide Anforderungen in ausreichendem Maße. Bei einigen Verfahren ist nicht einmal gesichert, daß sie tatsächlich immer zu einem quantitativen Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Zustandsraum führen.

(5) Aufgrund der Mängel der vorhandenen Schätzverfahren wurde ein neues Verfahren entwickelt, das analog zum Axiomensystem von Savage von einer Präferenzstruktur auf A ausgeht und beiden Anforderungen in allgemeinen Entscheidungssituationen gerecht wird.

Gemäß dem im Projektantrag angegebenen Arbeitsprogramm folgt die Erarbeitung eines Konzepts zum Test von Schätzverfahren. Zweck des Tests ist die Untersuchung, ob sich die theoretisch erörterten Vorteile des vorgeschlagenen Verfahrens der Bewertung von Alternativen in Experimenten mit Einzelpersonen bestätigen lassen. Dabei gilt es, zunächst einen objektiven Standard zu suchen, der sowohl als Grundlage für die Schätzungen der Urteilenden dient als auch die Möglichkeit der Beurteilung der Schätzergebnisse bietet. Zur Lösung dieses Problems ist es geplant, den Elementen Z_i aus dem Zustandsraum Z geometrische Figuren zuzuordnen, deren Größe den Eintreffenswahrscheinlichkeiten der betreffenden Zustände entspricht. Diese Figuren werden den Testpersonen eine bestimmte Zeit lang zur Verfügung gestellt, um auf diese Weise in einer vorgegebenen Entscheidungssituation eine "a priori Information" über die zu schätzenden Eintreffenswahrscheinlichkeiten der Z_i zu erzeugen. Auf der Basis dieser Informationen sollen dann die subjektiven Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des vorgeschlagenen Schätzverfahrens ermittelt werden. An einer Konkretisierung des hier nur kurz skizzierten Konzepts wird zur Zeit gearbeitet.

Literaturverzeichnis

Ackoff, R.L. (Ed.), Systems and Management Annual 1974, New York 1974.

Anscombe, F.J. und R.J. Aumann, A Definition of Subjective Probability, in: The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 34, 1963, S. 199-205.

Borch, K. und J. Mossin (Eds.), Risk and Uncertainty, Proceedings of a Conference held by the International Economic Association, London et al. 1968.

Borel, E., Apropos of a Treatise on Probability, in: Revue philosophique, 1924; übersetzt und wiederabgedruckt in: H.E. Kyburg und H.E. Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, New York et al. 1964, S. 45-60.

Braithwaite, R.B. (Ed.), The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, London, New York 1931.

Brockhoff, K., On Determining Relative Values, in: Zeitschrift für Operations Research, Bd. 16, 1972, S. 221-232; wiederabgedruckt in: R.L. Ackoff (Ed.), Systems and Management Annual 1974, New York 1974, S. 459-470.

Brockhoff, K., Forschungsprojekte und Forschungsprogramme: ihre Bewertung und Auswahl, (zweite erweiterte und geänderte Auflage von Forschungsplanung im Unternehmen), Wiesbaden 1973.

Charnes, A. und W.W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, Vol. I, New York 1961.

Churchman, C.W. und R. Ackoff, An Approximate Measure of Value, in: Operations Research, Vol. 2, 1954, S. 172-187.

Cole, T.D., How to Obtain Probability Estimates in Capital Expenditure Evaluations: A Practical Approach, in: Management Accounting, Vol. 52, 1970, S. 61-64.

Davidson, D. und P. Suppes, A Finitistic Axiomatization of Subjective Probability and Utility, in: Econometrica, Vol. 24, 1956, S. 264-275.

De Finetti, B., La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, in: Anales de l'Institut Henri Poincaré, Vol. 7, 1937, S. 1-68; Übersetzt und wiederabgedruckt als "Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources", in: H.E. Kyburg und H.E. Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, New York et al. 1964, S. 93-158.

Du Charme, W.M. und M.L. Donnell, Intrasubject Comparisons of Four Response Modes for Subjective Probability Assessment, in: Organizational Behavior and Human Performance, Vol. 10, 1973, S. 108-117.

Ellsberg, D., Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, 1961, S. 643-669.

Fine, T., A Note on the Existence of Quantitative Probability, in: Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, 1971, S. 1182-1186.

Fishburn, P.C., Decision and Value Theory, New York et al. 1964.

Fishburn, P.C., Preference-Based Definitions of Subjective Probability, in: The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, 1967, S. 1605-1617.

Good, I.J., Probability and the Weighting of Evidence, London, New York 1950.

Gottinger, H.W., Subjektive Wahrscheinlichkeiten, Göttingen 1974.

Gottinger, H.W., Grundlagen der Entscheidungstheorie - Ansätze und Kritik, Stuttgart 1974.

Gottinger, H.W., Konstruktion subjektiver Wahrscheinlichkeiten, in: Mathematische Operationsforschung und Statistik, Bd. 5, 1974, S. 509-539.

Hampton, J.M., P.G. Moore und H. Thomas: Subjective Probability and its Measurement, in: Journal of the Royal Statistical Society A, Vol. 136, 1973, S. 21-42.

Hillier, F.S., The Deviation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments, in: Management Science, Vol. 9, 1963, S. 443-457.

Hogarth, R.M., Cognitive Processes and the Assessment of Subjective Probability Distributions, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 70, 1975, S. 271-289.

Huber, G.P., Methods for Quantifying Subjective Probabilities and Multi-Attribute Utilities, in: Decision Science, Vol. 5, 1974, S. 430-459.

Kendall, M.G., Ranks and Measures, in: Biometrika, Vol. 49, 1962, S. 133-137.

Kidd, J.B., The Utilization of Subjective Probabilities in Production Planning, in: C.A.J. Vlek, W.A. Wagenaar und G. de Zeeuw (Eds.), Proceedings of the Second Research Conferenc on Subjective Probability, in: Acta Psychologica, Vol. 34, 1970, S. 338-347.

Koopman, B.O., The Axioms and Algebra of Intuitive Probability, in: Annals of Mathematics, Vol. 41, 1940, S. 269-292.

Kyburg, H.E. und H.E. Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, New York et al. 1964.

Laux, H., Zur Entscheidung beim Fehlen objektiver Wahrscheinlichkeiten, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Bd. 46, 1976, S. 59-68.

Lindgren, B.W., Statistical Theory, Second Edition, London 1968.

Lindley, D.V., Discussion of the Papers by Professor Tversky and by Professor Suppes, in: Journal of the Royal Statistical Society, B, Vol. 36, 1974, S. 181-182.

MacCrimmon, K.R., Descriptive and Normative Implications of the Decision-Theory Postulates, in: K. Borch und J. Mossin (Eds.), Risk and Uncertainty, Proceedings of a Conference held by the International Economic Association, London et al. 1968, S. 3-24.

Malcolm, D.G., J.H. Roseboom, C.E. Clark und W. Fazar: Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, in: Operations Research, Vol. 7, 1959, S. 646-669.

Morrison, D.G., Critique of: "Ranking Procedures and Subjective Probability Distributions", in: Management Science, Vol. 14, 1967, S. B-253 - B-254.

Murphy, A.H. und R.L. Winkler, Scoring Rules in Probability Assessment and Evaluation, in: C.A.J. Vlek, W.A. Wagenaar und G. de Zeeuw (Eds.), Proceedings of the Second Research Conference on Subjective Probability, in: Acta Psychologica, Vol. 34, 1970, S. 273-286.

Murphy, A.H. und R.L. Winkler, Subjective Probability Forecasting: Some Real World Experiments, in: D. Wendt und C. Vlek (Eds.), Utility, Probability, and Human Decision Making, Dordrecht, Boston 1975, S. 177-198.

Perry, C. und I.D. Greig,
Estimating the Mean and Variance of Subjective Distributions in PERT and Decision Analysis, in: Management Science, Vol. 21, 1975, S. 1477-1480.

Pickhardt, R.C. und J.B. Wallace,
A Study of the Performance of Subjective Probability Assessors, in: Decision Science, Vol. 5, 1974, S. 347-364.

Pratt, J.W., H. Raiffa und R. Schlaifer,
The Foundations of Decision Under Uncertainty: An Elementary Exposition, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 59, 1964, S. 353-375.

Raiffa, H., Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms: Comment, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, 1961, S. 690-694.

Raiffa, H., Decision Analysis, Reading 1968.

Ramsey, F.P., Truth and Probability, in: R.B. Braithwaite (Ed.), The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, London, New York 1931, S. 156-198; wiederabgedruckt in: H.E. Kyburg und H.E. Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, New York et al. 1964, S. 61-92.

Roberts, H.V., Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms: Comment, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 77, 1963, S. 327-336.

Savage, L.J., The Foundations of Statistics, New York 1954

Savage, L.J., Elicitations of Personal Probabilities and Expectations, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 66, 1971, S. 783-801.

Schäfer, R.E. und K. Borcherding,
The Assessment of Subjective Probability Distributions: A Training Experiment, in: Acta Psychologica, Vol. 37, 1973, S. 117-129.

Schlaifer, R., Analysis of Decision under Uncertainty, New York et al. 1969.

Schneider, D., Investition und Finanzierung, (dritte, neubearbeitete Auflage), Opladen 1974.

Seiffert, H., Einführung in die Wissenschaftstheorie, Bd. 1, München 1973.

Selvidge, J., A Three-Step Procedure for Assigning Probabilities to Rare Events, in: D. Wendt und C. Vlek (Eds.), Utility, Probability, and Human Decision Making, Dordrecht, Boston 1975, S. 199-216.

Slovic, P., Psychological Study of Human Judgments: Implications for Investment Decision Making, in: Journal of Finance, Vol. 27, 1972, S. 779-799.

Slovic, P. und A. Tversky,
Who Accepts Savage's Axioms?, in: Behavioral Science, Vol. 19, 1974, S. 368-373.

Smith, L.H.,
Ranking Procedures and Subjective Probability Distributions, in: Management Science, Vol. 14, 1967, S. B-236 - B-249.

Spetzler, C.S. und C.-A.S. Staël von Holstein,
Probability Encoding in Decision Analysis, in: Management Science, Vol. 22, 1975, S. 340-358.

Srinivasan, V. und A.D. Shocker,
Linear Programming Techniques for Multidimensional Analysis of Preferences, in: Psychometrika, Vol. 38, 1973, S. 337-369.

Srinivasan, V. und A.D. Shocker,
Estimating the Weights for Multiple Attributes in a Composite Criterion Using Pairwise Judgments, in: Psychomaetrika, Vol. 38, 1973, S. 473-493.

Staël von Holstein, C.-A.S.,
Assessment and Evaluation of Subjective Probability Distributions, Stockholm 1970.

Staël von Holstein, C.-A.S.,
Measurement of Subjective Probability, in: C.A.J. Vlek, W.A. Wagenaar und G. de Zeeuw (Eds.), Proceedings of the Second Research Conference on Subjective Probability, in: Acta Psychologica, Vol. 34, 1970, S. 146-159.

Stimson, D.H.,
Utility Measurement in Public Health Decision Making, in: Management Science, Vol. 16, 1969, S. B-17 - B-30.

Suppes, P.,
The Role of Subjective Probability and Utility in Decision-Making, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954-1955, Vol. 5, 1956, S. 61-73.

Suppes, P.,
The Measurement of Belief, in: Journal of the Royal Statistical Society, B, Vol. 36, 1974, S. 160-175.

Suppes, P. und M. Winet, An Axiomatization of Utility Based on the Notation of Utility Differences, in: Management Science, Vol. 1, 1955, S. 259-270

Tversky, A.,
Assessing Uncertainty, in: Journal of the Royal Statistical Society, B, Vol. 36, 1974, S. 148-159.

Vlek, C.A.J., W.A. Wagenaar und G. de Zeeuw (Eds.),
Proceedings of the Second Research Conference on Subjective Probability, in: Acta Psychologica, Vol. 34, 1970, S. 129-397.

von Neumann, J. und O. Morgenstern,
Theory of Games and Economic Behavior,
second edition, Princeton 1947.

Wendt, D. und C. Vlek (Eds.),
Utility, Probability, and Human Decision
Making, Dordrecht, Boston 1975.

Winkler, R.L., The Assessment of Prior Distributions in
Bayesian Analysis, in: Journal of the
American Statistical Association, Vol. 62,
1967, S. 776-800.