

Boggio, Luciano; Gozzi, Giancarlo

Working Paper

La Stabilità dei prezzi di produzione

Quaderni - Working Paper DSE, No. 107

Provided in Cooperation with:

University of Bologna, Department of Economics

Suggested Citation: Boggio, Luciano; Gozzi, Giancarlo (1991) : La Stabilità dei prezzi di produzione, Quaderni - Working Paper DSE, No. 107, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna, Dipartimento di Scienze Economiche (DSE), Bologna, <https://doi.org/10.6092/unibo/amsacta/5257>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/158950>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>

Luciano Boggio*

Giancarlo Gozzi**

LA STABILITA' DEI PREZZI DI PRODUZIONE°

* Dipartimento di Scienze Economiche, Università Cattolica, Milano

** Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Bologna

°Sebbene l'intero lavoro sia stato concepito e discusso congiuntamente dagli autori, a L. Boggio vanno principalmente attribuiti i paragrafi 3,5 e 6 mentre a G. Gozzi i paragrafi 1,2 e 4.

INDICE

1 INTRODUZIONE	1
2 CONCORRENZA ED AGGIUSTAMENTO NELLA TEORIA ECONOMICA CLASSICA E MARXIANA.	4
3 DEFINIZIONE E NATURA DEI PREZZI DI PRODUZIONE.	10
4 STABILITA' DEGLI EQUILIBRI (CLASSICI E MARXIANI) DI LUNGO PERIODO IN MODELLI DI <i>CROSS-DUAL DYNAMICS</i>	14
5 STABILITA' DEI PREZZI DI PRODUZIONE E IPOTESI DI COSTO PIENO. MODELLI LINEARI.	30
6 STABILITA' DEI PREZZI DI PRODUZIONE ED IPOTESI DI COSTO PIENO. MODELLI NON LINEARI.	46
7 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.	54
APPENDICE.	56
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.	59

1 INTRODUZIONE

La pubblicazione di *Produzione di Merci a Mezzo di Merci*¹ ha profondamente segnato gli sviluppi della teoria economica dell'ultimo quarto di secolo. Il lavoro di Sraffa pone le basi² per la critica alla teoria marginalista del valore e della distribuzione; è lo stesso Sraffa a ricordarci, nella prefazione del suo libro, che:

"[...] E' [tuttavia] carattere particolare della serie di proposizioni che vengono ora pubblicate che esse, per quanto non si addentrino nell'esame della teoria marginale del valore e della distribuzione, sono tuttavia concepite così da poter servire di base per una critica di quella teoria."

Il libro di Sraffa ha però costituito, al tempo stesso, il nucleo teorico fondamentale per la ripresa di un approccio, quello degli economisti classici (in primo luogo di D. Ricardo) e di Marx, in seguito identificato come "approccio del sovrappiù" (surplus approach) alla teoria del valore e della distribuzione³ e che ha nella categoria analitica del prezzo di produzione il suo elemento fondante, e di un metodo di analisi, quello che P. Garegnani ha efficacemente definito delle "*posizioni di lungo periodo*"⁴. Il contributo fondamentale di Sraffa, a questo riguardo, è stato senz'altro quello di aver dimostrato la possibilità di definire in modo logicamente coerente sul piano analitico i prezzi di produzione delle merci⁵. Nel riformulare la teoria dei prezzi di produzione in modo da superare le incongruenze, sul piano logico, che la stessa presenta nella analisi di D. Ricardo, prima, e di K. Marx, poi⁶, Sraffa osserva che:

[...] Termini classici quali "prezzo necessario", "prezzo naturale" o "prezzo di produzione" sarebbero del tutto appropriati, ma abbiamo preferito "valore" e "prezzo" perchè più brevi e nel nostro discorso (*che non si riferisce mai ai prezzi di mercato*) altrettanto esenti da ambiguità.⁷

¹ P. Sraffa [1960].

² In quest'ottica non va dimenticato il contributo di J. Robinson; in particolare si veda J. Robinson (1953-4).

³ E che da altri, ma a nostro avviso riduttivamente, è stato definito come "neoricardiano".

⁴ Si veda, in particolare, P. Garegnani [1979]. Questo aspetto, più propriamente metodologico, della ripresa dell'economia politica classica (e, per certi versi, anche marxiana) è trattato anche da J. Eatwell [1977], F. Petri [1978],[1986][1989], H. Kurz [1985].

⁵ Per una analisi sistematica della teoria dei prezzi di produzione si rimanda a L. Pasinetti (1975) per il caso di produzione singola, e a B. Schefold (1989) per il caso di produzione congiunta nonché alla bibliografia ivi riportata per ulteriori approfondimenti.

⁶ Come noto tali incongruenze logiche sono dovute, sostanzialmente, al tentativo, da parte sia di Marx che di Ricardo, di separare determinazione dei prezzi relativi delle merci da un lato e saggio di profitto dall'altro. Il contributo di Sraffa (e prima di lui quelli di Dmitriev e di Bortkiewicz) ha definitivamente dimostrato che saggio di profitto e prezzi di produzione (delle merci base) possono essere determinati solo simultaneamente; pur tuttavia appare chiaro anche che nello schema teorico sraffiano teoria del valore (nella ristretta accezione di teoria della determinazione dei prezzi relativi delle merci) e teoria della distribuzione risultano concettualmente separate a differenza di quanto avviene nella teoria economica neoclassica.

⁷ P. Sraffa [1960], p. 11 (corsivo aggiunto).

Il prezzo di produzione, in quanto differisce dal prezzo di mercato, rappresenta quindi una categoria analitica (un "concetto teorico" se si preferisce) che non ha un suo correlato empirico immediato; potremmo allora chiederci quale è la rilevanza, sul piano della interpretazione fattuale, cioè della comprensione del funzionamento di una economia, e, più specificamente, di una economia capitalistica, di un tale costrutto. La possibilità di fondare una interpretazione del funzionamento dell'economia capitalistica sulla categoria del prezzo di produzione (e di quella *duale* di "livello normale di produzione") comporta la necessità di ricondurre la categoria empirica (il prezzo di mercato, la quantità effettivamente prodotta) a quella teorica (il prezzo di produzione, il livello normale di produzione). Nel pensiero dei classici e di Marx, il collegamento tra prezzo di mercato e prezzo di produzione viene stabilito attraverso la considerazione del prezzo di produzione quale "centro di gravitazione" del prezzo di mercato (e analoga considerazione vale dal lato duale delle quantità). Sul piano analitico l'attenzione, fino a tempi relativamente recenti⁸, è stata particolarmente rivolta ad indagare le proprietà del centro di gravitazione, vale a dire prezzi di produzione e corrispondenti livelli produttivi, e la possibilità stessa di una sua definizione economicamente significativa in modelli di produzione, distribuzione e crescita via via più generali⁹. Il problema di indagare se e in che modo le forze di mercato possano sospendere i prezzi di mercato (e le corrispondenti quantità) verso il centro di gravitazione o mantenerli prossimi ad esso non ha ricevuto, almeno fino al menzionato lavoro di Egidi [1975], l'attenzione che invece, a nostro parere, esso merita; e riteniamo che l'importanza del problema della stabilità dei prezzi di produzione, e più in generale delle posizioni di lungo periodo di derivazione classico-marxiana sia da valutare con riferimento a due aspetti:

i) la possibilità di confrontare teoria classica (e marxiana) e teoria neoclassica non solo con riferimento al problema della determinazione della configurazione di equilibrio¹⁰, ma anche rispetto a quello della stabilità (e quindi del funzionamento dell'economia in *disequilibrio*¹¹);

⁸ E' infatti con il contributo di M. Egidi (1975) che sostanzialmente prende avvio la letteratura sulla stabilità dei prezzi di produzione.

⁹ Vanno in particolare menzionate le analisi della produzione congiunta e, all'interno di questo quadro concettuale, del capitale fisso e delle risorse non riproducibili. Per una rassegna della analisi della produzione congiunta lungo linee sraffiane si veda, oltre al citato lavoro di B. Schefold (1989), N. Salvadori-I. Steedman [1988], mentre sullo stesso tema, ma con intendimenti di natura più metodologica (epistemologica) si può vedere L. Punzo [1989]. Per quanto riguarda la produzione con capitale fisso rimandiamo ai fondamentali lavori di S. Baldone [1974], B. Schefold [1974], P. Varri [1974] ed alle generalizzazioni contenute negli interessanti lavori di N. Salvadori [1986, 1988]. Per quanto riguarda, infine, le risorse naturali e, più in generale, i beni non riproducibili e/o non riprodotti si rimanda ai contributi fondamentali di A. Quadrio-Curzio [1967, 1975, 1981], nonché ai più recenti contributi di G. Abraham Frois - E. Berrebi [1980], H. Kurz [1980] e N. Salvadori [1986].

¹⁰ Il problema è stato, fra gli altri, affrontato da J. Roemer [1980, 1981].

¹¹ Se infatti ci si ferma ai confronti tra configurazioni di equilibrio, si può giungere al risultato, formalmente corretto, ma per altri versi fuorviante, di Hahn (1982), secondo cui i prezzi di produzione sono un caso particolare della teoria neoclassica dell'equilibrio economico generale quando siano state "scelte" in modo appropriato le dotazioni iniziali di beni. Se però si considerano anche le ipotesi di comportamento ed i processi economici non di equilibrio che contraddistinguono la teoria classico-marxiana da un lato e quella neoclassica dall'altro allora la riduzione della prima a caso particolare della seconda risulta impossibile. Rimandiamo, per maggiori approfondimenti su questo punto, al lavoro di G. Duménil - D. Lévy [1985]. (Su questi aspetti si veda anche *infra*, par. 2).

ii) la individuazione di quali particolari meccanismi di aggiustamento (vale a dire quali "forme" del più astratto processo di gravitazione) comportano la convergenza alla configurazione di lungo periodo dell'economia, poichè molteplici possono essere le forme attraverso le quali il processo di gravitazione (eventualmente) si estrinseca¹². In questo nostro lavoro di rassegna prenderemo in considerazione due particolari forme del processo di gravitazione, che individuano il prevalere di meccanismi di aggiustamento diversi in fasi diverse dell'evoluzione dell'economia capitalista, l'una relativa ad una economia "pienamente concorrenziale", in cui vige completa libertà di movimento del capitale ed i prezzi (di mercato) delle merci si formano in base all'interazione fra domanda ed offerta, l'altra relativa ad un'economia "non pienamente concorrenziale" dove i prezzi (di mercato) dei beni si formano in base ad un meccanismo di costo pieno e possono esistere barriere all'entrata¹³.

¹² Ci troviamo, quindi, in sintonia con quanto afferma B. Schefold [1985]; un po' meno con lui quando da questa premessa egli trae la conclusione che:

"... The classics where, therefore, not very interested in the many conceivable models that might describe processes of gravitation." (B. Schefold [1985], p. 140)

Possiamo dire che gli economisti classici e Marx considerano una particolare forma del processo di gravitazione, quella determinata dalla mobilità del capitale.

¹³ Non prenderemo tuttavia in considerazione, in questo lavoro, i modelli non pienamente concorrenziali in cui viene espressamente considerato il grado di utilizzo della capacità produttiva nel processo di aggiustamento; per un interessante inizio di analisi in questa direzione si rimanda a Dutt [1988a].

2 CONCORRENZA ED AGGIUSTAMENTO NELLA TEORIA ECONOMICA CLASSICA E MARXIANA.

2.1 Negli economisti classici troviamo enunciate due distinte nozioni di prezzo, il prezzo naturale (prezzo di produzione, nella terminologia marxiana) ed il prezzo di mercato. Il luogo classico di questa distinzione è, come ben noto, il capitolo VII del libro I della "Ricchezza delle Nazioni" di A. Smith:

"Quando il prezzo di una merce non è né più né meno di ciò che è sufficiente pagare la rendita della terra, i salari del lavoro ed i profitti dei fondi impiegati[...]secondo i loro saggi naturali, quella merce verrà venduta per quello che si può chiamare il suo prezzo naturale." (*La Ricchezza delle Nazioni*, pp. 56).

"Il prezzo effettivo al quale la merce si vende comunemente si chiama prezzo di mercato." (*La Ricchezza delle Nazioni*, pp. 57)

L'aspetto importante, sul piano metodologico ed analitico, della distinzione fra prezzo naturale e prezzo di mercato è l'interpretazione che da essa i classici traggono del prezzo naturale (prezzo di produzione, nel caso di Marx) delle merci quale *norma* o *centro di gravitazione* del prezzo di mercato delle stesse. Per Smith, per esempio:

"Il prezzo naturale è [...] in un certo senso il prezzo centrale, attorno al quale i prezzi di tutte le merci gravitano in continuazione.[...] [E]ssi tendono costantemente verso di esso." (*La Ricchezza delle Nazioni*, pp. 59)

Questa posizione è condivisa appieno da Ricardo nel capitolo IV (Del prezzo naturale e del prezzo di mercato) laddove afferma:

"Nel capitolo settimo della *Ricchezza delle Nazioni*, tutto ciò che concerne tale questione è trattato in modo assolutamente corretto" (*Sui Principi dell'Economia Politica*, pp. 58-59)

Marx affronta il problema della relazione fra prezzo di mercato e prezzo di produzione in diversi lavori; in modo particolare in K. Marx [1970], Vol. III, cap. X, [1967], [1955], Vol. II cap. 2. In quest'ultimo lavoro egli afferma, in particolare:

"[...] [è] intorno al loro prezzo di produzione che la concorrenza costringe i prezzi di mercato a ruotare nelle differenti branche di produzione." (*Teorie sul Plusvalore*, Vol. II, pp. 67).

Con l'espressione *centro di gravitazione* sembra pertanto, alla luce anche dei concetti e dei metodi della moderna teoria dei sistemi dinamici, che si possa individuare una o più delle seguenti configurazioni:

1) un *equilibrio stabile* di un sistema dinamico in cui i prezzi di mercato (ed eventualmente le quantità effettive) siano le variabili di stato;

2) un *equilibrio asintoticamente stabile* di un tale sistema;

3) un *equilibrio instabile*, ma *interno ad una orbita chiusa* (del suddetto sistema) che sia (*asintoticamente*) *stabile*^{14,15}.

In tutti e tre i casi sopra menzionati¹⁶, per una adeguata rappresentazione analitica della concezione classico-marxiana di gravitazione, si dovrebbe poi includere la presenza, continua o ricorrente, di fattori di disturbo che interessano le variabili di stato e di fattori esogeni di modificazione delle grandezze di equilibrio. Si dovrebbe cioè parlare di una *stabilità perturbata* del centro di gravitazione (o dell'orbita chiusa che lo racchiude).

Le recenti analisi formalizzate hanno quasi esclusivamente considerato, tuttavia, i casi di cui ai punti 1) e 2). Questo è anche il punto di vista da noi scelto per questo capitolo¹⁷.

Ci preme, poi, mettere in evidenza due aspetti fondamentali:

i) il centro di gravitazione è caratterizzato da una particolare nozione di prezzo, il prezzo di produzione, e da una particolare struttura della produzione (in A. Smith, p.e., essa è identificata con la nozione di *domanda effettuale*; in K. Marx rispecchia una determinazione *sociale* dei fabbisogni).

ii) l'idea stessa del prezzo naturale (prezzo di produzione) quale centro di gravitazione consente di separare, sul piano concettuale, quei fattori e quelle cause che esercitano un effetto permanente sulla determinazione dei prezzi delle merci e della distribuzione del reddito in una economia capitalistica da quelli che invece operano soltanto in modo transitorio e comunque non sistematico¹⁸; analoga considerazione può essere fatta con riferimento alle quantità di lungo periodo.

La concezione della concorrenza capitalistica che traspare dall'analisi degli economisti classici e di Marx è quindi, fondamentalmente, quella di un processo che si svolge nel tempo reale e che ha il suo fondamento nella mobilità del capitale fra i diversi settori produttivi alla ricerca della maggiore profittabilità possibile; è la mobilità del capitale, in particolare, che assicura, secondo gli economisti classici e Marx, che le grandezze di mercato non si discostino mai in modo sistematico dalle grandezze che individuano la configurazione di lungo periodo; è in questo senso che i classici (e Marx) parlano di *gravitazione* delle grandezze di mercato verso quelle che rappresentano la posizione di lungo periodo (l'attrattore, quindi) dell'economia. I tre elementi fondamentali che vengono a comporre il processo di gravitazione sono i seguenti:

¹⁴ L'esempio classico è quello di un ciclo limite.

¹⁵ Per le definizioni di equilibrio e/o orbita chiusa (periodica) nonché di stabilità e/o stabilità asintotica (di un equilibrio o di una orbita chiusa) si veda l'Appendice. Per maggiori approfondimenti si rinvia il lettore, p.e., a H.W. Lorenz (1989).

¹⁶ Esiste poi una interpretazione ancor più debole della gravitazione, quella di "*finitezza dello scostamento*" delle variabili di stato dal centro di gravitazione; in questo senso va probabilmente inteso Schefold (1985). Tale interpretazione ci appare tuttavia troppo debole per sostenere una teoria del valore fondata sui prezzi di produzione.

¹⁷ Ciò spiega anche la scelta del titolo del capitolo.

¹⁸ E' implicita, a nostro parere, l'ipotesi, in questa posizione metodologica degli economisti classici e di Marx, che possano essere analizzati *scientificamente* solo quei fattori e quelle cause che operano sistematicamente e permanentemente nell'economia.

i) i prezzi di mercato delle merci determinano la profittabilità della produzione nei diversi settori produttivi, cioè i saggi di profitto settoriali, e quindi la direzione in cui il capitale si sposta fra i settori;

ii) domanda ed offerta determinano i prezzi di mercato;

iii) la mobilità del capitale comporta variazioni nei livelli di produzione e quindi influenza la relazione che esiste fra domanda ed offerta sui vari mercati.

Il meccanismo concorrenziale che hanno in mente gli economisti classici e Marx descrive, fondamentalmente, un processo di "feed-back" negativo. I prezzi di mercato dei beni determinano i saggi di profitto settoriali in base ai quali si determinano gli spostamenti di capitale da un settore all'altro; ciò determina variazioni nei livelli di produzione dei vari settori che comporteranno, a loro volta, variazioni nei prezzi di mercato e nei saggi di profitto settoriali. In particolare gli economisti classici e Marx assumono che vi sia una correlazione positiva fra prezzi di mercato e saggi di profitto settoriali; un elevato prezzo di mercato (più precisamente un prezzo di mercato superiore al suo prezzo naturale o di produzione) comporta un elevato saggio di profitto (meglio, un saggio di profitto superiore al saggio uniforme) e quindi un incremento della produzione della merce in questione attraverso l'afflusso di capitale determinato dalla profittabilità del settore in questione. Ciò però induce una diminuzione del prezzo di mercato e quindi (sempre secondo i classici e Marx) del saggio di profitto. Il feed-back negativo del processo dinamico che abbiamo appena descritto è indubbiamente determinato dalla correlazione positiva che esiste, per i classici e per Marx, fra la relazione fra prezzo di mercato e prezzo di produzione da un lato e saggio di profitto effettivo e saggio uniforme dall'altro; ritorneremo più diffusamente su questo punto nella sezione successiva. L'ampiezza delle oscillazioni attorno alla configurazione di lungo periodo dipende dalla reattività dei capitalisti ai differenziali di profitto nei vari settori e dalla reattività del mercato a situazioni di squilibrio fra domanda ed offerta; anche di questo parleremo più ampiamente nella sezione seguente. In particolare vedremo che il meccanismo di aggiustamento così come descritto dai classici e da Marx sarebbe tale da garantire, se fosse una corretta rappresentazione del modo con il quale opera il meccanismo concorrenziale, la stabilità della configurazione di lungo periodo.

2.2 Possiamo formalizzare in modo estremamente semplice il meccanismo concorrenziale che traspare (pur con gli ovvi limiti che una formalizzazione comporta) dai lavori degli economisti classici (in particolar modo A. Smith e D. Ricardo) e di K. Marx; ciò ci consentirà, al tempo stesso, di indicare i limiti, sul piano analitico, di tale impostazione e le linee lungo le quali la letteratura sull'argomento¹⁹ si è indirizzata. Indichiamo, pertanto, con:

$$A = (a_{ij}) = 1, \dots, n$$

la matrice degli inputs (con i processi produttivi lungo le righe);

¹⁹ A partire dal fondamentale contributo di M. Egidi [1975]. Per quanto a conoscenza di chi scrive, il lavoro di Egidi rappresenta, pur con i limiti di cui parleremo, il primo rigoroso sforzo di formalizzazione della teoria classica della concorrenza. Nikaido [1983] ricorda, in una nota, che N. Okishio ha analizzato, in diversi suoi contributi degli anni '60, il problema della stabilità dei prezzi di produzione; i modelli di Okishio, tuttavia, non analizzano il problema della stabilità dei prezzi di produzione dal punto di vista della mobilità del capitale, come sottolinea Nikaido.

$$\omega = (\omega_j)$$

il vettore delle sussistenze per la forza lavoro;

$$l = (l_i)$$

il vettore dei requisiti diretti di lavoro di ciascun processo;

$$A + l \cdot \omega$$

la matrice aumentata degli inputs (poichè consideriamo solamente modelli in cui il pattern di consumo della forza-lavoro è considerato dato, nel seguito di questo paragrafo la matrice A indicherà la matrice aumentata degli inputs);

$$(p, q) = ((p_i), (q_j))$$

le grandezze (prezzi e quantità) di mercato;

$$(p^*, q^*) = ((p_i^*), (q_j^*))$$

i prezzi di produzione e le quantità di lungo periodo.

Se consideriamo, per semplicità, una economia in stato stazionario, la configurazione di lungo periodo sarà definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} p^* = (1 + r^*) A p^* \\ e^T p^* = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$q^* = q^* A + f \quad (2.2)$$

dove con $f = (f_j)$ abbiamo indicato il vettore della domanda per consumo finale da parte dei capitalisti, l'apice T indica la trasposizione di un vettore (o di una matrice) e $e^T = (1, \dots, 1)$.

Nella descrizione classico-marxiana del processo di gravitazione si possono distinguere due proposizioni principali. Secondo la prima, il prezzo di mercato muta in funzione della differenza esistente fra offerta corrente e domanda effettuale (effectual demand²⁰) - vale a dire "la domanda di coloro che sono disposti a pagare il prezzo naturale della merce"²¹. La domanda effettuale può essere identificata con:

$$q^* A + f$$

e quindi con q^* di modo che questa prima proposizione è compatibile con le due formalizzazioni seguenti:

²⁰ In Marx i fabbisogni socialmente determinati.

²¹ A. Smith (1776), p. 73.

$$\dot{p}_i = \alpha_i(q_i^* - q_i) \quad (2.3)$$

oppure:

$$p_i - p_i^* = \gamma_i(q_i^* - q_i) \quad (2.4)$$

con $i=1, \dots, n$ e dove:

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt}$$

e α_i, γ_i rappresentano funzioni continue e strettamente crescenti che conservano il segno.

La seconda proposizione afferma che i capitali si muovono dai settori con saggio di profitto inferiore a quello medio a quelli con saggio di profitto superiore e così facendo determinano diminuzioni di produzione nei primi e incrementi di produzione nei secondi. Poichè, inoltre, nel pensiero classico-marxiano è implicita l'ipotesi che se un prodotto ha un prezzo di mercato superiore (inferiore) al prezzo di produzione il saggio di profitto nella sua produzione è superiore (inferiore) a quello medio²², la seconda proposizione può essere così formalizzata:

$$\dot{q}_i = \beta_i(p_i - p_i^*) \quad (2.5)$$

con $i = 1, \dots, n$ e dove:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

e β_i è una funzione continua strettamente crescente che conserva il segno.

Conviene subito notare che in queste formalizzazioni dinamiche i prezzi determinano la dinamica delle quantità e le quantità determinano la dinamica dei prezzi, nel modello che considera la (3), ovvero gli scostamenti del prezzo di mercato da quello di equilibrio di lungo periodo, nel modello che prende in considerazione la (4)²³.

Questo tipo di dinamica è stato efficacemente denominato col termine *cross-dual*, e faremo nostra questa definizione nel prosieguo di questo lavoro.

²² Spesso identificato dai classici con il saggio di profitto uniforme. Si veda, per una discussione di questo punto, M. Egidi (1975).

²³ Come vedremo meglio in seguito, questo secondo caso può essere inteso nel senso che il prezzo di mercato si muove con velocità infinita alla posizione di equilibrio di *breve* periodo prevalente in ciascun istante.

L'equilibrio del sistema dinamico [3]-[5] è un centro²⁴, vale a dire le orbite sono rappresentate da curve chiuse che racchiudono il punto di equilibrio e la cui ampiezza dipende dalle condizioni iniziali. L'equilibrio è stabile, ma non asintoticamente stabile. Nel secondo caso - il sistema dinamico [4]-[5] - si ottiene:

$$\dot{q}_i = \beta_i \gamma_i (q_i^* - q_i)$$

con $i=1, \dots, n$ e si constata facilmente che l'equilibrio risulta globalmente asintoticamente stabile²⁵.

Va inoltre osservato che entrambe le formalizzazioni che abbiamo presentato costituiscono esempi di sistemi dinamici del tipo, cosiddetto, "decoupled"; sul piano dell'interpretazione economica questo vuol dire che l'aggiustamento opera, su ciascun mercato, indipendentemente da quello che accade sugli altri mercati. Per questo esse risultano assai semplici e forniscono risultati ben definiti (anche se non del tutto identici).

Purtroppo esse si avvalgono di quell'ipotesi implicita del pensiero classico-marxiano, secondo cui la differenza tra prezzo di mercato e prezzo di produzione ha lo stesso segno della differenza tra saggio di profitto del settore considerato e saggio medio. In realtà il fatto che il prezzo di mercato del bene i sia superiore al corrispondente prezzo naturale (o di produzione) non garantisce che la stessa relazione sussista fra saggio di profitto effettivo e saggio di profitto medio. In effetti fra i mezzi di produzione del bene i potrebbe figurare un bene (chiamiamolo j_i) il cui prezzo di mercato è ancor più al di sopra del corrispondente prezzo naturale di quanto non avvenga per il bene i ; ciò potrebbe far aumentare il valore dei beni capitale impiegati nella produzione del bene i calcolato ai prezzi di mercato rispetto a quello calcolato ai prezzi naturali in misura superiore allo scostamento del prezzo di mercato del bene i dal suo prezzo naturale²⁶. In una corretta formulazione del processo di gravitazione pertanto, dovendosi tener conto dell'aspetto ora evidenziato, il movimento nel tempo delle variabili di stato di un settore dovrà essere collegato alle variabili di stato (prezzi e/o quantità effettive) relative ad altri settori. Una corretta formalizzazione del processo di gravitazione - come apparirà chiaro nel paragrafo seguente - sarà pertanto assai più complessa delle formalizzazioni sopra esposte.

²⁴ Per maggiori dettagli si rimanda a G. Gozzi [1984]. Una formulazione analoga è fornita da A. Medio [1978], il quale si limita a considerare un modello a due settori.

²⁵ Boggio (1987).

²⁶ Steedman (1984).

3 DEFINIZIONE E NATURA DEI PREZZI DI PRODUZIONE.

3.1 La descrizione del processo di "gravitazione" rinvenibile negli economisti classici e in Marx postula un'economia in cui:

- a) il prezzo (di mercato) si forma in base alla domanda ed all'offerta;
- b) vi è piena libertà di entrata in tutti i settori produttivi dell'economia.

Chiamiamo "*pienamente concorrenziale*" una economia siffatta.

In anni recenti vari autori hanno pensato di studiare la stabilità dei prezzi di produzione all'interno di un quadro di riferimento profondamente diverso, in cui cioè:

- a) il prezzo effettivo si forma non in base alla domanda e all'offerta, ma in base ad una regola di *mark-up* o "*costo-pieno*";
- b) tale "costo pieno" è riferito ai tassi di profitto "*richiesti*" (*target rates of return*) non necessariamente uniformi, esogeni o con differenziali esogeni, spesso interpretati come conseguenze di barriere all'entrata.

Due motivazioni forti stanno alla base di questa impostazione. Una - la più ovvia - è che il secondo quadro di ipotesi appare più realistico rispetto alle economie capitalistiche di oggi. La seconda sta nel fatto - apparentemente irrilevante, in realtà a nostro avviso molto importante - che l'approccio di "costo pieno" consente di sfruttare in modo relativamente agevole alcune proprietà delle matrici non-negative e di operatori nonlineari da R_+^n a R_+^n - le quali permettono di ottenere risultati di stabilità molto forti, nonché robusti rispetto alle specificazioni.

Si pone però la questione se analisi siffatte usino correttamente - o sia ad esse applicabile correttamente, qualora gli autori non ne facciano uso esplicito - il concetto di prezzi di produzione, visto che esse non considerano l'uniformità del saggio di profitto come caratteristica essenziale del concetto di prezzi di cui viene studiata la stabilità.

Le definizioni, infatti, possono essere scelte liberamente, in vista di un più agevole sviluppo del discorso, ma a patto che - oltre ad essere chiare in sé stesse - non diano luogo a rischi eccessivi di confusioni di linguaggio rispetto a definizioni preesistenti. Riteniamo che, per soddisfare tali requisiti, sia essenziale che la definizione di prezzi di produzione che ora cercheremo di formulare comprenda come casi particolari, relativi ad economie "pienamente concorrenziali", sia la definizione di "*prezzi naturali*" o "*di produzione*" ricavabili dagli economisti classici e da Marx, sia i "*prezzi di Sraffa*". In tale direzione ora ci muoveremo.

Per giungere ad una definizione soddisfacente del concetto di prezzo di produzione conviene partire dai prezzi di Sraffa nella loro formulazione più semplice - quella con industrie a prodotto singolo e solo capitale circolante. I prezzi di Sraffa vengono infatti considerati, nella teoria economica contemporanea, come la formulazione coerente della nozione di "*prezzo di produzione*" di Marx nonché di quella di "*prezzo naturale*" dei classici.

Si consideri, dunque, il modello di Sraffa con produzione singola, solo capitale circolante e salari pagati alla fine del ciclo produttivo. Utilizzando i simboli già introdotti ed indicando con w il saggio di salario, si ha l'equazione dei prezzi:

$$p = (1+r)Ap + wl \quad (3.1)$$

$$p \geq 0; w > 0; 1+r > 0;$$

Si suppone poi A produttiva - cioè $R(A) < 1$, dove $R(A)$ è il raggio spettrale di A - ed indecomponibile, con $(1+r) < R(A)^{-1}$. In tal caso $(I - (1+r)A)^{-1}$ esiste ed è positiva ed il vettore dei prezzi di produzione è dato da:

$$p^* = w(I - (1+r)A)^{-1}l > 0 \quad (3.2)$$

Questa e le altre formulazioni - per casi di strutture produttive più complesse - che Sraffa e la letteratura post-sraffiana hanno prodotto - conducono a pensare ai prezzi di produzione semplicemente come ad *un vettore di prezzi di beni prodotti associato ad un saggio di profitto (e ad un saggio di salario) uniforme(i) (nelle industrie che producono i beni che hanno un prezzo positivo²⁷)*.

Come si è già avuto modo di osservare, tuttavia, una definizione lungo queste linee non risulterebbe per noi soddisfacente, poichè l'uniformità del saggio di profitto - dal punto di vista dell'interpretazione economica - ha senso solo come esito di lungo periodo di un processo concorrenziale, all'interno di un sistema in cui per tutti i capitali esiste in ogni settore piena libertà di entrata. L'ipotetica definizione che stiamo esaminando pertanto sarebbe del tutto inadatta per situazioni in cui la libertà di movimento dei capitali fosse limitata da barriere all'entrata. Tali situazioni - estremamente diffuse nella realtà economica odierna - hanno invece trovato una rappresentazione teorica anche formalmente simile a quella dei "*prezzi di Sraffa*", pur violando proprio quella caratteristica - l'uniformità del saggio di profitto - che dovrebbe costituire l'aspetto essenziale della definizione di prezzo di produzione.

Ciò è avvenuto con modalità assai semplici: ad esempio supponendo differenziali di profitto fissati esogenamente - dalle condizioni di entrata, appunto. Così, indicando con $m = (m_i)$ il vettore dei differenziali di profitto, definiti da:

$$1 + r_i = (1 + r)m_i$$

con A^+ la matrice $m^d A$ si ottiene una equazione del tutto simile alle (1)-(2), tranne che A^+ vi sostituisce A . I prezzi di produzione e le loro condizioni di esistenza possono essere descritti in modo del tutto analogo.

Riteniamo che la soluzione cercata possa essere ottenuta molto semplicemente, definendo i prezzi di produzione come un *vettore di prezzi di equilibrio di lungo periodo*. Su questa definizione due chiarimenti ci sembrano essenziali. Primo, il concetto di *equilibrio* utilizzato è quello della teoria matematica dei sistemi dinamici²⁸. Esso *presuppone un sistema dinamico* ed è definibile come *soluzione costante* del sistema stesso. In questa accezione del termine, un prezzo di equilibrio non è necessariamente un prezzo che eguaglia il valore della domanda e quello dell'offerta, come ad esempio nel caso in cui il prezzo è formato in base ad ipotesi di costo pieno. Secondo, il termine *lungo periodo* sta ad indicare che l'equilibrio in oggetto riguarda non solo le variabili che si muovono rapidamente, ma anche quelle che si

²⁷ Nelle ipotesi poste, tutti i prezzi sono positivi, ma ciò, com'è noto, non sempre vale nel caso in cui A sia decomponibile.

²⁸ Si veda l'Appendice.

muovono lentamente. (L'equilibrio di breve periodo, invece, riguarda solo le variabili che si muovono rapidamente). E' facile allora notare che il concetto di prezzi naturali o di produzione dei classici e di Marx rientra in questa definizione. Sembra legittimo infatti ritenere che per quegli autori se i prezzi di mercato venissero a coincidere con i prezzi di produzione (e non intervenissero fattori esogeni di perturbamento dei prezzi di mercato o di spostamento dei prezzi di produzione), tale coincidenza si manterrebbe poi a tempo indeterminato. Si avrebbe cioè una *soluzione costante* del sistema dinamico rinvenibile nel pensiero di quegli autori (cfr. in particolare il par. 2).

Venendo ora al caso di una economia dove i prezzi vengono fissati in base al costo pieno, che a sua volta è basato su "saggi di profitto richiesti" non necessariamente uniformi, va sottolineato che "un vettore di prezzi di equilibrio di lungo periodo" deve essere un vettore associato a saggi di profitto richiesti di equilibrio. Qualunque sia la teoria adottata sulla formazione di tali saggi e sull'aggiustamento dei saggi di profitto richiesti effettivi a quelli di equilibrio, appare naturale supporre che tale aggiustamento sia più lento del movimento dei prezzi determinato dal tentativo di adeguarli al costo pieno. Pertanto nel caso in esame risulta legittimo²⁹ scindere il problema della stabilità dei prezzi di produzione in due parti: 1) la stabilità dei prezzi rispetto alla configurazione congruente rispetto a saggi di profitto richiesti, che in via provvisoria si considerano come esogenamente dati (*equilibrio di breve periodo*), 2) la stabilità di tali saggi rispetto alla loro configurazione d'equilibrio. In realtà tutti i modelli di costo pieno, che noi considereremo nei par. 5 e 6, affrontano solo il primo aspetto.

3.2 Per meglio comprendere la natura dei prezzi di produzione (e la questione della loro stabilità che è oggetto specifico del presente lavoro), è opportuno chiedersi ora se tali prezzi meritino davvero una considerazione diversa e separata rispetto alle configurazioni di prezzo di equilibrio studiate dalla teoria del valore dominante, la teoria dell'equilibrio economico generale.

Per semplicità, faremo ciò con riferimento al caso particolare - ma più comunemente considerato - in cui vi è piena libertà di entrata in tutti i settori e quindi saggio di profitto uniforme.

Consideriamo innanzitutto la *struttura temporale* del modello di produzione sottostante. I prezzi di produzione, per loro natura, implicano in modo essenziale la presenza del capitale nell'attività produttiva e quindi il fatto che in ogni processo produttivo qualche input preceda ogni output. Ciò non è così banale, se si pensa ad esempio che sia il modello di Walras con produzione ma senza formazione di capitale, sia il modello di Leontief senza il capitale fisso trascurano questo fatto; trascurano cioè il ritardo temporale tra gli "inputs correnti" ed i corrispondenti outputs e quindi ciò che Sraffa chiama "capitale circolante".

Passiamo ora a considerare un'economia alla Arrow-Debreu, che sia dotata di funzioni di produzione differenziabili e tali che qualche input preceda ogni output in ciascun processo produttivo: la massimizzazione del profitto implica che per ogni produzione *con output positivo* il saggio di profitto *al margine* sia uniforme³⁰. Se inoltre si hanno rendimenti di scala costanti oppure decrescenti, ma tali da non creare extra-profitti (come ad esempio quelli considerati nella classica analisi ricardiana della rendita), allora vale anche l'uniformità dei

²⁹ Tale legittimità può essere intesa in modo corretto e rigoroso dal punto di vista dell'analisi dinamica alla luce delle tecniche di analisi di cui alla nota 50.

³⁰ Si veda Malinvaud (1972).

saggi di profitto *medi*³¹. Ecco dunque i prezzi di produzione emergere - apparentemente senza difficoltà - all'interno della teoria dell'equilibrio economico generale, come caso particolare in cui *un certo sottoinsieme predeterminato di beni è prodotto in quantità positive*. Questa particolare condizione, a sua volta, impone *restrizioni particolari sul vettore delle quantità iniziali*³². In questo senso i prezzi di produzione in un sistema con piena libertà di entrata sembrerebbero nulla più che un caso particolare di equilibrio in una economia alla Arrow-Debreu³³. In realtà collocare i prezzi di produzione all'interno di una economia alla Arrow-Debreu è operazione possibile dal punto di vista formale, molto discutibile dal punto di vista sostanziale. Nè i classici, nè Marx, nè Sraffa hanno mai pensato che la loro teoria dei prezzi si riferisse ad una economia con mercati a termine completi! Al contrario, tutto fa ritenere che per i classici e Marx i prezzi dei beni scambiati in futuro fossero prezzi attesi e le relative previsioni fossero fondamentalmente basate sui prezzi correnti.

Un confronto corretto andrebbe dunque fatto non con un equilibrio alla Arrow-Debreu, ma semmai con un equilibrio *temporaneo*, in cui cioè i prezzi dei beni che si intendono scambiare in futuro sono prezzi *attesi*. E' importante allora notare che, in presenza di un insieme di produzione convesso e tale per cui alcuni inputs prodotti precedono ogni output, un equilibrio temporaneo non assicura necessariamente la riproducibilità del sistema³⁴. *La capacità di assicurare la riproducibilità del sistema è invece caratteristica essenziale dei prezzi di produzione*, come si evince dall'analisi classica e marxiana, sia da quella di Sraffa³⁵. Pertanto la possibilità di ridurre i prezzi di produzione a caso particolare della teoria *statica* dell'equilibrio economico generale, così come oggi si presenta, è ancora tutta da provare. Va poi osservato - e fortemente sottolineato - che per quanto riguarda la teoria *dinamica* sottostante il concetto di prezzo di produzione - così come essa è ricavabile sia dagli autori classici e da Marx, sia dalle formalizzazioni più recenti (di cui dovremo occuparci nelle pagine seguenti) - la possibilità di ricondurla all'interno della teoria dinamica - intesa come teoria dei movimenti fuori dall'equilibrio - associata alla teoria contemporanea dell'equilibrio economico generale risulta del tutto fuori questione. Anzi riteniamo che proprio sul piano della dinamica, mentre la teoria dell'equilibrio economico generale sta attraversando una crisi profonda, la teoria dei prezzi di produzione - e di ciò speriamo si convincerà il lettore di questo capitolo - stia rivelando potenzialità interessanti.

³¹ Cfr. Malinvaud (1972).

³² Cfr. Hahn (1982).

³³ Hahn (1982).

³⁴ Roemer (1980).

³⁵ Le precedenti considerazioni ci inducono altresì ad osservare che la nostra definizione di prezzi di produzione come prezzi d'equilibrio di lungo periodo incorpora implicitamente il concetto di riproducibilità. Pertanto tale definizione implica altresì prezzi positivi per tutte le merci base e saggi di profitto ex-post nonnegativi nella produzione di tali merci.

4 STABILITA' DEGLI EQUILIBRI (CLASSICI E MARXIANI) DI LUNGO PERIODO IN MODELLI DI *CROSS-DUAL DYNAMICS*.

4.1 I modelli di cross-dual dynamics considerano l'aggiustamento simultaneo di prezzi e quantità come conseguenza della mobilità del capitale fra i diversi settori produttivi alla ricerca di saggi di profitto più elevati. In tale classe di modelli prezzi (di mercato) e quantità (effettive) interagiscono³⁶: i prezzi (di mercato) influiscono sulla evoluzione delle quantità prodotte determinando la struttura dei saggi di profitto settoriali e quindi la convenienza relativa degli investimenti da parte dei capitalisti; le quantità influiscono sulla evoluzione dei prezzi attraverso la relazione fra domanda ed offerta che esse comportano sul mercato. La mobilità del capitale *determina* la dinamica (per lo meno quella di breve periodo) di una economia capitalistica pienamente concorrenziale attraverso due meccanismi che possiamo definire, seguendo questo tipo di letteratura:

i) *la legge della domanda e dell'offerta*;

ii) *la legge della profittabilità*.

La legge della domanda e dell'offerta descrive il funzionamento del mercato e quindi contraddistingue, con riferimento al processo economico nel suo complesso, la fase dello *scambio*; essa fa dipendere (le variazioni de)i prezzi (di mercato) delle merci dalla relazione fra domanda ed offerta che esiste su ciascun mercato. La legge della profittabilità contraddistingue, invece, la fase della *(ri)produzione*; essa fa dipendere la variazione dei livelli di produzione di ciascuna merce dalla loro profittabilità relativa.

I modelli di "cross-dual" dynamics possono essere raggruppati in tre distinte classi, fondamentalmente, prendendo come criterio il modo di funzionamento del mercato che essi considerano. Possiamo così distinguere:

i) *modelli di equilibrio temporaneo*;

ii) *modelli con razionamento*;

iii) *modelli di disequilibrio completo*.

Una prima classe di modelli è quella che fa uso del metodo degli equilibri temporanei³⁷. Si suppone che in ciascun periodo i prezzi relativi delle merci assumano valori tali da uguagliare domanda ed offerta su ciascun mercato; la dinamica dell'economia è quindi descritta da una sequenza di equilibri temporanei.

³⁶ Questo spiega la definizione di *cross-dual* per quanto concerne la dinamica di questi modelli; Goodwin (1970) esprime lo stesso concetto con il termine di "*cross-field dynamics*".

³⁷ Franke [1987, Parte Prima], Kuroki [1986], Dutt [1988b], Nikaido [1983, 1985] sono esempi di modelli che rientrano in questa classe.

La seconda classe di modelli è quella in cui si suppone l'economia in disequilibrio in ciascun periodo (od istante), ma si introducono ipotesi di razionamento dal lato della domanda come conseguenza di una data disponibilità di capacità produttiva che l'economia si ritrova in ciascun periodo (od istante).³⁸

Infine, la terza classe di modelli assume invece che l'uguaglianza fra domanda ed offerta possa aversi solamente come posizione limite dell'economia, vale a dire solamente nella configurazione di lungo periodo; in ciascun periodo (od istante) l'economia si trova in "disequilibrio completo", nel senso che i saggi settoriali di profitto sono difformi e vi sono squilibri fra domanda ed offerta sui vari mercati. La dinamica dell'economia è determinata dalla reazione dei vari agenti economici alla situazione di disequilibrio che osservano³⁹.

Il resto di questo paragrafo si propone di evidenziare gli aspetti analitici comuni alle tre classi di modelli "cross-dual" menzionate in precedenza; per fare questo dobbiamo però prima affrontare alcune questioni (metodologiche ed analitiche) preliminari che riteniamo essenziali per una corretta interpretazione dei risultati che sono stati fino ad ora ottenuti con questo tipo di modellistica.

I modelli di cross-dual dynamics non sono, naturalmente, i soli a prendere in considerazione il simultaneo aggiustamento di prezzi e quantità in una economia capitalistica; nella letteratura troviamo anche i modelli multisettoriali di economie concorrenziali di ispirazione neoclassica⁴⁰. Esiste tuttavia una differenza fondamentale, sul piano metodologico, fra queste due classi di modelli; i modelli multisettoriali di ispirazione neoclassica assumono infatti che l'aggiustamento dei prezzi relativi dei beni sia tale da *realizzare l'uniformità del saggio di profitto in ciascun periodo (od istante)*⁴¹ grazie ai guadagni e/o alle perdite in conto capitale che in tal modo essi determinano al contrario dei modelli di cross-dual dynamics che concepiscono la uniformità del saggio di profitto solo con riferimento alla configurazione di

³⁸ All'interno di questa classe possiamo distinguere quei modelli in cui il razionamento dal lato della domanda riguarda l'investimento (ed è questo il caso di gran lunga più trattato nella letteratura) da quei modelli in cui il razionamento riguarda invece il consumo finale. Questo tipo di modellistica è sostanzialmente legata al nome di H. Nikaido [1983, 1985], il quale considera il razionamento dal lato della domanda di investimento da parte dei capitalisti; contributi in questa direzione sono stati sviluppati anche da Hosoda [1985] e Kuroki [1986]. Kubin [1989, 1990] ha considerato, invece, il caso di razionamento dal lato del consumo.

³⁹ Rientrano in questa classe di modelli i contributi di Dumenil-Levy [1987a, 1987b, 1989a, 1989b], di Boggio [1985, 1986], di Franke [1986, 1987 parte seconda]

⁴⁰ Si rimanda a Cass-Shell [1976], Kuga [1977] e, per una rassegna della letteratura, Burmeister [1980].

⁴¹ Sul piano analitico ciò si riflette nel fatto che nei modelli multisettoriali di derivazione neoclassica manca una funzione dell'investimento.

lungo periodo dell'economia⁴². Diverso ci sembra, infine, il meccanismo attraverso il quale l'(eventuale) uniformità del saggio di profitto si stabilisce in una economia pienamente concorrenziale; nel caso dei modelli multisettoriali di ispirazione neoclassica sono, come abbiamo appena menzionato, le rivalutazioni o svalutazioni degli stocks di capitale che garantiscono in ciascun periodo l'uniformità del saggio di profitto, *non la mobilità del capitale*, che contraddistingue invece l'analisi dei modelli di cross-dual dynamics di ispirazione classica e marxiana.

Sempre sul piano metodologico è necessario sottolineare la differenza fondamentale che esiste fra i modelli di cross-dual dynamics di derivazione classico-marxiana di cui ci occuperemo in questa sede ed i modelli di cross-dual dynamics walrasiani (o modelli di tatonnement nei prezzi e nelle quantità), vale a dire la natura sequenziale e decentralizzata del processo di aggiustamento di prezzi e quantità che contraddistingue i modelli classici di cross-dual dynamics in contrapposizione a quella simultanea e centralizzata che caratterizza invece i modelli walrasiani di tatonnement⁴³.

Un aspetto importante concerne la struttura temporale dei modelli di *cross-dual dynamics*. Nella letteratura troviamo formulazioni in tempo continuo (equazioni differenziali) e in tempo discreto (equazioni alle differenze). Il limite fondamentale dei modelli formulati in tempo continuo è il fatto di ridurre ad un infinitesimo la dimensione temporale della produzione. I modelli formulati in tempo discreto assumono, invece, che il periodo di produzione (diverso da zero) rappresenti il periodo di riferimento dell'analisi (per cui postulano implicitamente⁴⁴ che il processo di scambio non richieda tempo). La scelta della struttura temporale del modello riveste una notevole importanza in quanto, come vedremo in sede di esposizione dei risultati, i risultati di (in)stabilità della posizione di lungo periodo dell'economia *dipendono* dal tipo di formulazione adottata⁴⁵.

⁴² Ciò comporta, a nostro avviso, che il breve periodo dei modelli dinamici di ispirazione classico-marxiana è comunque contraddistinto da elementi di disequilibrio e quindi che non sia possibile una configurazione di equilibrio pieno di breve periodo. Questo, d'altra parte, è ciò che caratterizza la teoria walrasiana dell'accumulazione di capitale in cui l'equilibrio momentaneo o di breve periodo non comporta l'uniformità del saggio di profitto sul prezzo di offerta dei beni capitali, a meno che lo stock di beni capitali esistente all'inizio del periodo non appartenga ad un particolare insieme (si tratta di un cono poliedrico convesso definito dalla condizione di piena utilizzazione di tutti i beni capitali; cfr. Roemer [1980]); il breve periodo è caratterizzato dal fatto che alcune forze (il meccanismo di mercato) hanno prodotto i loro effetti, mentre altre sono ancora attive (la legge della profittabilità) e quindi determinano il cambiamento della configurazione appena raggiunta dall'economia. Una illuminante trattazione di questi aspetti con riferimento al modello walrasiano di accumulazione del capitale ed ai suoi rapporti con l'analisi classica (e marxiana) della concorrenza è quella di Zaghini [1967, 1986], alla quale rimandiamo anche per la letteratura sull'argomento.

⁴³ La ripresa dell'analisi di tatonnement nei prezzi e nelle quantità è abbastanza recente (cfr. Mas Colell [1986], p.e.; è, tuttavia, da menzionare il pionieristico contributo di Goodwin [1953]). E' opportuno sottolineare che l'analisi di tatonnement in cui prezzi e quantità si aggiustano simultaneamente prende in considerazione un modello di produzione e scambio con saggio di profitto nullo; da questo punto di vista il confronto andrebbe correttamente fatto con il modello walrasiano di accumulazione. Si rimanda a quanto scritto nella precedente nota 42.

⁴⁴ O esplicitamente come fanno, invece, Dumenil-Levy [1987a].

⁴⁵ Per una più puntuale trattazione di questo aspetto si rimanda a Boggio [1990b].

Un secondo aspetto riguarda la trattazione del consumo finale e, più in generale, il problema della sostituibilità (dal lato della produzione e da quello della domanda) fra beni in relazione alla stabilità (o meno) della posizione di lungo periodo. I modelli che prenderemo in considerazione⁴⁶ non considerano la sostituibilità dal lato della produzione (si ipotizza, infatti, che non vi siano metodi alternativi di produzione) come pure dal lato del consumo (si considerano, generalmente, funzioni di domanda finale per beni di consumo con elasticità unitaria rispetto al reddito e con coefficienti unitari di consumo che non dipendono dal vettore dei prezzi⁴⁷). Come è stato osservato, e su questo concordiamo, la considerazione di modelli di "cross-dual" dynamics senza sostituibilità consente di isolare i meccanismi di (in)stabilità associati alla mobilità del capitale.

4.1.1 Siamo ora in grado di trattare gli aspetti analitici che sono fondamentalmente condivisi dalle tre classi di modelli "cross-dual" menzionate nel paragrafo precedente; per quanto detto in precedenza circa la struttura temporale dei modelli in questione, formuleremo la nostra trattazione in termini di tempo discreto.

Un primo aspetto riguarda la domanda finale di merci; si distingue una domanda per investimenti ed una domanda per consumi finali. Se ci limitiamo al caso di produzione con capitale circolante (e assenza di produzione congiunta) possiamo esprimere questa componente della domanda finale nel modo seguente:

$$I_t = q_{t+1}A$$

rappresenta la domanda di mezzi di produzione al tempo t (per poter organizzare la produzione del periodo $(t+1)$), mentre per quanto riguarda la domanda per consumi finali abbiamo:

$$C_w = q_{t+1}l\omega$$

con riferimento alla forza-lavoro⁴⁸, e:

$$C_c = C(p, q)$$

per quanto riguarda invece il consumo finale dei capitalisti. In generale si suppone che la funzione $C(p, q)$ soddisfi le seguenti proprietà:

i) $C(p, q): R_{++}^n \times R_{++}^n \rightarrow R_+^n$ continua e differenziabile con continuità;

⁴⁶ Fanno eccezione Hosoda [1985] e Boggio [1985].

⁴⁷ E' appena il caso di sottolineare che la considerazione di funzioni di domanda finale con elasticità unitaria rispetto al reddito è necessaria quando la posizione di lungo periodo è uno stato di crescita bilanciata dell'economia; naturalmente non è affatto una condizione sufficiente (si veda tutto il dibattito, ripreso in tempi recenti, sull'esistenza di un sentiero di crescita bilanciata per modelli di economia capitalistica a due classi. Cfr. Morishima [1969], Bidard - Franke [1987], Marglin [1984], Fazi - Salvadori [1985], Salvadori [1988]).

⁴⁸ Quasi tutti i modelli di "cross-dual" dynamics adottano l'ipotesi di salari anticipati alla forza-lavoro. A conoscenza di chi scrive il solo modello in cui il salario viene considerato variabile è quello di R. Franke [1987, cap. 3].

ii) $C(p, q)$ omogenea di grado zero nei prezzi e di grado uno nelle quantità.

La domanda di beni al tempo t è quindi la seguente:

$$D_t = q_{t+1}(A + l\omega) + C(p, q) \quad (4.1)$$

Per quanto riguarda la legge della profittabilità una formulazione sufficientemente generale è la seguente⁴⁹:

$$q_{i,t+1} = q_{i,t} f(r_{i,t}) \quad (4.2)$$

con $f(r_{i,t})$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$i) f(r_{i,t}): R_{++}^n \rightarrow R^+$$

$$ii) f(r^*) = sr^*$$

$$iii) f'(r^*) > 0$$

e con le decisioni di produzione, q_{t+1} , che soddisfano il seguente vincolo:

$$q_{t+1}Ap_t + C(p_t, q_t) = q_t p_t$$

vale a dire che i capitalisti spendono una somma pari al valore corrente della produzione; in altre parole i modelli di "cross-dual" dynamics in genere prendono in considerazione una economia per la quale vale la *Legge di Say*. Possiamo quindi rappresentare la domanda finale di merci nel modo seguente:

$$D_t = D(p_t, q_t) = q_t f^d(r(p_t))A + C(p_t, q_t) \quad (4.3)$$

La legge della domanda e dell'offerta può essere allora formulata, in modo del tutto generale, in questi termini:

$$p_{i,t+1} = p_{i,t} g_i[q_i^{-1}(D_i(p_t, q_t) - q_{i,t})] \quad (4.4)$$

dove $g_i[q_i^{-1}(D_i(p_t, q_t) - q_{i,t})]$ è una funzione continua monotona crescente (e differenziabile con continuità), e soddisfa inoltre la seguente condizione:

$$g_i(0) = 1$$

⁴⁹ Una formulazione più adeguata è indubbiamente la seguente:

$$f(r_{i,t}, r_{mt})$$

dove r_{mt} rappresenta il saggio di profitto medio del periodo t . Questa formulazione consente di tener conto in modo significativo dei differenziali di profitto nel caso generale di n beni. Cfr. Boggio (1990b).

Un secondo aspetto comune alle tre classi di modelli è la rilevanza delle grandezze relative (prezzi relativi e quantità relative di produzione) per quanto concerne il problema della stabilità della posizione di lungo periodo dell'economia. Ciò è dovuto da un lato al fatto che i modelli in questione non prendono in considerazione la moneta (o, per meglio dire, considerano solamente la moneta in quanto intermediario degli scambi ed unità di conto) e non considerano fattori di produzione non riproducibili.

Il modello *generale* di cross-dual" dynamics può essere pertanto formulato in questi termini:

$$\begin{cases} p_{t+1} = p_t G(p_t, q_t) \\ q_{t+1} = q_t F(p_t, q_t) \end{cases} \quad (4.5)$$

I modelli in cui la cross-dual dynamics viene analizzata in termini di successione di equilibri temporanei si possono ottenere dal modello generale sostituendo alla prima equazione la condizione seguente:

$$G(p_t, q_t) = 0 \quad (4.6)$$

la quale definisce il vettore dei prezzi (di mercato) delle merci come funzione implicita dei livelli di produzione; se indichiamo con:

$$p_t = \pi(q_t) \quad (4.7)$$

tale funzione (che supponiamo definita in un opportuno intorno del vettore di quantità corrispondente alla configurazione di lungo periodo), l'evoluzione dell'economia sarà descritta dal seguente sistema dinamico:

$$q_{t+1} = q_t G(\pi(q_t), q_t) \quad (4.8)$$

Questa "specificazione" del modello di cross-dual dynamics consente, sul piano analitico, di interpretare il processo di gravitazione (di convergenza) dell'economia verso la sua configurazione di lungo periodo in termini di successione di equilibri temporanei se e solamente se due condizioni risultano soddisfatte: i) anzitutto i prezzi delle merci debbono *muoversi* molto più rapidamente delle quantità quando l'economia non è in condizioni di equilibrio; ii) l'equilibrio temporaneo deve essere (asintoticamente) stabile. Se sono soddisfatte queste condizioni allora la dinamica rilevante è quella delle quantità⁵⁰.

I modelli di "cross-dual" dynamics che prendono in considerazione il razionamento dal lato della domanda si ottengono dal modello generale sostituendo l'equazione che descrive le decisioni di produzione con una equazione che stabilisce quali sono i livelli di produzione che possono essere realizzati compatibilmente con l'esistenza di una data capacità produttiva; se

⁵⁰ Sul piano puramente formale i modelli in questione soddisfano le condizioni della "adiabatic approximation"; si veda, su questo punto, Lorenz (1989).

consideriamo, come al solito, un modello con solo capitale circolante e se supponiamo che la capacità produttiva sia pienamente utilizzata⁵¹ in ciascun periodo, il vettore dei livelli di produzione è determinato dalla condizione⁵²:

$$q_t - q_t A = (q_{t+1} - q_t)A + C(q_t, p_t) \quad (4.9)$$

I modelli di cross-dual dynamics studiano, in generale, il problema della stabilità locale della configurazione di lungo periodo⁵³; analiticamente questo vuol dire studiare sotto quali condizioni il raggio spettrale della matrice Jacobiana del sistema dinamico sia minore di uno (ovvero, in tempo continuo, gli autovalori abbiano parte reale negativa). In termini generali possiamo dire che la stabilità (locale) dell'equilibrio di lungo periodo dipende da parametri che rappresentano la reattività di prezzi e quantità a situazioni di squilibrio (difformità dei saggi di profitto per quanto riguarda le quantità, squilibri fra domanda ed offerta per quanto riguarda i prezzi) e dal grado di sostituibilità fra beni che esiste nell'economia (sia per quanto riguarda la produzione, sia per quanto riguarda il consumo⁵⁴). Con riferimento a quest'ultimo aspetto della sostituibilità i modelli di cross-dual dynamics non considerano la sostituibilità dal lato della produzione (si suppone infatti che la produzione avvenga in regime di rendimenti costanti di scala, nonché l'assenza di metodi alternativi di produzione) mentre, dal lato della domanda,

⁵¹ L'ipotesi di piena utilizzazione della capacità produttiva richiede, forse, qualche commento, soprattutto con riferimento al modello a capitale circolante che abbiamo preso come termine di riferimento. Nel modello che consideriamo la capacità produttiva è determinata dal vettore di mezzi di produzione di cui possono disporre di fatto i produttori dopo che è stata soddisfatta la domanda per consumi finali; questa è, fondamentalmente, l'alternativa seguita da Nikaido [1983], anche se non è la sola (per una diversa soluzione del problema del razionamento si veda il lavoro di Kubin [1990]). Per quanto riguarda la determinazione dei livelli di produzione è possibile eliminare l'ipotesi di piena utilizzazione della capacità produttiva, così come fa, ad esempio, Nikaido [1983] in una versione del suo modello; in ogni caso rimane il problema di come sia possibile, per i capitalisti, determinare livelli effettivi di investimento compatibili con dati vincoli di capacità produttiva. Il dubbio è che, in tale classe di modelli, sia necessario un banditore dal lato delle quantità; questa, d'altra parte, sembra essere la critica di Franke [1987] a tale modellistica.

⁵² In questo tipo di modello se $C_c(p, q) \equiv 0$, cioè il consumo dei capitalisti, è identicamente nullo, il sistema dinamico, così come costruito, ha una struttura decomponibile in quanto la dinamica delle quantità dipende solamente dalle quantità (mentre quella dei prezzi dipende da prezzi e quantità per il tramite della funzione degli investimenti). Si veda in particolare, per questo tipo di critica, Flaschel-Semmler [1986, 1987] e Dumenil-Levy [1987b].

⁵³ Franke [1986], Flaschel-Semmler [1986, 1987] sono le eccezioni che confermano la regola.

⁵⁴ Medio [1978] ha dimostrato, in un modello estremamente semplificato, che sostituibilità dal lato del consumo finale (cioè funzioni di domanda decrescenti rispetto al prezzo) e rendimenti decrescenti di scala (che comportano una particolare forma di sostituibilità fra inputs) sono fattori stabilizzanti.

vengono prese in considerazione funzioni di consumo finale con elasticità unitaria rispetto al reddito e coefficienti consumo/reddito fissi⁵⁵. Ritourneremo su questo aspetto del problema trattando dell'approccio di *completo disequilibrio*.

Nel paragrafo seguente prenderemo in considerazione un modello esemplificativo per ciascuna classe di modelli di "cross-dual" dynamics menzionati in precedenza; per semplificare l'esposizione adotteremo il formalismo dei modelli a due settori⁵⁶.

4.2 Consideriamo, pertanto, una economia in cui si producono due beni, il bene 1 (che, sotto opportune specificazioni della tecnologia possiamo indicare come bene capitale) ed il bene 2 (che, all'occorrenza, nel seguito potremo considerare come il bene di consumo). Facciamo nostre le usuali ipotesi di produzione che avviene in regime di rendimenti costanti di scala, di assenza di produzione congiunta (sia di tipo intrinseco, sia come espediente analitico per la trattazione del capitale fisso e dei beni non riprodotti e/o riproducibili) e di uniformità della struttura temporale dei processi produttivi; assumiamo, inoltre, l'assenza di metodi alternativi di produzione.

Indichiamo con:

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

la matrice degli stocks di beni, e con:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

la matrice dei flussi (cioè dei consumi intermedi di beni); conveniamo di rappresentare i processi di produzione lungo le righe ed i beni lungo le colonne.

Con:

$$l = (l_i) = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

indichiamo il fabbisogno di lavoro diretto di ciascun settore, e con:

⁵⁵ Un esempio di funzione di consumo di questo tipo è la seguente:

$$C_c = \frac{\alpha \Pi}{p \theta} \theta$$

dove θ è il vettore che indica la struttura del consumo dei capitalisti; è questa, per inciso, la funzione di domanda più comunemente usata in questo tipo di letteratura.

Hosoda [1985] e Boggio [1985] considerano invece il caso di una funzione di consumo finale con coefficienti consumo/reddito che dipendono dai prezzi relativi, per rendere stabile un modello di cross-dual dynamics instabile.

⁵⁶ Rimandandiamo a Boggio [1990b] per una trattazione generale del problema.

$$\omega = (\omega_j) = [\omega_1 \quad \omega_2]$$

il salario reale della forza-lavoro.

La legge della profittabilità viene formalizzata, nel contesto dei modelli a due settori che stiamo considerando, attraverso l'introduzione di una funzione degli investimenti. Come correttamente osserva H. Nikaido [1983] in un modello di produzione quale quello da noi considerato, il livello di produzione di un processo può essere preso come unità di misura dello stock di capitale necessario per l'attuazione dello stesso, mentre il tasso di variazione del livello di produzione può essere preso come unità di misura dell'investimento desiderato. In altri termini:

$$k = qB$$

rappresenta lo stock di capitale di ciascun settore;

$$\dot{k} = \dot{q}B$$

rappresenta l'investimento di capitale di ciascun settore (assumendo implicitamente che tutto lo stock di capitale esistente sia utilizzato⁵⁷).

Possiamo definire, quindi la seguente funzione:

$$\phi_i(\pi, q): R_{++} \times R_{++}^2 \rightarrow R$$

con $i=1,2$ e dove abbiamo indicato con $\pi = p_1/p_2$ il prezzo relativo dei due beni.

Tale funzione ($i=1,2$) rappresenta la variazione desiderata del livello di produzione del settore i -mo e, per quanto detto in precedenza, rappresenta l'investimento desiderato da parte dei capitalisti nel settore i -mo. La dipendenza della funzione di investimento dal prezzo relativo dei due beni (π) consente di tener conto del differenziale di profitto fra i due settori in maniera estremamente semplice mediante la seguente funzione:

$$\rho = \rho(\pi) = r_1 - r_2$$

La dipendenza, invece, dal vettore dei livelli assoluti di produzione può essere spiegata in questi termini. La fonte degli investimenti, nel tipo di modelli che stiamo considerando, è rappresentata dai profitti risparmiati dai capitalisti (è noto che gli economisti classici, Ricardo in particolare, identificano risparmio dei capitalisti ed investimenti⁵⁸), per cui per la classe capitalistica nel suo complesso vale la seguente relazione:

$$\sum_1^2 \phi_j a_j p = sq[I - A]p \quad (4.10)$$

⁵⁷ L'ipotesi di piena utilizzazione della capacità produttiva in modelli di derivazione classica appare ragionevole. Nel testo abbiamo optato per la rappresentazione in tempo continuo; l'equivalente dell'espressione precedente in tempo discreto è ovviamente:

$$k(t+1) - k(t) = (q(t+1) - q(t)) \cdot B$$

⁵⁸ Si rimanda alla trattazione di questo punto da parte di P. Garegnani [1979b]

che possiamo interpretare come il vincolo di bilancio per i capitalisti nel loro complesso (con s che indica la propensione costante al risparmio dei capitalisti). Possiamo, già a questo punto, caratterizzare la nozione di mobilità del capitale all'interno di questi modelli; per fare questo abbiamo bisogno di introdurre una ipotesi, tutto sommato ragionevole, sulla funzione di investimento dei capitalisti, e precisamente:

$$\tau = \tau(\pi, q) = \frac{\phi_1}{q_1} - \frac{\phi_2}{q_2} : R_+ \times R_{++}^2 \rightarrow R$$

$$\tau(o, q) = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \pi} \Big|_{\pi=\bar{\pi}} > 0$$

La prima espressione definisce il differenziale di crescita dei due settori in funzione del prezzo relativo dei beni e dei livelli assoluti di produzione; la seconda espressione postula che in corrispondenza dei prezzi di produzione i due settori crescono al medesimo ritmo ed infine la terza assume che il differenziale di crescita sia una funzione crescente del prezzo dei beni. La mobilità del capitale è determinata allora dal fatto che, quando i prezzi di mercato non coincidono con i prezzi di produzione e quindi i saggi di profitto settoriali sono difformi, un settore cresce ad un saggio superiore a quello determinato dal reinvestimento dei profitti da parte dei capitalisti che in esso operano (data la loro propensione a risparmiare) mentre l'altro cresce ad un saggio inferiore. Ciò è reso possibile dallo spostamento di profitti da un settore all'altro.

La legge della domanda e dell'offerta formalizza il funzionamento del mercato. La domanda di beni, nell'economia in considerazione, si compone di due parti. Abbiamo anzitutto la domanda per scopi produttivi, attraverso la quale la legge della profittabilità esercita il suo effetto, vale a dire:

$$D = D(\pi, q) = qA + \phi B$$

dove $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ rappresenta il vettore dell'investimento, ed abbiamo la (eventuale) domanda per consumo finale da parte dei capitalisti. Per quanto detto in precedenza possiamo in generale rappresentare le scelte in materia di consumo da parte dei capitalisti attraverso la seguente funzione:

$$c(\pi, q) : R_{++} \times R_{++}^2 \rightarrow R_+^2$$

E' appena il caso di sottolineare che la formulazione che abbiamo adottato per la funzione del consumo dei capitalisti ci consente di prendere in considerazione sia il caso in cui i beni sono specifici (in questo caso avremo che il codominio della funzione sarà il sottoinsieme di R_+^2 individuato dalla condizione $c_1(\pi, q) \equiv 0$) sia il caso in cui entrambi i beni possono essere utilizzati nella produzione e nel consumo.

La domanda complessiva per questa economia, per il periodo t -mo, è quindi la seguente:

$$\bar{D}(\pi, q) = qA + \phi B + c(\pi, q) \quad (4.11)$$

Per l'economia che stiamo considerando vale inoltre, come si può facilmente ricavare, la seguente condizione, tenendo conto di entrambe le componenti di spesa da parte dei capitalisti:

$$qp = c(\pi, q)p + qAp + qB\phi \quad (4.12)$$

che altro non è che la legge di Say applicata all'economia in considerazione.

Possiamo allora formalizzare il meccanismo di aggiustamento per l'economia in considerazione determinato dalla mobilità del capitale nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \Gamma(E_1(\pi, y)) \\ \dot{y} = \tau(\pi, y) \end{cases} \quad (4.13)$$

dove abbiamo indicato con $E_1(\pi, y)$ l'eccesso di domanda relativo del bene 1. La prima equazione fa dipendere la variazione del prezzo relativo dei beni dall'eccesso di domanda sul mercato⁵⁹, mentre la seconda equazione fa dipendere la crescita relativa dei due settori dal differenziale di profitto (oltrechè dalla struttura della produzione).

4.2.1 Come abbiamo già menzionato, una prima classe di modelli di gravitazione formalizza la dinamica di una economia capitalistica, in cui legge della domanda e legge della profittabilità interagiscono nel determinare prezzi e quantità, in termini di sequenza di equilibri temporanei. Si suppone, in altri termini, che i prezzi dei beni reagiscano molto più velocemente delle quantità a situazioni di squilibrio, per cui in ciascun istante (o periodo) di tempo domanda ed offerta di beni si uguagliano; è questo il tipo di modello preso in considerazione, fra gli altri, da R. Franke [1987], R. Kuroki [1986], H. Nikaido [1983, 1985] per il caso di produzione con solo capitale circolante (in un modello in cui il solo bene 1, cioè il bene capitale, è bene base) e da A. Dutt per il caso di produzione con capitale fisso (eterno) (sempre in un modello in cui il bene capitale è il solo bene base). Nel caso in cui:

$$B = A$$

il sistema dinamico precedente diventa:

$$\begin{cases} E_1(\pi, y) = 0 \\ \dot{y} = \tau(\pi, y) \end{cases} \quad (4.14)$$

dove:

$$E_1(\pi, y) = y - (a_{11}y + a_{21}) - (a_{11}\tilde{\phi}_1 + a_{21}\tilde{\phi}_2) \quad (4.15)$$

⁵⁹ Poichè assumiamo la validità della legge di Say, da un lato, e l'esistenza di due soli beni, dall'altro, l'eccesso di domanda relativo di un bene è sufficiente per caratterizzare il tipo di squilibrio che presenta ciascun mercato.

è l'eccesso di domanda relativo (del bene 1 in termini del bene 2). Dalla prima equazione ricaviamo il prezzo relativo dei due beni, dato il livello relativo di produzione⁶⁰; la seconda equazione (che rappresenta la vera e propria parte dinamica del modello) descrive l'evoluzione del livello relativo di produzione. Alcune osservazioni ci sembrano, a questo punto, necessarie.

OSSERVAZIONE 1:

Considerando mercati in equilibrio abbiamo che le decisioni dei capitalisti, vale a dire i loro piani di spesa per quanto riguarda accumulazione e consumo, sono sempre realizzate. Grandezze desiderate e grandezze effettive coincidono. Questo è l'elemento cruciale che differenzia questo tipo di modelli dai modelli di gravitazione di disequilibrio completo in cui la non corrispondenza fra grandezze desiderate e grandezze effettive comporta, per l'analisi dell'evoluzione dinamica dell'economia, la considerazione delle scorte ovvero di schemi di razionamento⁶¹.

OSSERVAZIONE 2:

Nel tipo di modelli che stiamo prendendo in considerazione sono le grandezze desiderate che si aggiustano (a quelle effettive). In particolare abbiamo che la variazione del prezzo relativo dei due beni determina un differenziale di profitto $\rho = r_1 - r_2$ tale per cui l'investimento desiderato da parte dei capitalisti (misurato in termini della variazione dei livelli di produzione) viene a coincidere con quello che può essere effettivamente realizzato quando il vettore x rappresenta l'offerta di beni sul mercato.

Lo studio della stabilità del modello viene normalmente condotto considerando piccoli spostamenti rispetto alla configurazione di lungo periodo per cui è possibile dedurre le caratteristiche delle orbite in un intorno sufficientemente piccolo di y^* considerando

⁶⁰ In R. Franke [1987] è contenuta una dimostrazione di esistenza di tale funzione.

⁶¹ Esiste una classe di modelli di gravitazione che potremmo definire intermedia e caratterizzata dal fatto che grandezze desiderate e grandezze effettive non coincidono (se non nella posizione limite della configurazione (semi)stazionaria di lungo periodo del processo dinamico) e pur tuttavia domanda ed offerta coincidono per ciascuna merce, pur in assenza di variazioni delle scorte. Esempi sono rappresentati da H. Nikaido [1983, 1985] e da E. Hosoda [1985]. In questo tipo di modelli sono le grandezze effettive ad aggiustarsi in modo tale da uguagliare domanda ed offerta sui mercati (mentre nei modelli che stiamo prendendo in considerazione sono le grandezze desiderate che si aggiustano); per questa classe di modelli non vale, ovviamente, la Osservazione 1 del testo.

l'approssimazione lineare del sistema precedente⁶². Poichè:

$$\dot{y} = \tau[\pi(y), y] \quad (4.16)$$

la stabilità locale dell'equilibrio dell'equazione differenziale precedente dipende dal segno di:

$$\frac{d\pi}{dy} = -\frac{\partial E_1 / \partial y}{\partial E_1 / \partial \pi}$$

Poichè:

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = -(1 - (1 + g)a_{11}) < 0 \quad (4.17)$$

si ricava che la condizione (sufficiente) di stabilità per il modello così formulato è la seguente:

$$\frac{\partial E_1}{\partial \pi} = a_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \pi} + a_{21} \frac{\partial \phi_2}{\partial \pi} < 0 \quad (4.18)$$

che⁶³ possiamo interpretare in termini economici dicendo che *l'economia converge verso la posizione di lungo periodo⁶⁴ se la struttura della domanda varia inversamente rispetto al prezzo relativo dei beni*. Possiamo rappresentare geometricamente questo risultato⁶⁵.

⁶² Grazie, come noto al teorema di Hartman-Grobman (si rimanda a Guckenheimer-Holmes [1983] per tale teorema). Ciò è possibile fare, nel nostro caso, se assumiamo:

$$|A| \neq 0$$

Per i modelli che stiamo considerando questa condizione ha una immediata interpretazione economica: le composizioni organiche del capitale dei due settori debbono essere diverse.

⁶³ Per la derivazione formale si veda R. Franke [1987], app. al capitolo 2.

⁶⁴ Si ricava facilmente che tale posizione di lungo periodo è un sentiero di crescita uniforme.

⁶⁵ Il grafico rappresenta, in realtà, il diagramma di fase di un sistema bidimensionale in cui la curva DD rappresenta l'orbita del sistema.

La curva DD rappresenta la struttura della domanda per l'economia in considerazione in funzione del prezzo relativo dei beni. Per l'ipotesi che abbiamo fatto, cioè di mercati in equilibrio in ciascun istante o periodo di tempo, configurazioni dell'economia che non si trovano sulla DD si portano istantaneamente sulla DD. Supponiamo, quindi, di partire da un punto quale il punto e^0 . Poichè il prezzo relativo è inferiore a quello di lungo periodo (determinato dai prezzi di produzione dei beni) si avrà mobilità del capitale dal settore 1 (del bene capitale) al settore 2 (del bene di consumo)

vale a dire si avrà un decremento di y . Ciò muove la configurazione dell'economia verso la posizione di lungo periodo. Sotto particolari condizioni il medesimo risultato di stabilità può essere interpretato dal punto di vista della struttura tecnologica dei processi produttivi; se infatti consideriamo i valori estremi della propensione al risparmio da parte dei capitalisti troviamo che la condizione di stabilità è soddisfatta quando la composizione organica del capitale nel settore del bene di consumo è superiore a quella del settore che produce il bene capitale^{66, 67}.

4.2.2 Come abbiamo sottolineato nel paragrafo precedente, all'approccio al problema della gravitazione fondato sull'ipotesi di mercati dei beni in equilibrio possiamo contrapporre un approccio del disequilibrio, approccio che sembra più aderente al pensiero classico (e, soprattutto, marxiano dell'anarchia capitalistica per quanto riguarda le decisioni degli imprenditori-capitalisti⁶⁸). In realtà possiamo individuare due distinti filoni dell'approccio del disequilibrio completo al problema della gravitazione: secondo un primo approccio il disequilibrio ex-ante fra domanda ed offerta viene risolto in termini di *razionamento* della domanda⁶⁹, mentre secondo l'altro approccio il soddisfacimento della domanda è reso possibile dalla considerazione di un adeguato stock di scorte di prodotti finiti⁷⁰.

L'analisi di Nikaido è particolarmente complessa, pur nel contesto di un modello a due settori, soprattutto per il tentativo, da parte di questo autore, di analizzare il problema della mobilità del capitale sia dal punto di vista reale che da quello monetario; con riferimento a questo specifico aspetto Nikaido fa riferimento, in maniera più o meno esplicita, alla teoria

⁶⁶ Si veda H. Nikaido [1983, 1985], R. Franke [1987]. Il caso in cui il settore del bene capitale ha una composizione organica superiore a quella del bene di consumo è compatibile con la stabilità della posizione di lungo periodo purchè la propensione al risparmio dei capitalisti soddisfi la condizione:

$s \in (0, 1)$

e purchè la reattività dei capitalisti al differenziale di profitto non vada oltre un certo livello. Cfr. R. Franke [1987].

⁶⁷ In un modello molto particolare, in cui la produzione richiede l'impiego di solo capitale fisso e non vi sono consumi produttivi intermedi sia direttamente, essendo il capitale fisso eterno, sia indirettamente, assumendo che la forza-lavoro sia pagata "*post-factum*" (quindi $A = 0$) A. Dutt [1988b] ha dimostrato che la condizione di una domanda produttiva decrescente rispetto al prezzo relativo dei beni è indipendente dalla struttura dei processi produttivi.

⁶⁸ Su questo punto ci sembra particolarmente interessante la trattazione di E. Screpanti [1984].

⁶⁹ Si veda la nota 51.

⁷⁰ Si veda, in particolare, Dumenil-Levy [1987a,b][1989a,b], Boggio [1985], Franke [1986, 1987 parte II].

marxiana del circuito del capitale. Il punto fondamentale della modellistica à la Nikaido è la distinzione fra due nozioni di investimento: l'investimento desiderato e l'investimento effettivo. L'investimento desiderato (la funzione dell'investimento, per usare la terminologia precedente) determina, in relazione alla profittabilità relativa dei settori (nonchè dei livelli di produzione realizzati), le decisioni di spesa dei capitalisti. Tuttavia la possibilità di realizzare i piani di spesa programmati dipende dalla disponibilità di capacità produttiva che l'economia si ritrova: l'investimento effettivo rappresenta quindi la spesa che i capitalisti possono effettivamente realizzare data la capacità produttiva esistente. Esiste quindi una differenza fondamentale rispetto all'approccio precedente; grandezze desiderate e grandezze effettive non necessariamente coincidono, *pur in presenza di flessibilità del prezzo relativo dei beni*. La logica del modello è quindi la seguente:

i) il prezzo relativo cambia in funzione della divergenza fra investimento desiderato ed investimento effettivo;

ii) la struttura della produzione cambia in funzione dell'investimento effettivo.

La struttura analitica dei modelli à la Nikaido è quindi la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \Omega(\pi, y) \\ \dot{y} = \Gamma(\pi, y) \end{cases} \quad (4.19)$$

In generale i risultati di Nikaido dipendono da considerazioni di natura tecnologica, in particolare la relazione che esiste fra composizione organica del capitale dei due beni⁷¹.

Come accennato in precedenza, alcuni autori analizzano il problema della gravitazione in termini di un modello di completo disequilibrio in cui i capitalisti possono portare a termine le loro decisioni di spesa (non vi è quindi razionamento, a differenza dei modelli à la Nikaido), perchè viene considerato un volume sufficiente di scorte.

Possiamo prendere il modello di Dumenil-Levy [1987a] per esemplificare questo tipo di approccio e prenderne in considerazione i principali risultati. Il modello è a due settori ed entrambi i beni sono beni base, è formulato in tempo discreto e il sistema dinamico che essi ottengono ha la seguente struttura⁷²:

$$\begin{cases} \pi_t = \pi_{t-1} G(\pi_{t-1}, y_{t-1}) \\ y_t = y_{t-1} F(\pi_{t-1}) \end{cases} \quad (4.20)$$

⁷¹ Questa dipendenza della stabilità dell'equilibrio di lungo periodo da una condizione tecnologica è considerata da alcuni come "imbarazzante" per la fondazione in chiave dinamica di una teoria "classica" del valore. Per una esplicita affermazione di questo punto si veda Dutt [1988b], Harris [1988]. In un recente lavoro Kubin [1989] fa dipendere questo risultato di Nikaido dalla formulazione in tempo continuo dei suoi modelli e dalle particolari ipotesi di razionamento che in essi sono contenute.

⁷² $G(\pi_{t-1}, y_{t-1})$
rappresenta l'eccesso di domanda relativo dei beni, mentre;
 $F(\pi_{t-1})$
rappresenta la profittabilità relativa.

Questo modello, che presenta coefficienti di consumo fissi, può essere stabile solo se la propensione al risparmio (dei capitalisti) è diversa sia da zero sia da 1, cioè se esiste un certo grado di sostituibilità dal lato della domanda. In tal caso la stabilità locale della posizione di lungo periodo dipende dai valori che assumono due parametri, l'uno che indica la reattività del mercato a situazioni di squilibrio, l'altro la reattività dei capitalisti a differenze di profittabilità nei due settori, e dipende anche (ed in ciò si manifesta la natura di disequilibrio del modello) dall'esistenza di uno stock di beni sufficientemente grande, nel periodo iniziale, da consentire lo svolgimento delle transazioni in tutti i periodi futuri (vale a dire, tale da garantire la positività delle scorte per tutti i periodi futuri⁷³). Secondo tali autori la concorrenza è un processo fondamentalmente stabile⁷⁴ se i capitalisti non hanno reazioni troppo marcate (anche se nella direzione giusta) alle situazioni di squilibrio; d'altra parte l'ipotesi di un comportamento adattivo dei capitalisti (anziché un comportamento ottimizzante, quale quello postulato dalla teoria microeconomica neoclassica) può verisimilmente giustificare l'ipotesi di assenza di reazioni oltre misura (in eccesso o in difetto).

Risultati piuttosto diversi si ottengono con un modello apparentemente molto simile, cioè in un modello in cui il tasso di crescita della produzione di ciascun settore invece di dipendere dal risparmio totale dell'economia - come nel modello di Duménil-Lévy - dipende solo da quello del settore considerato⁷⁵. Si dimostra ad esempio che, se i beni prodotti sono due, condizione necessaria per la stabilità locale è che la matrice jacobiana della funzione del consumo rispetto ai prezzi sia semidefinita negativa e questa proprietà, mentre è sempre garantita se si ha un solo bene di consumo, non lo è più se i beni di consumo sono più di uno.

⁷³ Dumenil-Levy non prendono in considerazione il modello con coefficienti variabili. Questo aspetto è considerato invece da Boggio [1985], dove si dimostra che la posizione di lungo periodo dell'economia è (asintoticamente) stabile se gli effetti di sostituzione associati alla funzione di consumo finale dei capitalisti sono sufficientemente grandi.

⁷⁴ Questa posizione non pare, tuttavia, del tutto accettabile perchè la propensione al risparmio dei capitalisti *non* è un parametro di reazione.

⁷⁵ Ci riferiamo qui al modello di *cross-dual dynamics* discusso da Boggio (1990b). Quella qui proposta è l'interpretazione dell'equazione rilevante di tale modello, che risulta compatibile con la Legge di Say. Si noti che supporre la validità della Legge di Say è ipotesi intrinseca al modello di Duménil-Lévy, ma può essere evitata nel modello di Boggio.

5 STABILITA' DEI PREZZI DI PRODUZIONE E IPOTESI DI COSTO PIENO. MODELLI LINEARI.

5.1 Conviene innanzitutto presentare le proposizioni matematiche più rilevanti per il primo tipo di modelli dinamici che esamineremo, quelli lineari (a coefficienti fissi). Questi modelli fanno uso di matrici nonnegative e qui, dando per note le proprietà matematiche di tali matrici usate nella teoria "statica" dei prezzi di produzione, ci limitiamo ad esporre quelle che hanno più diretta rilevanza per i sistemi dinamici.

Siano $T \geq 0$ una matrice quadrata di ordine n , $R(T)$ il raggio spettrale di T , u e v autovettori semipositivi rispettivamente sinistro e destro di T associati al suo autovalore dominante. Si supponga, inoltre, $R(T) > 0$.

Proposizione 1

Se $R(T) < 1$ allora:

- i) $T^t \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$;
- ii) $[I - T]^{-1}$ esiste ed è semipositiva, positiva se inoltre T è indecomponibile.

Proposizione 2

Se $R(T) = 1$ e $uv > 0$ allora:

- i) per $t \rightarrow +\infty$ si ha che $(t^{-1}) \sum_{m=1}^t T^m \rightarrow (uv)^{-1}(vu) > 0$
- ii) se inoltre T è primitiva⁷⁶, allora per $t \rightarrow +\infty$ $T^t \rightarrow (uv)^{-1}(vu) > 0$.

OSSERVAZIONE

Se T è primitiva allora è anche indecomponibile

Sia ora dato il sistema dinamico:

$$y(t+1) = Qy(t) + b \quad (5.1)$$

$$Q \geq 0; b \geq 0$$

⁷⁶ Cioè $T^m > 0$ per un intero positivo $m < (n-1)n^n$

dove $y(t), y(t+1) \in R^n$, $Q \geq 0$ è una matrice quadrata di ordine n , x e y autovettori semipositivi rispettivamente sinistro e destro della matrice Q associati al suo autovalore dominante.

Si noti poi che la (5.1) equivale alla seguente:

$$y(t+1) = Q^{t+1}y(0) + \sum_{m=1}^{t+1} Q^{m-1}b \quad (5.2)$$

Si ponga ora:

$$M(y(t)) = t^{-1} \sum_{h=1}^t y(h)$$

cosicchè, in vista della (2):

$$M(y(t)) = t^{-1} \sum_{h=1}^t Q^h y(0) + t^{-1} \sum_{h=1}^t \sum_{m=1}^h Q^{m-1}b \quad (5.3)$$

Proposizione 3

Se $R(Q) < 1$ e $b > 0$, allora, in vista della Proposizione 1, per t che tende a $+\infty$, Q^t e quindi la parte omogenea della (1) tendono a zero e la soluzione dell'intera equazione tende alla soluzione particolare:

$$(I - Q)^{-1}b \geq 0$$

che è positiva se Q è indecomponibile.

Proposizione 4

a) Se $R(Q) = 1$, $xy > 0$, $y(0) \geq 0$ e $b = 0$, allora, per t che tende a $+\infty$, $M(y(t))$, in vista della (2) e della Proposizione 2a, tende a:

$$(t^{-1}) \sum_{m=1}^t Q^m y(0) = (xy)^{-1} (yx) y(0) \geq 0$$

(espressione che risulta essere strettamente positiva se $y(0) > 0$.)

Si noti che:

$$(xy)^{-1} (yx) y(0) = k(y(0))y$$

dove $k(z)$ è la funzione da R^n a R definita da:

$$k(z) = (xy)^{-1} (xz)$$

Quindi:

$$(xy)^{-1}(yx)y(0)$$

è un autovettore destro (strettamente) positivo della matrice Q .

b) Se, inoltre, Q è indecomponibile e primitiva, in vista della Proposizione 2b, per t che tende a $+\infty$, $y(t)$ tende a $k(y(0))y$.

Proposizione 5

Se $R(Q) > 1$ e $xy > 0$, allora ponendo:

$$\frac{Q}{R(Q)} = K$$

e

$$\frac{y(t)}{R(Q)^t} = z(t)$$

si ottiene il sistema:

$$z(t+1) = Kz(t) + R(Q)^{-t}b \quad (5.4)$$

che per t che tende a $+\infty$, tende alla soluzione del sistema:

$$z(t+1) = Kz(t) \quad (5.5)$$

cui è applicabile la Proposizione 4. Se $y(0) \neq 0$ la soluzione del sistema originario (1) diverge a $+\infty$, ma i rapporti fra le componenti di $M(y(t))$ - o di $y(t)$ nel caso di indecomponibilità e primitività - tendono verso i corrispondenti rapporti definiti da y .

Il contenuto della Proposizione 1 è ben noto a quanti conoscono i fatti matematici sottostanti la teoria "statica" dei prezzi di produzione, come formalizzata da Sraffa in poi. Un po' meno noto è il punto b della Proposizione 2, mentre il punto a di tale proposizione, per quanto ci consta, è pochissimo conosciuto tra gli economisti, tant'è vero che non ci risultano applicazioni economiche dello stesso⁷⁷. Merita pertanto qualche commento: il suo interesse sta nel fatto che, come dimostrano le Proposizioni 4 e 5, esso consente di ottenere risultati non già inquadrabili nella classica teoria della stabilità dinamica, bensì nella "teoria ergodica" o, semplicemente, di stabilità asintotica della *media* - sull'intero orizzonte temporale considerato

⁷⁷ Per una presentazione più completa delle proprietà delle matrici non negative e le relative dimostrazioni si veda Horn-Johnson [1985], Capitolo 8, oppure Gantmacher [1959], Volume II.

- delle variabili di stato. La sua spiegazione a livello intuitivo sembra relativamente semplice, visto che eventuali autovalori negativi o complessi di modulo pari a $R(Q)$ determinano oscillazioni i cui effetti *in media* sono destinati a cancellarsi col passare del tempo. Esso comunque consente di estendere l'analisi dinamica a casi altrimenti intrattabili.

Un'ulteriore dimostrazione di questo asserto ci viene dalla successiva Proposizione 6, alla cui dimostrazione, in assenza di risultati in proposito a noi noti, abbiamo provveduto noi stessi. Essa viene fornita qui di seguito. Viene così coperto il caso in cui $R(Q) = 1$ e $b \geq 0$, che avrebbe costituito un vuoto in un quadro altrimenti relativamente completo.

Proposizione 6:

i) Siano $R(Q) = 1$, $b \geq 0$ e $xy > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|M(y(t))\| = +\infty$$

ma il vettore:

$$t^{-1}M(y(t)) = t^{-2} \sum_{h=1}^t Q^h y(0) + t^{-1} \sum_{h=1}^t \left(t^{-1} \sum_{m=1}^h Q^{m-1} b \right) \quad (5.5bis)$$

converge all'autovettore positivo destro di Q , cosicchè i rapporti tra le componenti di $M(y(t))$ convergono a quelli definiti da y ;

ii) Sia inoltre Q primitiva. Allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = +\infty$$

ma il vettore:

$$t^{-1}y(t) = t^{-1}Q^t y(0) + t^{-1} \sum_{m=1}^t Q^{m-1} b \quad (5.5ter)$$

converge anch'esso all'autovettore positivo destro di Q .

Dimostrazione.

Per t che tende a $+\infty$ il primo termine a destra del segno di uguale della (5.5bis) e della (5.5ter) converge a:

$$t^{-1}k(y(0))y$$

e quindi tende a 0. Si definisca ora:

$$X(h) = t^{-1} \sum_{m=1}^h Q^{m-1} b$$

cosicchè il secondo termine a destra del segno di uguale della (*) e della (**) diventa, rispettivamente:

$$t^{-1} \sum_{h=1}^t X(h)$$

e

$$X(t)$$

Ora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = (xy)^{-1} (yx)b = k(b)$$

in forza della Proposizione 2, e quindi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \sum_{h=1}^t X(h) = k(b)y$$

5.2 Consideriamo ora modelli di formazione dei prezzi sulla base di saggi di profitto richiesti esogenamente dati. Ciò, come si è già argomentato al termine del par. 3.1, si giustifica se si accetta l'idea che i movimenti di tali saggi siano assai più lenti dei movimenti con cui ciascun prezzo si adegua al livello corrente del costo pieno, quale risulta in base ai prezzi correnti degli inputs e ai livelli correnti dei suddetti saggi. In questo e nel prossimo paragrafo, salvo contrario avviso, si supporrà sempre che per l'equilibrio di lungo periodo siano rilevanti solo i *differenziali* dei saggi di profitto e che quelli esogenamente dati siano di equilibrio⁷⁸.

Partiamo dal caso più semplice, in cui si suppone che valgano le seguenti ipotesi:

- a) un modello di produzione come quello già introdotto nel paragrafo precedente cioè "industrie a prodotto singolo e solo capitale circolante" e salari pagati alla fine del processo produttivo, ammettendo però la presenza di merci non-base;
- b) saggio di salario monetario costante e uniforme, w ;
- c) un saggio di profitto richiesto uniforme, r ;
- d) aggiustamento completo nell'ambito di un periodo del prezzo al costo pieno.

Abbiamo allora:

$$p(t+1) = (1+r)Ap(t) + wl \tag{5.6}$$

dove $p(t)$ è il vettore dei prezzi al tempo t , A ed l sono come definiti nel par. 3; in particolare $l > 0$.

⁷⁸ Tuttavia qualora si abbia convergenza anche dei prezzi assoluti, i risultati ottenuti valgono anche nel caso in cui nell'equilibrio di lungo periodo risultano determinati non solo i differenziali, ma anche i livelli dei saggi di profitto.

L'applicazione delle proposizioni 1-6 è immediata. Tenendo presente che:

$$R((1+r)A) = (1+r)R(A)$$

abbiamo quanto segue, per t che tende a $+\infty$.

i) Se:

$$(1+r) < 1/R(A)$$

i prezzi convergono asintoticamente a:

$$p^* = w[I - (1+r)A]^{-1} \geq 0$$

ii) Se: $(1+r) \geq 1/R(A)$, e $p(0) \geq 0$, allora⁷⁹:

iia) i prezzi divergono a $+\infty$ ed il salario reale tende a 0;

iib) definiamo il vettore dei *prezzi relativi*:

$$P(t) = \left(\sum_{i=1}^n p_i(t) \right)^{-1} p(t)$$

ed indichiamo con $M(P(t))$ la loro media temporale:

$$M(P(t)) = \frac{\sum_{\tau=1}^t P(\tau)}{t}$$

Allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M(P(t)) = P^+ = \left(\sum_{i=1}^n p_i^+ \right)^{-1} p^+$$

dove p^+ è un autovettore (semipositivo) destro di $(I+r)A$ associato all'autovalore dominante;

iic) se, inoltre, A è primitiva allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = P^+$$

⁷⁹ Molti risultati di stabilità asintotica che si incontreranno in questo e nel prossimo paragrafo valgono per qualunque vettore iniziale dei prezzi, $p(0)$, semipositivo, ma non per $p(0) = 0$. Tuttavia nel seguito, dato l'interesse economico nullo che tale eccezione riveste, ometteremo per lo più di menzionarla; non solo, ma nonostante essa useremo l'espressione, "stabilità globale".

Poichè l'azzeramento del salario reale è un risultato economicamente assurdo, possiamo modificare il significato della matrice A supponendo che essa includa le sussistenze dei lavoratori. Ciò equivale a supporre che questa parte del salario sia pagata "in specie" oppure che sia indicizzata ai prezzi con velocità istantanea.

Si definisca ora il *saggio di profitto (effettivo) ex-post* nell'industria i -esima al tempo t , $\sigma_i(t)$, come il massimo saggio di crescita del capitale investito in termini reali finanziabile con i ricavi della produzione.

Con riferimento al modello in esame il vettore $\sigma(t) = (\sigma_i(t))$ risulta definito da:

$$\begin{cases} p(t) = (I + \sigma^d(t))Ap(t) + wl \\ \sigma(t) > -e \\ p(t) \geq 0 \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con $\sigma^d(t) = [\sigma_i(t)\delta_{ij}]$ la matrice diagonale (con diagonale positiva) dei saggi di profitto ex-post⁸⁰ e con $e = (e_j)$ il vettore somma di dimensione opportuna.

Lungo la traiettoria asintotica si ha:

- nel caso i) si ha:

$$p(t) = p^*$$

e

$$p(t) = (1 + r)Ap(t) + wl$$

$$r > 0$$

e quindi r è il saggio di profitto ex-post;

- nel caso ii), se $(1 + r) > 1/R(A)$ si ha:

$$p(t) = [(1 + r)R(A)]^{-t} p^+$$

e

$$R((1 + r)A)p(t) = (1 + r)Ap(t)$$

cioè:

$$R(A)p(t) = Ap(t)$$

⁸⁰ δ_{ij} è il simbolo di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

- nel caso ii), se $1 + r = 1/R(A)$, si ha:

$$(t + 1)p(t) = t(1 + r)Ap(t) + wl$$

cioè, per $t \rightarrow +\infty$:

$$p(t) = (1 + r)Ap(t)$$

cosicchè il saggio di profitto ex-post, nel caso ii), è comunque $(1/R(A) - 1)$ ⁸¹

Per trarre conclusioni sulla convergenza o meno ad un vettore di prezzi di produzione occorre ancora stabilire se p^* e p^+ siano vettori con prezzi positivi per tutte le merci base⁸².

Questo requisito è sicuramente soddisfatto se A è indecomponibile. Se è decomponibile ma esistono merci base - cosa che noi d'ora in poi supporremo - la si ponga, senza perdita di generalità, nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

con $A_{11}, A_{12}, A_{22} \geq 0$, A_{11}, A_{22} quadrate di ordine, rispettivamente, n_1 ed n_2 , A_{22} indecomponibile.

Un vettore di output netti q richiede, direttamente ed indirettamente, un vettore di input $v = q[I - A]^{-1}A$. Se, come nel nostro caso, $R(A) < 1$, tutti e ciascuno degli ultimi n_2 beni sono merci base se e solamente se per qualunque $q \geq 0$ gli ultimi n_2 elementi di v sono positivi, il che equivale alla positività delle ultime n_2 righe della matrice $[I - A]^{-1}$. Si noti, inoltre, che ciascun elemento di $[I - A]^{-1}$ è nullo se e solo se lo è il corrispondente elemento di $[I - \alpha A]^{-1}$, con $\alpha < 1/R(A)$.

Quindi gli ultimi n_2 elementi di:

$$p^* = w[I - (1 + r)A]^{-1}l$$

con $(1 + r) < 1/R(A)$, $l > 0$, sono positivi e p^* è un vettore di prezzi di produzione.

Quanto a p^+ , si dimostra facilmente che, se $R(A_{11}) \geq R(A_{22})$ allora gli ultimi n_2 elementi sono nulli; se invece $R(A_{11}) < R(A_{22})$ allora sono positivi⁸³.

Si noti, infine, che in entrambi i casi, per un autovettore riga semipositivo q^+ di A si ha $q^+p^+ > 0$.

⁸¹ Se $1 + r > 1/R(A)$, allora $((1 + r)/R(A) - 1)$ è il saggio di inflazione.

⁸² Cfr. la nota 35.

⁸³ Per una derivazione di questi risultati nel contesto dei modelli lineari di produzione si rimanda a Egidi [1975] e Zaghini [1967].

Quindi, se vi è qualche merce base e $p \geq 0$, si può concludere quanto segue:

- i) il saggio di profitto ex-post converge a quello richiesto se $(1/R(A) - 1) \geq r$, converge a $(1/R(A) - 1)$ nel caso contrario;
- ii) se $(1 + r) < 1/R(A)$ o, quale che sia il valore di r , se A è primitiva, allora i prezzi relativi convergono ad un vettore di prezzi di produzione;
- iii) se $(1 + r) < 1/R(A)$ o, quale che sia il valore di r , se vale una delle due seguenti condizioni:
 - a) A è indecomponibile;
 - b) A è decomponibile, ma $R(A_{11}) < R(A_{22})$

allora le "medie nel tempo", $M(P(t))$, dei prezzi relativi convergono ad un vettore di prezzi di produzione.

Convien, a questo punto, soffermarci sulle condizioni $(1 + r) < 1/R(A)$, $(1 + r) > 1/R(A)$ e $(1 + r) = 1/R(A)$; esse esprimono, rispettivamente:

- a) la compatibilità fra saggi di profitto richiesti, salari reali non nulli e condizioni fisico-tecniche (e socio-biologiche, se A comprende le sussistenze) del sistema;
- b) la incompatibilità tra tali grandezze e condizioni;
- c) come al punto a), ma con salari reali nulli.

Nel seguito troveremo condizioni di significato economico identico, la cui formulazione matematica varierà con le caratteristiche del modello in esame. Per comodità ci riferiremo alla prima di esse con l'espressione "condizione di compatibilità".

Si suppongano, ora, tassi di profitto richiesti diversi da industria a industria. Il vettore dei relativi differenziali, $m = (m_i)$, sia definito, come già nel par.3, da:

$$(1 + r_i) = (1 + r)m_i$$

dove r_i è il tasso di profitto richiesto nel settore i -mo. Si supponga, inoltre:

$$m_i \geq 1$$

$i=1, \dots, n$ cosicchè r è il minore tra tali saggi di profitto.

Si definisca poi la matrice $A^+ = m^d A$ e, nel caso di decomponibilità, si suddivida la matrice A^+ come segue:

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_{11}^+ & A_{12}^+ \\ 0 & A_{22}^+ \end{bmatrix}$$

dove $A_{11}^+, A_{12}^+, A_{22}^+ \geq 0$, A_{11}^+ e A_{22}^+ quadrate di ordine rispettivamente n_1 e n_2 , A_{22}^+ indecomponibile.

Sostituendo A^+ ad A nella (6) si ottengono risultati matematici analoghi e conclusioni economiche del tutto simili.

5.3 I precedenti risultati mettono in rilievo, tra l'altro, che la parte del salario monetario non indicizzata può essere azzerata in termini reali se i saggi di profitto richiesti sono incompatibili con le caratteristiche fisico-tecniche e sociali (relative alla eventuale quota di salario perfettamente indicizzata) del sistema produttivo. Appare allora naturale chiedersi quali conseguenze - in particolare sull'inflazione e sulla distribuzione del reddito - possano derivare da un comportamento "meno passivo" dei percettori di salario. E' questa l'ottica prevalente di due tra i primi lavori (Okishio [1959], Nikaido/Kobayashi[1978]) che rientrano nell'ambito di quelli trattati nel presente paragrafo.

Okishio (1959) suppone che il salario nominale sia legato al valore corrente di un paniere fisso di beni, cioè - nelle nostre notazioni -

$$w(t+1) = \omega p(t) \quad (5.7)$$

$$p(t+1) = (1+r)Ap(t) + w(t)l \quad (5.8)$$

dove ω è il vettore riga che rappresenta tale paniere.

Abbiamo così un sistema alle differenze finite, omogeneo, lineare a coefficienti costanti, con variabile di stato e matrice dei coefficienti, rispettivamente:

$$\pi(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} (1+r)A & l \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

Okishio suppone A indecomponibile ed in tal caso è facile vedere che lo è anche Q , che, essendo $l > 0$, è anche primitiva⁸⁴.

Okishio suppone inoltre che:

$$(1+r)R(A) < 1 < R(Q)$$

Pertanto, se $\pi(0) \neq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\pi(t)\| \rightarrow \infty$$

ma

⁸⁴ Poichè l'ultima colonna di Q^2 è positiva e Q^2 è indecomponibile, essa è anche primitiva (cfr. Egidi, 1975) e quindi tale è anche Q .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi(t)}{(R(Q))^t} \rightarrow \pi^+$$

(cfr. la Proposizione 5) con π^+ che rappresenta un autovettore positivo destro della matrice Q e che possiamo scrivere nella maniera seguente:

$$\pi^+ = \begin{bmatrix} \pi^{+(1)} \\ \pi^{+(2)} \end{bmatrix}$$

dove:

$$\pi^{+(2)} \in R$$

Lungo la traiettoria asintotica, pertanto:

$$p(t+1) = R(Q)p(t) = (1+r)Ap(t) + (R(Q))^{-1}sp(t)l$$

dove $p(t) = (R(Q))^t \pi^{+(1)}$, cosicchè:

a) il saggio di salario reale è $(R(Q))^{-1}sp^{+(1)}$,

b) il saggio di profitto ex-post è uniforme (e pari a $((1+r)/R(Q) - 1)$ e quindi i prezzi relativi convergono ad un vettore di prezzi di produzione. Okishio dimostra anche che, lungo la traiettoria asintotica, il tasso di inflazione è funzione crescente dei saggi di profitto e di salario richiesti; che se uno solo dei due aumenta, la distribuzione del reddito ex-post si sposta a favore della classe che lo richiede; e che la lunghezza del ritardo nell'indicizzazione salariale incide negativamente sul salario reale.

In questo saggio di Okishio del 1959⁸⁵ troviamo, infine, già chiaramente delineati la possibilità di introdurre saggi di profitto richiesti diversi da settore a settore ed i risultati che ne conseguono.

L'ipotesi sul saggio di salario di Okishio trova una versione per certi aspetti più raffinata nel lavoro di Nikaido e Kobayashi (1978), in cui si suppone un comportamento asimmetrico: definito un indice dei prezzi, quando tale indice cresce il saggio monetario risulta legato ad esso - nel modo che vedremo - senza ritardi, mentre in caso contrario non varia. Supposta indecomponibile la matrice A - cui manteniamo il significato già attribuitole inizialmente - denotiamo con c un autovettore positivo sinistro di A (la *merce tipo* di Sraffa⁸⁶) e con $p^c(t)$ l'indice suddetto al tempo t , definito da:

$$p^c(t) = cp(t)$$

Si suppone che il saggio di salario cambi nel tempo (si opera qui in tempo continuo) in base all'equazione:

⁸⁵ Ripubblicato in inglese nel 1977

⁸⁶ Cfr. Sraffa (1960), cap. 4.

$$\frac{1}{w(t)} \frac{dw(t)}{dt} = \max \left(\delta \frac{1}{p^c} \frac{dp^c}{dt}, 0 \right)$$

dove δ è una funzione crescente del saggio (aggregato) di crescita del sistema, il quale, a sua volta, è funzione decrescente del saggio di salario reale, $w(t)/p^c(t)$. A seconda della forma di tale funzione, si può avere una crescita illimitata dei salari e dei prezzi assoluti od una loro convergenza. In ogni caso, si ha convergenza dei prezzi relativi ad un vettore di prezzi di produzione, analogamente a quanto si otterrebbe, in base ai risultati già illustrati in precedenza, operando in tempo discreto. Il pregio di questo lavoro sta nel presentare le varie possibilità come casi particolari di una relazione bidirezionale tra salari reali e tasso di crescita.

Praticamente contemporaneo al lavoro precedente e alla versione inglese di quello di Okishio è un saggio di un quarto economista giapponese, M. Aoki (1977), che esamina il problema della stabilità sia dei prezzi che delle quantità, con riferimento al noto problema della "instabilità duale"⁸⁷. Tralasciamo, qui, gli aspetti relativi alle quantità, le quali, nel modello considerato, dipendono dai prezzi ma non li influenzano. L'unica differenza rispetto all'analisi di Okishio sta nell'ipotesi sul saggio di salario: si suppone che esso non sia nè indicizzato, nè costante, bensì crescente ad un tasso predeterminato τ . Le equazioni del modello, espresse nella nostra notazione, sono allora le seguenti:

$$p(t+1) = (1+r)(m^d A p(t) + w(t+1)l) \quad (5.9)$$

$$w(t+1) = (1+\tau)w(t) \quad (5.10)$$

da cui, ponendo $z(t) = (w(t))^{-1}p(t)$, si ottiene:

$$z(t+1) = Qz(t) + (1+r)m^d l \quad (5.11)$$

dove $Q = (1+r)(1+\tau)^{-1}m^d A$.

Poichè Aoki suppone la "condizione di compatibilità" $R(Q) < 1$, possiamo applicare la Proposizione 3; pertanto $z(t)$ converge a:

$$z^* = (I - Q)^{-1} (1+r)m^d l$$

che è ben definito e semipositivo. Quindi:

- a) i saggi di profitto ex-post convergono a $(1+r)(1+\tau)^{-1}m$;
- b) i prezzi relativi convergono ad un vettore di prezzi di produzione;
- c) lungo la traiettoria asintotica il tasso di inflazione è τ ed il salario reale resta costante e positivo.

⁸⁷ Pur nascendo, il problema, nel modello di Leontief con capitale fisso, mentre Aoki, nel suo modello, considera solamente il caso di capitale circolante.

Ancora degli stessi anni è il saggio di Zaghini (1978), in cui si studiano vari modelli di formazione dei prezzi simili alla (6) o alla variante con differenziali di profitto richiesti:

$$p(t+1) = (1+r)m^d Ap(t) + wl \quad (5.12)$$

Alcuni, tuttavia, non rientrano tra quelli lineari e ne rinviemo pertanto la trattazione al par. seguente. Quanto agli altri essi si differenziano dalla (6) e dalla (12) per varie caratteristiche, tra cui:

- a) l'aggiustamento del prezzo al costo pieno non avviene necessariamente nell'ambito di un periodo;
- b) il margine può essere una quota - eventualmente diversa da industria ad industria - del prezzo anzichè del costo;
- c) se un'industria utilizza come input parte del proprio output, il costo di tale input è calcolato non al prezzo corrente, ma in base al costo pieno stesso.

In tutti questi casi il modello risulta sempre della forma seguente:

$$p(t+1) = Qp(t) + wl \quad (5.13)$$

dove Q è una matrice quadrata, semipositiva ed indecomponibile, che dipende da r .

Si suppone la "condizione di compatibilità" $R(Q) < 1$, cosicchè ovvie varianti delle considerazioni svolte a proposito della (6) e della (12) consentono di stabilire la convergenza dei prezzi assoluti ad un vettore di prezzi di produzione pari a:

$$w(I - Q)^{-1}l$$

Appare evidente da questa rassegna quante varianti possano essere introdotte al modello di base mantenendo intatta la conclusione principale, la stabilità globale dell'insieme di vettori che, in ciascuna specificazione, rientra nella definizione di prezzi di produzione. Come già si ebbe modo di affermare in precedenza, questa classe di modelli si può avvalere di risultati molto potenti, che danno luogo a conclusioni robuste rispetto alle specificazioni. Non così robusti, tuttavia, da estendersi a tutti i modelli lineari, come vedremo.

Ci interessa per intanto mettere in rilievo una difficoltà che emerge anche in modelli relativamente semplici come quelli già visti. Qualora lungo la traiettoria asintotica vi sia un tasso di inflazione costante e positivo i saggi di profitto e di salario ex-post risultano inferiori a quelli richiesti. Ci si chiede se ciò non dovrebbe condurre ad un aumento dei saggi richiesti⁸⁸ e quindi ad una inflazione a tasso crescente. L'esplosione dei prezzi può essere, tuttavia, impedita, solo da meccanismi economici o da apposite politiche e gli uni e le altre difficilmente possono operare se non attraverso le quantità.

⁸⁸ Questo aspetto diviene particolarmente rilevante allorchè - com'è perfettamente possibile nei modelli esaminati - taluni saggi di profitto ex-post siano negativi, cosicchè non si vede come la riproduzione di tali settori possa essere finanziata.

5.4 Ci siamo finora occupati di modelli con solo "capitale circolante". Possiamo però facilmente estendere l'analisi a quei modelli dinamici che, pur introducendo il "capitale fisso", sono ancora modelli lineari a coefficienti fissi non negativi.

Un esempio, in proposito, ci viene offerto dalla tecnologia Walras-Leontief con capitale fisso, nella versione che ammette un ritardo tra input correnti ed output. Accanto ad una matrice A di input correnti, essa prevede una matrice B di input di capitali fissi, restando ferma la matrice identità I come matrice degli output - cioè l'ipotesi di industrie a prodotto singolo. Seguendo Morishima (1964), supponiamo che il bene i -mo duri T_i periodi (T_i è un intero): per i beni capitali $T_i > 1$, per gli altri beni $T_i = 1$; che il suo logorio sia costante nel tempo e pari ad una frazione $1/T_i$ della consistenza iniziale. Siano D il vettore diagonalizzato ($1/T_i$), B_i la i -ma riga di B , cosicchè $B_i D$ rappresenta il vettore dei coefficienti di logorio per unità di tempo, associati alla produzione di una unità del bene i -mo.

Si assumono fissi il tasso di interesse r ed il tasso di salario w , nullo il profitto puro richiesto. Si assume, inoltre, che tutti i beni siano merci base, cioè che $(A+B)$ sia indecomponibile.

Ciò posto, la formazione dei prezzi in base al costo pieno può essere modellata nel modo seguente:

$$p(t+1) = Q(r)p(t) + wl \quad (5.14)$$

dove:

$$Q(r) = (A + rB + BD)$$

Questo modello può essere visto come un caso particolare di quello di Morishima (1964), che si ottiene eliminando da questo la scelta delle tecniche. In effetti, pur partendo inizialmente da un diverso quadro teorico, egli ammette in un secondo momento la possibilità di una interpretazione analoga all'ipotesi di costo pieno⁸⁹.

Se si suppone la condizione di compatibilità $R(Q) < 1$, i prezzi assoluti convergono ad un vettore di prezzi di produzione $w(I - Q(r))^{-1}l$. Qualora invece $R(Q(r)) > 1$, ciò in generale non avviene!

Per convincersene, occorre innanzitutto rendersi conto del fatto che gli autovettori associati all'autovalore dominante di $Q(r)$, a differenza dei modelli precedenti, dipendono da r .

A tal fine si consideri il caso 2×2 . Siano $q_{ij}(r)$ un elemento della matrice $Q(r)$ e q'_{ij} la sua derivata; l'autovettore suddetto si ottiene risolvendo per $p > 0$ il sistema:

$$\alpha p = q_{11}(r)p + q_{12}(r)$$

$$\alpha = q_{21}(r) + q_{22}(r)$$

da cui si ricava:

⁸⁹ Morishima (1964), p. 101, n.1.

$$f(p, r) \equiv q_{21}(r)p^2 + (q_{22}(r) - q_{11}(r))p - q_{12}(r) = 0 \quad (5.15)$$

$f(p, r)$ possiede derivate continue rispetto ad r e p ; inoltre quella rispetto a p non si annulla⁹⁰. Si osservi, infine, che nelle ipotesi poste vi è sempre una soluzione per $p > 0$ della (15), cosicchè è sempre ben definita la derivata:

$$\frac{dp}{dr} = -(2q_{21}(r) + q_{22}(r) - q_{11}(r))^{-1} (q'_{21}p^2 + q'_{22}p - q'_{11}p - q'_{12})$$

dp/dr in generale è diversa da zero, con l'importante eccezione in cui, per qualche $\beta \in R$:

$$q'_{ij} = \beta q_{ij}(r)$$

che, con $\beta = 1/(1+r)$, corrisponde ai casi visti in precedenza.

Nel modello in esame abbiamo invece:

$$\frac{dQ(r)}{dr} = B \neq \beta Q(r) = \beta(A + rB)$$

per qualunque $\beta \in R$.

Si consideri ora il caso in cui $Q(r)$ sia primitiva. Allora $R(Q(r))^{-1}p(t)$ converge ad un autovettore positivo destro di $Q(r)$, indichiamolo con $p^+(r)$. D'altra parte il vettore dei saggi di profitto ex-post è la soluzione per σ dell'equazione:

$$p(t) = (A + \sigma^d B + BD)p(t)$$

Lungo la traiettoria asintotica avremo:

$$(R(Q(r)))^{-1}p(t) = p^+(r)$$

e quindi:

$$p^+(r) = (A + \sigma^d B + BD)p^+(r) \quad (5.16)$$

Se $R(Q(r)) = I$, allora $\sigma = re$; ma in generale la soluzione per σ della (16) non sarà un multiplo scalare di e . Ciò significa che i saggi di profitto ex-post lungo la traiettoria asintotica sono in generale *diversi* da industria a industria. L'interpretazione economica è che l'inflazione ha un impatto diverso sul saggio di profitto ex-post a seconda dell'incidenza del capitale fisso nel

⁹⁰ Per vedere quest'ultimo punto si osservi che $f(p, r)$ è una parabola, per cui le soluzioni per p della (15) sono rappresentabili nel piano (p, f) come i punti di intersezione tra la parabola e l'asse orizzontale. Se la derivata in questione fosse nulla il punto di intersezione sarebbe unico e quindi non vi sarebbero autovettori linearmente indipendenti di $Q(r)$. Questo però contrasta con l'ipotesi di indecomponibilità di $Q(r)$.

costo di produzione. Pertanto, se $R(Q(r)) > 1$, i prezzi relativi $P(t)$ - o le loro "medie nel tempo" $M(P(t))$, nel caso di non primitività - convergono comunque ad un limite ben definito, sia esso $P^+(r)$, ma esso *non è un vettore di prezzi di produzione*.

Torniamo ora al modello di Morishima e - sempre mantenendo le nostre ipotesi semplificatrici - consideriamone la formulazione di partenza:

$$p(t+1) = Q(r)p(t) + wl + B(p(t) - p(t+1))$$

con l'ultimo termine che rappresenta i guadagni o le perdite in conto capitale. Se questi tendono a ripetersi con regolarità, come nel caso appena discusso, lungo la traiettoria asintotica o nei pressi di essa, allora le imprese tenderanno ad estrapolarli al futuro con elevato grado di certezza soggettiva. Pertanto correttamente andrebbero inclusi nel calcolo del rendimento atteso del capitale e di quello richiesto⁹¹.

Al contrario, lontano da una traiettoria a prezzi costanti e tasso d'inflazione costante, non è affatto ovvio come andrebbero modellate le aspettative di guadagni e perdite in conto capitale e se essi dovrebbero essere inclusi nel saggio di rendimento richiesto e quindi nella formazione del mark-up. Nel caso in esame, comunque, non si vede con quale fondamento si possano identificare prezzi attesi e prezzi futuri effettivi, tenendo conto che nel contesto di ipotesi in cui ci muoviamo, le imprese di ciascuna industria determinano e quindi conoscono solo i prezzi futuri (del periodo successivo) del proprio prodotto (singolo). Pertanto occorrerebbe un modello che includesse oppure no guadagni e perdite in conto capitale a seconda della maggiore o minore vicinanza alla traiettoria asintotica.

Sembra questa una ulteriore conferma del fatto che, nel caso d'inflazione, l'ipotesi di costo pieno da sola non può dar conto in modo soddisfacente della formazione dei prezzi.

⁹¹ Si noti che l'introduzione di guadagni o perdite in conto capitale non annullerebbe la questione della divergenza tra i saggi di profitto richiesti e quelli ex-post. Infatti lungo una traiettoria a prezzi relativi costanti, se i prezzi assoluti crescono ad un tasso costante μ si dovrebbe avere, per qualche $p \geq 0$:

$$(1 + \mu)p = (A + rB)p - \mu Bp$$

Anche supponendo che un tale $p \geq 0$ esista, esso, in generale, determinerà soluzioni per σ dell'equazione $p = (A + \sigma^d B)p$ diverse da re .

6 STABILITA' DEI PREZZI DI PRODUZIONE ED IPOTESI DI COSTO PIENO. MODELLI NON LINEARI.

6.1 Mentre i modelli dinamici esaminati nel precedente paragrafo si avvalgono delle utilissime proprietà degli operatori lineari non negativi (e dimensionalmente finiti), quelli qui considerati utilizzano le generalizzazioni di alcune di tali proprietà ad operatori non lineari e non negativi.

Di alcune di tali generalizzazioni, dovute principalmente a Solow-Samuelson (1953), Suits (1954), Muth (1954), Morishima (1964), Nikaido (1964), diamo qui una sintesi, seguendo sostanzialmente Nikaido (1968).

Sia:

$$H(x) = (H_i(x)): R_+^n \rightarrow R_+^n$$

una funzione continua, ovunque definita, con la possibile eccezione dell'origine, nonché omogenea di primo grado.

Definizione:

$H(x)$ è *monotona* se:

$$x \geq y \geq 0 \Rightarrow H(x) \geq H(y)$$

$H(x)$ è *strettamente monotona* se:

$$x \geq y \geq 0 \Rightarrow H(x) > H(y)$$

Definizione:

Sia $H^m(x) = H(H^{m-1}(x))$ per ogni intero positivo m e $H^0(x) = x$. Si indichi inoltre con $H_i^m(x)$ l' i -mo elemento di $H^m(x)$. Si dice che $H(x)$ è *indecomponibile* se per ogni coppia (x, y) , $x \geq y \geq 0$, esiste un intero positivo $s(i) \leq n$, dipendente da (x, y) e da i , tale che:

$$H_i^{s(i)}(x) > H_i^{s(i)}(y) \quad i = 1, \dots, n$$

Definizione:

$H(x)$ si dice *primitiva* nel punto y se esiste un intero positivo s tale che $x \geq y$ implica $H^s(x) > H^s(y)$

Sulla base di queste definizioni possiamo formulare le seguenti Proposizioni.

PROPOSIZIONE 1.

Se $H(x)$ è monotona allora:

i) il problema:

$$\mu x = H(x) \quad (6.1)$$

$$\mu \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$\sum_1^n x_i = 1$$

possiede una ed una sola soluzione per μ , che indichiamo $\mu(H)$;

ii) $H(x) \geq \alpha x, x \geq 0 \Rightarrow \mu(x) \geq \alpha$;

iii) se $G(x)$ ha le stesse proprietà ipotizzate per $H(x)$, e $H(x) \geq G(x) \forall x \geq 0$ allora $\mu(H) \geq \mu(G)$.

PROPOSIZIONE 2.

Se $H(x)$ è monotona ed indecomponibile, allora:

i) il problema (1) ha una sola soluzione anche per x , che indichiamo con $x(H)$;

ii) $\mu(H)$ e $x(H)$ sono positivi;

iii) i punti i) ed ii) della **PROPOSIZIONE 1** valgono con $>$ al posto di $\geq$;

iv) se, inoltre, $H(x)$ è primitiva nell'origine e nel punto $x(H)$ allora per ogni soluzione del sistema dinamico:

$$x(t+1) = Hx(t) \quad (6.2)$$

che non parte da $x(0) = 0$, le "grandezze relative":

$$X(t) = \left(\sum_1^n x(t) \right)^{-1} x(t)$$

soddisfano:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) \rightarrow x(H)$$

PROPOSIZIONE 3.

Il problema:

$$\alpha x - H(x) = a \quad (6.3)$$

$$\alpha > 0,$$

$$a > 0,$$

$$x > 0$$

i) possiede una soluzione per x se $\alpha > x(H)$. Se, inoltre, H è monotona ed $a > 0$ allora:

ii) tale soluzione è unica (e sarà indicata con $x^*(\alpha)$);

iii) la soluzione del sistema dinamico:

$$x(t+1) = H(x(t)) + a \quad (6.4)$$

converge a $x^*(\alpha)$ (per $t \rightarrow +\infty$).

Recentemente si sono avute interessanti estensioni dei risultati di convergenza del sistema (3)⁹², tra cui la seguente:

PROPOSIZIONE 4.

Sia:

$$H(x): R_+^n \rightarrow R_+^n$$

una funzione definita su di un insieme X tale che $H(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$. Se inoltre $H(x)$ è concava e $H(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$, allora, per $t \rightarrow +\infty$, per ogni soluzione della (3) le "grandezze relative":

$$X(t) = \left(\sum_1^n x(t) \right)^{-1} x(t)$$

tendono ad un unico vettore ben definito.

OSSERVAZIONE.

*Nelle precedenti Proposizioni era richiesta l'omogeneità di grado 1, ma proposizioni simili valide per funzioni positivamente omogenee di grado m , $0 < m < 1$, erano già state formulate contemporaneamente alle prime⁹³. Ciò che è notevole nella **PROPOSIZIONE 4** è l'assenza di un requisito di omogeneità.*

⁹² Si veda, in particolare, Kohlberg (1982), Krause (1983, 1984), Fujimoto-Krause (1984, 1985, 1986).

⁹³ Si veda Nikaido (1968).

6.2 La prima applicazione a modelli di costo pieno delle proposizioni ora enunciate è quella del già citato modello di Morishima⁹⁴, di cui si era data nel par. precedente una versione semplificata. In realtà la sua caratteristica saliente è quella che genera la non linearità e che pertanto non poteva rientrare nel par. precedente: si tratta della possibilità di scegliere tra un numero finito di tecniche alternative efficienti.

Si consideri una economia dove si producono n beni con una tecnologia del tipo Walras-Leontief, modificata dall'introduzione di una pluralità di tecniche efficienti. Si suppone cioè che per produrre il bene i -mo siano disponibili $z(i)$ tecniche efficienti, ciascuna costituita da tre vettori riga, $A(\delta_i), B(\delta_i), L(\delta_i)$, ($\delta = 1, \dots, z(i)$), che rappresentano rispettivamente gli inputs di prodotti correnti, quelli di beni capitali e quelli di lavoro. Il bene i -mo dura T_i periodi (T_i è un intero): per i beni capitali $T_i > 1$, per gli altri beni $T_i = 1$. Il suo logorio è costante nel tempo e pari ad una frazione $1/T_i$ della consistenza iniziale. Sia D il vettore diagonalizzato ($1/T_i$), cosicchè $B(\delta_i)D$ rappresenta il vettore dei coefficienti di logorio per unità di tempo, associato alla produzione di una unità del bene i -mo.

Si assumono fissi il tasso di interesse r ed il tasso di salario w , nullo il profitto puro richiesta e piena libertà di entrata. Il prezzo al tempo $t+1$ è pari al costo minimo determinato in base ai prezzi ed ai salari vigenti al tempo t :

$$p(t+1) = H(p(t)) \quad (6.5)$$

dove:

$$H_i(p(t)) = \min_{\delta_i \in Z_i} (A(\delta_i) + rB(\delta_i) + B(\delta_i)D)p(t) + w(1+r)L(\delta_i) \quad (6.6)$$

dove $Z_i = (1, 2, \dots, z_i)$ è l'insieme delle tecniche efficienti per la produzione del bene i .

Morishima dimostra che, introducendo una "condizione di compatibilità", per $t \rightarrow +\infty$, i prezzi convergono al vettore $p^* > 0$, che è l'unica soluzione per $p \geq 0$ del problema:

$$p = H(p)$$

p^* è un vettore di prezzi positivi di un insieme riproducibile di prodotti, associato ad un tasso d'interesse uniforme e profitti puri nulli. Poichè nella definizione di prezzi di produzione il tasso di profitto è inteso al lordo degli interessi, p^* è un vettore di prezzi di produzione.

E' interessante che, sebbene il libro di Morishima (1964) contenga in Appendice un'esposizione sistematica, tra l'altro, dei risultati di stabilità riassunti nelle Proposizioni 1 e 2, la sua dimostrazione non si basa sul contenuto dell'Appendice, che risulta insufficiente allo scopo. Ciò si può capire osservando che il secondo membro della (5) non è una funzione omogenea di grado 1 nei prezzi - cosicchè la Proposizione 2 non si applica - e d'altra parte il termine non omogeneo di grado 1 non è fisso ma è funzione anch'esso dei prezzi - cosicchè non si applica nemmeno la Proposizione 3. Tale funzione ha invece le caratteristiche richieste per l'applicazione della Proposizione 4, che però verrà formulata esplicitamente circa vent'anni dopo. In effetti Krause (1984) e Krause-Fujimoto (1986), due autori che hanno contribuito a formulare tale Proposizione, costruiscono modelli di formazione dei prezzi basati

⁹⁴ Cfr. Morishima (1964), pp. 93-122.

sul costo pieno (o interpretabili in tal senso) che riprendono dal modello di Morishima l'ipotesi di una scelta tra tecniche alternative fondata sulla minimizzazione del costo, all'interno di una tecnologia con solo capitale circolante (ma la presenza di capitale fisso del tipo visto finora non avrebbe costituito affatto una complicazione dell'analisi). Essi vi aggiungono un elemento di notevole interesse, cioè la possibilità che il saggio di salario nominale sia una funzione concava dei prezzi, eventualmente omogenea di grado 1, cosicché la fissazione del salario sia interpretabile non (solo) come difesa del potere d'acquisto in termini di un paniere fisso di beni, ma anche come difesa di un livello prefissato di "utilità", con la possibilità quindi di tener conto degli effetti di variazioni dei prezzi relativi. Applicando la Proposizione 4., si dimostra che, per $t \rightarrow +\infty$, i prezzi relativi tendono ad un vettore interpretabile, con argomentazioni simili a quelle usate per i precedenti modelli, come vettore di prezzi di produzione.

I lavori appena citati contengono numerose altre generalizzazioni dei risultati di convergenza già citati. Tra essi segnaliamo ancora la loro estensione al caso di progresso tecnico: al tempo t , il vettore della "funzione di costo pieno" degli n beni prodotti è rappresentabile in tal caso come:

$$H(p(t), t)$$

dove, per t costante la funzione H può assumere varie caratteristiche, tra cui quelle ipotizzate nella Proposizione 4. L'azione del progresso tecnico implica che, per ogni $p \geq 0$:

$$H(p, t) \geq H(p, t + 1)$$

Si dimostra la convergenza dei prezzi relativi ad un vettore di prezzi di produzione, se l'operatore $T(t)$, definito da:

$$T(t) = \|H(p(t), t)\|^{-1} H(p(t), t)$$

converge uniformemente ad un operatore T indipendente da t .

Nel modello di Boggio (1980) si introduce il capitale fisso al modo di Sraffa (1960), ma ipotizzando che la durata del processo sia scelta sulla base della minimizzazione del costo ai prezzi correnti. Pertanto anch'esso risulta, per certi versi, simile all'approccio di Morishima: alla scelta fra le tecniche si sostituisce la scelta fra le durate dei processi. Tuttavia l'ipotesi che il saggio di salario nominale sia sempre pari al valore corrente di un paniere fisso di beni fa sì che la "funzione di costo pieno" sia positivamente omogenea di grado 1, cosicché la trattazione del modello non può essere fatta con gli strumenti utilizzati nel modello di Morishima (1964), bensì con quelli sintetizzati nelle Proposizioni 1 e 2 (di cui questo saggio contiene la prima applicazione al campo di studi in esame).

L'equazione dinamica di determinazione dei prezzi può essere scritta nel modo seguente:

$$p(t + 1) = H(p(t), r)$$

Supponendo ancora che tutti i beni siano merci base, si dimostra che alla funzione H ora in considerazione per r fisso si applica per intero la Proposizione 2. Pertanto per $t \rightarrow +\infty$ i prezzi relativi convergono ad un vettore $P(r)$ che è l'unica soluzione del problema:

$$\mu p = H(p, r)$$

$$p \geq 0, \mu > 0$$

$$\sum_1^n p_i = 1$$

Quanto ai prezzi assoluti, lungo la traiettoria asintotica essi crescono ad un tasso $\mu - 1$ che è funzione crescente di r . Può esistere un solo r , indichiamolo con r^* , tale che $\mu = 1$. Con argomentazioni analoghe a quelle svolte a proposito del modello (5.14) - (5.15) si dimostra che $P(r)$ cambia al variare di r e solo se $r = r^*$ il vettore dei saggi di profitto ex-post mantiene i differenziali (e i livelli) dei saggi richiesti. Quindi $P(r)$ in generale non è un vettore di prezzi di produzione; cioè nel modello in discussione vi è sempre una configurazione di prezzi relativi globalmente stabile, ma solo eccezionalmente essa si identifica con i prezzi di produzione.

Merita infine di essere menzionata in questo contesto una variante dei già citati modelli di Zaghini (1978) nella quale il vettore dei profitti richiesti per unità di prodotto è una funzione continua, non negativa, positivamente omogenea di grado 1 e monotona nei prezzi correnti. Poichè la funzione di costo pieno ha un termine fisso e positivo, wl , e si suppone una condizione di compatibilità, si applica qui per intero la Proposizione 3. (Questa è la prima e forse unica applicazione di tale proposizione in questo campo di studi).

E' opportuno a questo punto osservare che in questo modello come in quello di Morishima la convergenza asintotica è ad un vettore di prezzi di produzione; ciò dipende essenzialmente dal fatto che il salario è fisso in termini nominali e si postula una "condizione di compatibilità". (Tale compatibilità sempre implica la costanza dei *prezzi assoluti* lungo la traiettoria asintotica). Se i differenziali dei saggi di profitto richiesti riflettono correttamente le barriere all'entrata, supporre in tali modelli il salario pienamente indicizzato ai prezzi o rimuovere la "condizione di compatibilità" ora menzionata implicherebbe la convergenza asintotica dei prezzi relativi ad un vettore *non* di prezzi di produzione; così come introdurre in un modello con capitale fisso alla Sraffa-Von Neumann l'ipotesi di salario fisso in termini nominali e la "condizione di compatibilità" implicherebbe - contrariamente a quanto si ottiene nel modello di Boggio(1980) - la convergenza asintotica dei prezzi relativi ad un vettore di prezzi di produzione.

6.3 Nel complesso ci pare di poter concludere che l'approccio di costo pieno mostra alcuni punti di forza notevoli, ma anche aspetti problematici non trascurabili. Il punto di forza fondamentale che avevamo già preannunciato e la rassegna svolta dovrebbe aver fatto emergere con chiarezza è - oltre alla indubbia rilevanza empirica dell'ipotesi di costo pieno, di cui qui, però, non si intendeva discutere - il fatto che anche con specificazioni molto varie e differenziate si ottengono sempre risultati di stabilità globale. Nè ci sembra elemento di debolezza di questo approccio, di fronte ad una teoria economica così povera di risultati nel campo della dinamica di disequilibrio, il fatto che la stabilità globale non sempre sia riferibile ad un vettore di prezzi di produzione: ciò che importa è di sapere quale sia l'esito finale di un processo dinamico, plausibile dal punto di vista economico, e quali siano i cambiamenti di tale esito al variare delle condizioni che lo governano. Se poi il concetto che ha dato lo spunto per avviare l'analisi dinamica - i prezzi di produzione - non trova in esso tutto il sostegno che ci si attendeva, questo è un problema soprattutto per tale concetto. (Lo è anche per l'analisi dinamica nella misura in cui la differenza tra grandezze ex-ante e grandezze ex-post pone il problema delle reazioni dei soggetti economici).

Gli aspetti problematici principali ci paiono i seguenti.

- a) Non viene spiegato come si formino i saggi di profitto richiesti.
- b) In alcuni settori produttivi i saggi di profitto ex-post potrebbero essere negativi, cosicchè il finanziamento della loro riproduzione, in un'economia di mercato, risulterebbe impossibile. Se poi si trattasse di settori che producono merci base, il sistema produttivo intero non potrebbe riprodursi. Questo punto sollecita l'introduzione delle "quantità", cioè un collegamento di prezzi e saggi di profitto con la domanda e l'offerta.
- c) Quando i saggi di profitto richiesti, a causa dell'inflazione, sono superiori a quelli ex-post, bisognerebbe supporre aggiustamenti verso l'alto nei saggi richiesti, con conseguente andamento esplosivo dei prezzi. Nella realtà, invece, gli aggiustamenti avvengono spesso altrimenti, a causa di reazioni "spontanee" dei soggetti economici e di interventi di politica economica, che arrivano ad influenzare i prezzi attraverso le quantità.

Gli ultimi due punti sollecitano modifiche al modello di formazione dei prezzi, tali da integrare l'ipotesi di costo pieno con elementi diversi, che registrino l'influenza delle quantità domandate e offerte. Quanto al primo punto, va osservato che, se l'ipotetica teoria che spieghi la formazione dei saggi richiesti fosse una teoria di lungo periodo - cioè che postulasse movimenti *lenti* di tali saggi rispetto alla velocità di movimento dei prezzi - allora i modelli presi in esame potrebbero esser intesi come una rappresentazione della formazione dei prezzi *nel breve periodo*, sulla base di saggi di profitto richiesti non necessariamente pari ai loro valori di *lungo periodo*.

E' questo il contesto di riflessioni da cui è nato il tentativo di uno degli autori di questo capitolo (Boggio, 1986) di superare taluni limiti e difficoltà dell'approccio di costo pieno, superando - senza abbandonarlo completamente - l'approccio stesso.

Il saggio in questione si avvale, innanzitutto, di una metodologia in cui la distinzione tra variabili "lente" e "veloci" e quella tra interazioni "forti" e "deboli" tra le variabili assumono rilievo analitico preciso traducendosi nell'ipotesi che i corrispondenti parametri siano "sufficientemente piccoli". Si possono quindi usare tecniche di perturbazione delle matrici rilevanti che consentono grandi semplificazioni nei procedimenti analitici. Il modello dinamico studiato comprende tra le variabili di stato, i prezzi e le quantità prodotte, i saggi di profitto richiesti e le differenze tra le scorte desiderate ed effettive ("eccessi di domanda") rapportate ai livelli di produzione. I prezzi sono formati *prevalentemente* in base al costo pieno, ma con una "piccola" influenza degli eccessi di domanda. Ogni quantità prodotta cresce in base ad un tasso che dipende dai saggi di profitto ex-post, mentre i saggi di profitto richiesti sono modificati - molto lentamente - in base agli eccessi di domanda. Operate alcune trasformazioni di variabili, si ottiene un sistema dinamico non lineare, che ammette una soluzione di equilibrio avente le seguenti caratteristiche:

- a) gli eccessi di domanda sono nulli ed i prezzi assoluti sono costanti;
- b) le quantità prodotte crescono tutte ad un saggio uniforme;
- c) i saggi di profitto ex-post sono costanti, pari a quelli richiesti e uguali al saggio di crescita. Pertanto i prezzi sono prezzi di produzione.

Si dimostra la stabilità asintotica di questo equilibrio, allorchè i parametri "piccoli" sono tali in misura sufficiente.

In sostanza questo modello, che potrebbe essere facilmente generalizzato in varie direzioni, incorpora in maniera consistente elementi dei modelli di *cross-dual adjustment* visti nel par. 4, lasciando tuttavia all'ipotesi di costo pieno il ruolo principale nella formazione dei prezzi nel breve periodo.

7 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.

Il problema della stabilità dei prezzi di produzione nasce, come si è visto, dal confluire di diversi elementi teorici e metodologici:

- a) la formalizzazione moderna, dovuta soprattutto a Sraffa, del concetto di prezzi naturali o di produzione;
- b) la tendenza contemporanea ad utilizzare la teoria dei sistemi dinamici per studiare il rapporto fra posizioni di equilibrio e posizioni effettive delle grandezze economiche;
- c) la "riscoperta" del processo di "gravitazione" proposto dai classici per descrivere il rapporto fra prezzi di produzione e prezzi di mercato (prezzi effettivi);
- d) l'applicazione dell'ipotesi di costo pieno, nata in un contesto di mercato singolo, a modelli multisettoriali;

Sicuramente un forte impulso a questo filone di studi - come più in generale a quelli che hanno fatto seguito al contributo di Sraffa - viene dall'obiettivo di costruire una teoria del valore diversa e migliore della teoria dell'equilibrio economico generale. Da questo punto di vista, risulta rilevante non solo e non tanto un confronto tra le configurazioni d'equilibrio delle due teorie, bensì anche e soprattutto tra i processi dinamici e le ipotesi di comportamento che esse - implicitamente o esplicitamente - postulano, considerandone sia il realismo sia le proprietà di stabilità.

Riguardo al realismo, ci paiono particolarmente rilevanti due aspetti: l'assenza nei modelli qui esaminati dell'ipotesi di mercati futuri completi e l'aggiustamento (non istantaneo e) graduale della struttura produttiva^{95, 96}.

Per quanto riguarda più propriamente l'oggetto di questo saggio, ci limitiamo qui a sottolineare alcuni punti.

1.) Nei modelli di tipo cross-dual i risultati cambiano molto a seconda che i modelli siano formulati in tempo discreto od in tempo continuo, vale a dire come sistemi di equazioni alle differenze ovvero come sistemi di equazioni differenziali. Nel secondo caso i risultati sono sempre più favorevoli alla stabilità. Tuttavia con modelli di equazioni miste alle differenze-differenziali, che preservano sia una durata non infinitesima del "periodo di produzione" - a differenza dei modelli con sole equazioni differenziali - sia una frequenza quanto si vuole elevata delle variazioni delle variabili di stato - a differenza delle formulazioni

⁹⁵ Questo secondo aspetto, sebbene riguardi soprattutto i modelli cross-dual, appare però anche in quei modelli di costo pieno in cui la formazione dei saggi di profitto richiesti dipende dagli eccessi di domanda.

⁹⁶ Va tuttavia osservato che la prima caratteristica è condivisa anche dai modelli di equilibrio economico generale *temporaneo*. Un modello dinamico di ispirazione walrasiana che incorpora la seconda è inn Mas-Colell (1986). Tenendo conto di queste osservazioni e dell'ipotesi, che li accomuna, sulla formazione del prezzo in base agli eccessi di domanda, non sarebbe del tutto sorprendente se in futuro modelli cross-dual del tipo qui esaminato e modelli (sequenziali) di equilibri temporanei tendessero a "convergere".

più comuni con sole equazioni alle differenze - si sono ottenuti risultati che concordano con quelli dei modelli alle differenze e contrastano con quelli ottenuti con modelli alle equazioni differenziali⁹⁷. Sembrerebbe pertanto necessario basarsi sui primi.

2.) Nei modelli cross-dual senza consumo dei capitalisti i modelli alle differenze risultano sempre instabili. Introducendo il consumo dei capitalisti si ottengono risultati di stabilità sia nel caso di un solo bene di consumo, sia supponendo effetti dei prezzi sulla composizione dei consumi, nel caso di "sostituibilità lorda". Nel caso invece di più beni di consumo e di proporzioni fisse nel vettore dei consumi, le condizioni di stabilità dipendono dalla specificazione dell'equazione che determina la crescita della produzione.

3.) I modelli di costo pieno presentano, invece, caratteristiche di stabilità molto robuste - anche se, ove le "condizioni di compatibilità" risultino violate, la loro convergenza, pur in presenza di saggi di profitto richiesti conformi all'equilibrio di lungo periodo, può essere verso un vettore non di prezzi di produzione. Questi modelli però sembrano doversi interpretare come modelli di *breve periodo*, mentre resta ancora (quasi) del tutto assente una teoria dinamica - di lungo periodo - della formazione dei saggi di profitto richiesti.

Il quadro complessivo non sembra brillante, ma se confrontato con i risultati degli studi di stabilità raggiunti con altri approcci alla formazione dei prezzi relativi e delle quantità relative (equilibrio generale, modelli neoclassici di crescita, modelli di instabilità duale), non è particolarmente negativo, soprattutto considerando che si tratta di un filone di studi abbastanza recente e poco consonante con la teoria economica dominante. Esistono sicuramente interessanti direzioni di ricerca ancora aperte, anche se le difficoltà analitiche di questo tipo di studi possono renderle impraticabili.

⁹⁷ Si veda Boggio (1990b).

APPENDICE.

Si considerino:

a) un sistema alle differenze finite:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + f(x(t)) \\ x(t) &\in R^n\end{aligned}\tag{A.1}$$

dove:

$$f:G \rightarrow R^n, \quad G \subset R^n$$

e $t \in N^+$, l'insieme degli interi non negativi.

b) un sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t)) \\ x(t) &\in R^n\end{aligned}\tag{A.2}$$

dove:

$$f:G \rightarrow R^n, \quad G \subset R^n$$

e $t \in R_+$.

Al fine di considerarli in modo unitario e conciso usiamo il simbolo K per indicare in modo generico l'insieme cui appartiene t , vale a dire:

i) $K = N_+$ se si opera in tempo discreto;

ii) $K = R_+$ se si opera in tempo continuo.

Una volta fissato $x(0)$, i sistemi [A.1] e, sotto opportune condizioni sulla funzione f , [A.2] determinano $x(t), t > 0, t \in K$, a patto che $\forall h < t, h \in K$, si abbia $x(h) \in G$. Se, per un sistema del tipo considerato, valgono le condizioni ora accennate, esiste una funzione:

$$\Gamma:K \times G \rightarrow R^n$$

tale che:

$$x(t) = \Gamma(t, x(0))$$

L'insieme dei punti $\Gamma(h, x(0))$ costituisce una *soluzione* del sistema considerato, ovvero una *traiettoria* generata da esso ed uscente da $x(0)$.

$H \subset G$ si dice un *insieme (positivamente) invariante* se:

$$x(0) \in H \Rightarrow \Gamma(t, x(0)) \in H \forall t > 0, t \in K$$

Si dice che il punto $x^* \in R^n$ è un *equilibrio* (del sistema dinamico [A.1], ovvero [A.2]) se è un insieme invariante; pertanto x^* è un equilibrio se e solo se soddisfa la condizione:

$$f(x^*) = 0$$

Un insieme di più equilibri è, ovviamente, un esempio di insieme invariante; lo stesso dicasi dell'insieme di tutti i punti appartenenti ad una orbita chiusa, cioè ad una soluzione $\Gamma(t, x(0))$ tale che $\Gamma(t_1, x(0)) = x(0)$ per qualche $t_1 > 0$.

$$\exists t_1 > 0 \ni \Gamma(t_1, x(0)) = x(0)$$

Un insieme H è stabile se per ogni intorno U di H (un aperto contenente la chiusura di U) esiste un intorno W di H tale che:

$$x(0) \in W \Rightarrow \Gamma(t, x(0)) \in U \quad \forall t \in K$$

Se H è stabile, la sua chiusura è positivamente invariante.

H è un *attrattore* se esiste un intorno U di H tale che:

$$x(0) \in U \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), H) \rightarrow 0$$

dove:

$$d(x(t), H) = \inf_{z \in H} \|x(t) - z\|$$

La regione di attrazione di H è l'insieme di tutti i punti $x \in G$ per cui si ha: $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Gamma(t, x), H) \rightarrow 0$. H si dice *asintoticamente stabile* se è stabile ed è un attrattore; si dice *globalmente (asintoticamente) stabile* se è asintoticamente stabile e G è la regione di attrazione di H . *Instabile* significa non stabile. Se H non è stabile e non è un attrattore, si dice che è *fortemente instabile*.

Si consideri ora il sistema [A.1] e si definisca la funzione g mediante:

$$g(x) = x + f(x)$$

Si supponga g dotata di derivate prime continue e si denoti con T la matrice di tali derivate in un punto di equilibrio x^* ; sia $R(T)$ il raggio spettrale di T , cioè il massimo tra i moduli degli autovalori di T . Vale allora la seguente:

PROPOSIZIONE 1

Il punto di equilibrio x^ è asintoticamente stabile se $R(T) < 1$; è instabile se $R(T) > 1$; è fortemente instabile se tutti gli autovalori hanno modulo maggiore di 1.*

Si consideri infine il sistema [A.2] e si supponga f dotata di derivate prime continue. Si denoti con M la matrice di tali derivate in un punto di equilibrio x^* . Vale allora la seguente:

PROPOSIZIONE 2

Il punto di equilibrio x^ è localmente asintoticamente stabile se tutti gli autovalori di M hanno parte reale negativa; è instabile se qualcuno di essi ha parte reale positiva; è fortemente instabile se tutti gli autovalori di M hanno parte reale positiva.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- Abraham Frois G.-Berrebi E., 1980, *Rente, Rareté, Surprofits*, Economica.
- Aoki M., 1977, Dual Stability in a Cambridge-type Model, *Review of Economic Studies*.
- Baldone S., 1974, Il Capitale Fisso nello Schema Teorico di P. Sraffa, *Studi Economici*.
- Bidard C. -Franke R., 1987, On Long Term Equilibria, *Ricerche Economiche*.
- Boggio L., 1980, Full Cost and Sraffa Prices: Equilibrium and Stability in a System With Fixed Capital, *Economic Notes*.
- Boggio L., 1985, On the Stability of Production Prices, *Metroeconomica*.
- Boggio L., 1986, Stability of Production Prices in a Model of General Interdependence, in W. Semmler (a cura di), *Competition, Instability and Nonlinear Cycles*, Springer Verlag.
- Boggio L., 1987, Gravitation, in Eatwell J., Milgate M., and Newman P. (eds), *The New Palgrave Dictionary of Economics*, Macmillan.
- Boggio L., 1990a, On the Stability of Production Prices. Some Issues Reconsidered, mimeo.
- Boggio L., 1990b, Production Prices and Dynamic Stability: Results and Open Questions, *Quaderni del Dipartimento di Scienze Economiche*, n. 10, settembre.
- Burmeister E.-Dobell R., 1970, *Mathematical Theories of Economic Growth*, Macmillan.
- Cass D. - Shell K., 1976, The Structure and Stability of Competitive Dynamical Systems, *Journal of Economic Theory*.
- Duménil G.- Lévy D., 1987a, La Concurrence Capitaliste: un Processus Dynamique, in Fitoussi J.P.- Muet P.A. (a cura di), *Macrodynamique et Desequilibres*, Economica.
- Duménil G.- Lévy D., 1987b, The Dynamics of Competition: a Restoration of Classical Analysis, *Cambridge Journal of Economics*.
- Duménil G.-Lévy D., 1985, The Classics and the Neoclassicals, *Cambridge Journal of Economics*.
- Duménil G. - Lévy D., 1989a, The Stability of Long Term Equilibrium in a General Disequilibrium Model, *Cepremap*.
- Duménil G. - Lévy D., 1989b, The Competitive Process in a Fixed Capital Environment: A Classical View, *The Manchester School of Economic and Social Studies*.
- Dutt A., 1988a, Competition, Monopoly Power and the Prices of Production, *Thames Papers on Political Economy*.
- Dutt A., 1988b, Convergence and Equilibrium in Two Sector Models of Growth, Distribution and Prices, *Zeitschrift für Nationalökonomie*.

- Eatwell J., 1977, Theories of Value, Output and Employment, *Thames Papers on Political Economy*.
- Egidi M., 1975, Stabilità ed Instabilità degli Schemi Sraffiani, *Economia Internazionale*.
- Fazi E.- Salvadori N., 1985, The Existence of a Two Class Economy in a General Cambridge Model of Growth and Distribution, *Cambridge Journal of Economics*.
- Fisher F., 1983, *Disequilibrium Foundations of Equilibrium Economics*, Cambridge University Press.
- Flaschel P.- Semmler W., 1986, The Dynamic Equalization of Profit Rates for Input-Output Models with Fixed Capital, in W. Semmler (a cura di), *Competition, Instability and Nonlinear Cycles*, Springer Verlag.
- Flaschel P. - Semmler W., 1987, Classical and Neoclassical Competitive Processes, *The Manchester School of Economic and Social Studies*.
- Franke R., 1986, A Cross-Over Gravitation Process in Prices and Inventories, in W. Semmler (a cura di), *Competition, Instability and Nonlinear Cycles*, Springer Verlag.
- Franke R., 1987, *Production Prices and Dynamical Processes of the Gravitation of Market Prices*, Peter Lang Verlag.
- Fujimoto T.- Krause U., 1986, Ergodic Price Setting With Technical Progress, in W. Semmler (a cura di), *Competition, Instability and Nonlinear Cycles*, Springer Verlag.
- Fujimoto T.-Krause U., 1985, Strong Ergodicity For Strictly Increasing Nonlinear Operators, *Linear Algebra and Its Applications*.
- Gantmacher F., 1959, *The Theory of Matrices*, Chelsea.
- Garegnani P., 1979a, Di un Cambiamento Nella Nozione di Equilibrio in Lavori Recenti su Valore e Distribuzione, in Garegnani P., *Valore e Domanda Effettiva*, Einaudi.
- Garegnani P., 1979b, Note su Consumi, Investimenti e Domanda Effettiva, in Garegnani P., *Valore e Domanda Effettiva*, Einaudi.
- Goodwin R., 1970, *Elementary Economics from the Higher Standpoint*, Cambridge University Press.
- Gozzi G.C., 1984, Posizioni di Lungo Periodo e Stabilità, *Economia Politica*.
- Guckenheimer J.- Holmes P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Verlag.
- Hahn F., 1982, The Neoricardians, *Cambridge Journal of Economics*.
- Haken H., 1981, *Advanced Synergetics*, Springer-Verlag.
- Harcourt G.C., 1972, *La Controversia fra le Due Cambridge*, Isedi.
- Harris D., 1978, *Capital Accumulation and Income Distribution*, Routledge and Keegan Paul.

- Harris D., 1988, On the Classical Theory of Competition, *Cambridge Journal of Economics*.
- Horn R.A. - Johnson C.A., 1985, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- Hosoda E., 1985, On the Classical Convergence Theorem, *Metroeconomica*.
- Kohlberg E., 1982, The Perron-Frobenius Theorem Without Additivity, *Journal of Mathematical Economics*.
- Krause U., 1984, Minimal Cost Pricing Leads to Prices of Production, in C. Bidard (a cura di), *La Gravitation*, Cahiers de la R.C.P. Systemes de Prix de Production 2,3.
- Krause U., 1986, Perron's Stability Theorem For Non-Linear Mappings, *Journal of Mathematical Economics*.
- Kubin I., 1989, Stability in Classical Competition, *Zeitschrift für Nationalökonomie*.
- Kubin I., 1990, The Classical Process of Gravitation, mimeo.
- Kuga K., 1977, General Saddle Point Property of the Steady State of a Growth Model with Heterogeneous Capital Goods, *International Economic Review*.
- Kuroki R., 1986, The Equalization of the Rate of Profit Reconsidered, in W. Semmler (a cura di), *Competition, Instability and Nonlinear Cycles*, Springer Verlag.
- Kurz H., 1980, Rent Theory in a Multisector Model, *Oxford Economic Papers*.
- Kurz H., 1985, Sraffa's Contributions to the Debate in Capital Theory, *Contributions to Political Economy*.
- LaSalle J.P., 1976, *The Stability of Dynamical Systems*, SIAM
- Lorenz H.W., 1989, *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer Verlag.
- Malinvaud E., 1972, *Microeconomic Theory*, North-Holland.
- Marglin S., 1984, *Growth, Distribution and Prices*, Harvard University Press.
- Marx K., 1955, *Teorie sul Plusvalore*, Einaudi.
- Marx K., 1974, *Il Capitale*, Newton Compton.
- Mas Colell A., 1986, Notes on Price and Quantity Dynamics, in Sonnenschein H. (a cura di), *Models of Economic Dynamics*, Springer Verlag.
- Medio A., 1978, A Mathematical Note on Value and Distribution, *Economic Notes*.
- Medio A., 1984, Synergetics and Economic Dynamic Models in R. Goodwin, P. Krueger and S. Vercelli (a cura di), *Nonlinear Models of Fluctuating Growth*, Springer-Verlag.
- Morishima M., 1964, *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford University Press.
- Morishima M., 1969, *Theory of Economic Growth*, Oxford University Press.

- Muth J.F., 1954, A Note on Balanced Growth, *Econometrica*.
- Nikaido H., 1964, Balanced Growth in Multisectoral Income Propagation under Autonomous Expenditure Schemes, *Review of Economic Studies*.
- Nikaido H., 1968, *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press.
- Nikaido H., 1983, Marx on Competition, *Zeitschrift für Nationalökonomie*.
- Nikaido H., 1985, Dynamics of Growth and Capital Mobility in Marx's Scheme of Reproduction, *Zeitschrift für Nationalökonomie*.
- Nikaido H. - Kobayashi S., 1978, Dynamics of Wage-Price Spirals and Stagflation in the Leontief-Sraffa System, *International Economic Review*.
- Okishio N., 1977, Inflation as an Expression of Class Antagonism, *Kobe University Economic Review*.
- Pasinetti L., 1975, *Lezioni di Teoria della Produzione*, Il Mulino.
- Petri F., 1978, The Difference Between Long-Period and Short-Period General Equilibrium and the Capital Theory Controversy, *Australian Economic Papers*.
- Petri F., 1986, The Meaning of the Cambridge Controversies on Capital Theory: an Attempt at Communication, *Quaderni dell'Istituto di Economia di Siena*, n. 57.
- Petri F., 1989, *Teorie del Valore e della Distribuzione*, La Nuova Italia Scientifica.
- Punzo L., 1989, La Teoria della Produzione Congiunta. Note ad un Dibattito, in S. Zamagni (a cura di), *Le Teorie Economiche della Produzione*, Il Mulino.
- Quadrio-Curzio A., 1967, *Rendita e Distribuzione in un Modello Plurisettoriale*, Giuffrè.
- Quadrio-Curzio A., 1975, *Accumulazione del Capitale e Rendita*, Il Mulino.
- Quadrio-Curzio A., 1981, Rendita, Distribuzione del Reddito, Ordine di Efficienza e di Redditività, in L. Pasinetti (a cura di), *Contributi alla Teoria della Produzione Congiunta*, Il Mulino.
- Ricardo D., 1976, *Principi di Economia Politica e delle Imposte*, Isedi.
- Roemer J., 1980, A General Equilibrium Approach to Marxian Economics, *Econometrica*.
- Roemer J., 1981, *Analytical Foundations of Marxian Economic Theory*, Cambridge University Press.
- Salvadori N., 1986, Il Capitale Fisso come Specie del genere Produzione Congiunta, *Economia Politica*.
- Salvadori N., 1986, Land and Choice of Technique Within the Sraffa Framework, *Australian Economic Papers*.
- Salvadori N., 1988, Fixed Capital within a Von Neumann-Morishima Model of Growth and Distribution, *International Economic Review*.

- Salvadori N., 1988, Fixed Capital Within The Sraffian Framework, *Zeitschrift für Nationalökonomie*.
- Salvadori N.-Steedman I., 1988, Joint Production within a Sraffian Framework, *Bulletin of Economic Research*.
- Schefold B., 1977, Capitale Fisso, Accumulazione e Progresso Tecnico, in L. Pasinetti (a cura di), *Contributi alla Teoria della Produzione Congiunta*, Il Mulino.
- Schefold B., 1985, Cambridge Price Theory: Special Model or General Theory of Value?, *American Economic Review (Papers and Proceedings)*.
- Schefold B., 1989, *Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays*, Unwin.
- Screpanti E., 1984, *Equilibrio e Dinamica dell'Economia Capitalistica*, La Nuova Italia Scientifica.
- Smith A., 1973, *La Ricchezza delle Nazioni*, Isedi.
- Solow R.M. - Samuelson P.A., 1953, Balanced Growth under Costant Returns to Scale, *Econometrica*.
- Sraffa P., 1960, *Produzione di Merci a Mezzo di Merci. Premesse ad una Critica della Teoria Economica*, Einaudi.
- Steedman I., 1984, *Natural Prices, Differential Profit Rates and the Classical Competitive Process*, The Manchester School of Economic and Social Studies.
- Suits D.B., 1954, Dynamic Growth Under Diminishing Returns to Scale, *Econometrica*.
- Varri P., 1974, Prezzi, Saggio del Profitto e Durata del Capitale Fisso nello Schema Teorico di P. Sraffa, *Studi Economici*.
- Zaghini E., 1967a, *Saggi sulla Accumulazione di Capitale nei Modelli di Equilibrio Economico Generale*, Edizioni dell'Ateneo.
- Zaghini E., 1967b, On Non-Basic Commodities, *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*.
- Zaghini E., 1978, Sulla Stabilità di Alcuni Sistemi di Prezzi, *Note Economiche*.
- Zaghini E., 1986, Natural Prices and Market Prices. An Interpretation of the Walrasian Theory of Accumulation, *Economic Notes*.