

Friedl, Birgit

**Working Paper — Digitized Version**

## Entscheidungen über Zusatzaufträge bei Mehrproduktfertigung

Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 536

**Provided in Cooperation with:**

Christian-Albrechts-University of Kiel, Institute of Business Administration

*Suggested Citation:* Friedl, Birgit (2001) : Entscheidungen über Zusatzaufträge bei Mehrproduktfertigung, Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 536, Universität Kiel, Institut für Betriebswirtschaftslehre, Kiel

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/149076>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

Manuskripte  
aus den  
Instituten für Betriebswirtschaftslehre  
der Universität Kiel

No. 536

Entscheidungen über Zusatzaufträge  
bei Mehrproduktfertigung

Birgit Friedl



Manuskripte  
aus den  
Instituten für Betriebswirtschaftslehre  
der Universität Kiel

No. 536

Entscheidungen über Zusatzaufträge  
bei Mehrproduktfertigung

Birgit Friedl

April 2001

Prof. Dr. Birgit Friedl, Lehrstuhl für Controlling, Institut für Betriebswirtschaftslehre,  
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Olshausenstraße 40, 24098 Kiel

email: [controlling@bwl.uni-kiel.de](mailto:controlling@bwl.uni-kiel.de)

URL: <http://www.wiso.uni-kiel.de/bwlinstitute/controlling>

A. Problemstellung .....	1
B. Kennzeichnung von Entscheidungen über Zusatzaufträge .....	1
I. Zusatzaufträge bei Mehrproduktfertigung.....	1
1. Merkmale von Zusatzaufträgen.....	1
2. Abgrenzung zum Periodenprogramm.....	2
II. Arten von Entscheidungen über Zusatzaufträge.....	7
1. Überblick zu den verschiedenen Entscheidungen über Zusatzaufträge .....	7
2. Entscheidungen nach den Produktionsbedingungen.....	8
3. Arten nach den Merkmalen der Zusatzaufträge .....	10
III. Entscheidungsrechnungen für Zusatzaufträge .....	11
1. Bestimmung von Preisuntergrenzen .....	11
2. Ermittlung von Break-even-Mengen .....	13
C. Entscheidungen bei vollkommener Information über den Zusatzauftrag .....	14
I. Entscheidungen über Einproduktaufträge bei vollkommener Information.....	14
1. Preisuntergrenzen bei kapazitätsorientierter Anpassung .....	14
2. Preisuntergrenzen bei programmorientierter Anpassung.....	16
II. Entscheidungen über Mehrproduktaufträge bei vollkommener Information.....	23
D. Entscheidungen bei unvollkommenen Informationen über den Zusatzauftrag .....	23
I. Entscheidungen über Einproduktaufträge .....	23
1. Break-even-Analyse bei kapazitätsorientierter Anpassung .....	23
2. Break-even-Analyse bei programmorientierter Anpassung .....	29
a) Struktur der Kostenfunktion .....	29
b) Ermittlung der Kostenfunktion.....	32
aa) Lösung des primalen Entscheidungsproblems .....	32
bb) Lösung des dualen Entscheidungsproblems .....	38
II. Entscheidungen über Mehrproduktaufträge .....	42
1. Ansätze der Break-even-Analyse bei Mehrproduktaufträgen .....	42
2. Break-even-Analyse bei Mehrproduktaufträgen und programmorientierter Anpassung.....	46
a) Entscheidungen bei unbekannter Auftragsgröße und bekanntem Produktmix.....	46
b) Entscheidungen bei bekannter Auftragsgröße und unbekanntem Produktmix.....	47
E. Schlussbemerkungen.....	54
Literatur.....	58

## Symbolverzeichnis

$a_{ij}$	Kapazitätsbedarf der Bearbeitung einer Einheit des Produktes $j$ in Produktionsstufe $i$ (Produktionskoeffizient des Produktes $j$ in Produktionsstufe $i$ )
$a_{i\delta}$	Produktionskoeffizient des Produktes $i$ in einem Einproduktauftrag $\delta$
$b_i$	Kapazitätsgrenze der Produktionsstufe $i$
$b_{iR}$	Restkapazität der Produktionsstufe $i$
$b_R$	Restkapazität
$d_j$	Stückdeckungsbeitrag des Produktes $j$
$d_z$	Stückdeckungsbeitrag der verdrängten bzw. nicht realisierten Alternative $z$
$E$	Erlös
$EUG_\delta$	Erlösuntergrenze eines Zusatzauftrages $\delta$
$K$	Periodenkosten
$K_f$	fixe Kosten der Planperiode
$K_{f\delta}$	auftragsgrößenfixe Kosten eines Zusatzauftrages $\delta$
$k_{vj}$	produktionsmengenvARIABLE Stückkosten des Produktes $j$
$k_{v\delta}$	auftragsgrößenvariable Stückkosten eines Einproduktauftrages $\delta$
$k_{v\delta n}$	auftragsgrößenvariable Stückkosten des Produktes $n$ in einem Mehrproduktauftrag $\delta$
$p_j$	Absatzpreis des Produktes $j$
$p_{\delta n}$	Preis des Produktes $n$ im Mehrproduktauftrag
$PUG_\delta$	Preisuntergrenzen des Einproduktauftrages $\delta$
$x_\delta$	Auftragsgröße
$x_\delta^{(u)}$	Auftragsmindestmenge
$x_\delta^{(o)}$	Auftragshöchstmenge
$x_{\delta n}$	Menge des Produktes $n$ in einem Mehrproduktauftrag $\delta$
$x_{\delta R}$	ohne Anpassungsmaßnahmen realisierbare Auftragsgröße
$x_j$	Produktionsmenge des Produktes $j$
$x_j^o$	Absatzobergrenze des Produktes $j$
$w_i$	inputbezogene Opportunitätskosten einer Engpaßeinheit $i$ bei deckungsbeitragsmaximaler Verwendung
$w_{ij}$	inputbezogene Opportunitätskosten einer Engpaßeinheit $i$ bei Verwendung für Produkt $j$
$\Delta b_{i\delta}$	Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages in Produktionsstufe $i$
$\Delta x_z$	verdrängte Menge des Produktes $z$
$\tau$	Intensität

## A. Problemstellung

Zu den Entscheidungen, die auf der Basis von Kosten- und Erlösinformationen getroffen werden, zählen u.a. die Entscheidungen über Zusatzaufträge. Bei Mehrproduktfertigung sind dabei zwei **Problemgebiete** zu unterscheiden:

- die Entscheidung über einen Einproduktauftrag bei Mehrproduktfertigung sowie
- die Entscheidung über einen Mehrproduktauftrag.

Zur Unterstützung dieser Entscheidungen sind Informationen über die Vorteilhaftigkeit des Zusatzauftrages erforderlich, d.h. über die Vorteilhaftigkeit seiner Annahme bzw. Ablehnung, die mit Hilfe von **Entscheidungsrechnungen** ermittelt werden. Aufgabe von Entscheidungsrechnungen ist es, die verschiedenen Zielwirkungen (z.B. Kosten- und Erlöswirkungen) der Alternativen zu isolieren und zu verdichten. Als Entscheidungsrechnungen zur Beurteilung der Vorteilhaftigkeit eines Zusatzauftrages wird in der betriebswirtschaftlichen Literatur die Bestimmung von Preisuntergrenzen diskutiert. Schweitzer/Troßmann weisen darauf hin, dass auch mit der Break-even-Analyse Informationen für Entscheidungen über Zusatzaufträge bereitgestellt werden können (vgl. Schweitzer/Troßmann 1998, S. 9). Im Folgenden soll herausgearbeitet werden, welche Entscheidungen über Zusatzaufträge durch Break-even-Analysen unterstützt werden können und wie die Break-even-Punkte zu berechnen sind.

## B. Kennzeichnung von Entscheidungen über Zusatzaufträge

### I. Zusatzaufträge bei Mehrproduktfertigung

#### 1. Merkmale von Zusatzaufträgen

**Zusatzaufträge** sind durch die folgenden drei Merkmale gekennzeichnet (vgl. Kilger 1993, S. 845):

- Auftragseingang nach Festlegung eines Periodenprogramms,
- quantitative oder qualitative Unterschiede zum Periodenprogramm sowie
- Begrenzung auf einen kurzfristigen Zeitraum.

Liegt Marktproduktion vor, handelt es sich bei dem **Periodenprogramm** um die auf der Basis von Absatzprognosen zielorientiert festgelegte Art, Menge und zeitliche Verteilung, der in der Planperiode zu produzierenden Produkte. In Unternehmungen mit Kunden- bzw. Auftragsproduktion besteht dieses Periodenprogramm aus mehreren bereits angenommenen Kundenaufträgen (zur Abgrenzung von Markt- und Kundenproduktion vgl. z.B. Küpper 1979, Sp. 1639 f.). Setzt die Annahme eines Zusatzauftrages in Engpasssituationen die Anpassung des festgelegten Periodenprogramms voraus, kann das bei Kundenproduktion nur durch die Ablehnung oder Veränderung eines Kundenauftrages erreicht werden. Die Anpassung des Periodenprogramms unterliegt bei Kundenproduktion damit strengeren Restriktionen als bei Marktproduktion, bei der die Anpassung der geplanten Produktionsmenge jeder einzelnen Produktart in beliebiger Abstufung möglich ist.

Quantitative bzw. qualitative Unterschiede des Zusatzauftrages zum Periodenprogramm sind die Ursache dafür, dass der Zusatzauftrag nicht aus dem festgelegten Periodenprogramm gedeckt

werden kann. **Qualitative Unterschiede** liegen vor, wenn die Produkte, die den Gegenstand des Zusatzauftrages bilden, kein Bestandteil des ursprünglichen Periodenprogramms sind. Kann der Zusatzauftrag mengenmäßig nicht durch das geplante Periodenprogramm gedeckt werden, da er von Marktsegmenten oder Kundengruppen ausgeht, die bei der Absatzprognose nicht berücksichtigt worden sind, wird von **quantitativen Unterschieden** gesprochen.

**Unbefristete bzw. langfristige Aufträge** verlangen nach mittel- bzw. langfristigen Entscheidungen. Diese werden nicht auf der Basis der Kosten- und Erlösrechnung getroffen. Sie erfordern Investitionsrechnungen und sollen im Folgenden nicht betrachtet werden (vgl. z.B. auch Hieke 1998, S. 86).

## 2. Abgrenzung zum Periodenprogramm

Das Grundproblem der **Planung des Periodenprogramms** kann wie folgt formuliert werden: In einer Unternehmung mit mehrstufiger Mehrproduktfertigung standardisierter Produkte und begrenzten Produktionskapazitäten sind die Produktionsmengen der Produkte bei gegebenen Absatzhöchstmengen so festzulegen, dass der erwartete Periodenerfolg maximiert wird (vgl. Gutenberg 1979, S. 151). Es wird unterstellt, dass die Produktionsmengen mit den Absatzmengen übereinstimmen, d.h. keine Bestandsveränderungen auftreten, und die erforderlichen Einsatzgüter beschafft werden können. Eine Abbildung dieses Entscheidungsproblems zeigt das folgende Modell (zu diesem Modell, den zugrunde liegenden Prämissen und Erweiterungen vgl. z.B. Zäpfel 1982, S. 93 ff., Corsten 1998, S. 238 ff.):

– Zielfunktion

$$(1) \quad G = \sum_{j=1}^J x_j \cdot p_j - \sum_{j=1}^J x_j \cdot k_{vj} - K_f = \sum_{j=1}^J x_j \cdot d_j - K_f \rightarrow \text{Max!}$$

– Mehrproduktrestriktionen

$$(2) \quad \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1J} \cdot x_J \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{I1} \cdot x_1 + a_{I2} \cdot x_2 + \dots + a_{IJ} \cdot x_J \leq b_I \end{array}$$

– Einproduktrestriktionen

$$(3) \quad \begin{array}{l} x_1 \leq x_1^0 \\ \vdots \\ x_J \leq x_J^0 \end{array}$$

– Nichtnegativitätsbedingungen

$$(4) \quad x_1, \dots, x_J \geq 0$$

– Symbole

$a_{ij}$  = Kapazitätsbedarf der Bearbeitung einer Einheit des Produktes  $j$  in Produktionsstufe  $i$  (Produktionskoeffizient),

$b_i$  = Kapazitätsgrenze der Produktionsstufe  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ),

$d_j$  = Stückdeckungsbeitrag des Produktes  $j$ ,

$K_f$  = fixe Kosten der Planperiode,

$k_{vj}$  = produktionsmengenvariable Stückkosten des Produktes  $j$ ,

$p_j$  = Absatzpreis des Produktes  $j$ ,

$x_j$  = Produktionsmenge des Produktes  $j$  ( $j = 1, \dots, J$ ),

$x_j^0$  = Absatzobergrenze des Produktes  $j$ .

Das Modell enthält zwei Arten von Restriktionen:

- Einproduktrestriktionen und
- Mehrproduktrestriktionen.

**Einproduktrestriktionen** stellen Ober- bzw. Untergrenzen für eine einzelne Entscheidungsvariable dar, während **Mehrproduktrestriktionen** gleichzeitig die Ausprägungen mehrerer Entscheidungsvariablen begrenzen. Letztere treten auf, wenn mehrere Produkte knappe Ressourcen gemeinsam beanspruchen, d.h. ein Ressourcenverbund vorliegt. Bei einem solchen Ressourcenverbund kann die Produktionsmenge eines Produktes bei Erreichen der Kapazitätsgrenze nur zu Lasten der Produktionsmenge anderer Produkte ausgedehnt werden (vgl. Ewert/Wagenhofer 2000, S. 97 f.).

Das Verfahren zur **Bestimmung des Periodenprogramms** hängt von der Anzahl der wirksamen Mehrproduktrestriktionen ab, die den Alternativenraum begrenzen. Eine Mehrproduktrestriktion für ein begrenzt verfügbares Einsatzgut ist wirksam, wenn der Kapazitätsbedarf zur Realisation der maximal absetzbaren Produktmengen (Absatzobergrenzen) die verfügbare Kapazität übersteigt.

Sind **keine Mehrproduktrestriktionen** wirksam, wird von jedem Produkt mit positivem Stückdeckungsbeitrag die Menge produziert, die am Markt gerade noch absetzbar ist, d.h. die Absatzobergrenze (zu einem Beispiel vgl. Abb. 1). Ist **eine** Mehrproduktrestriktion wirksam, werden die Produkte nach abnehmenden relativen Deckungsbeiträgen in eine Reihenfolge gebracht, wobei der relative Deckungsbeitrag als Quotient aus Stückdeckungsbeitrag und Produktionskoeffizient des Engpassfaktors definiert ist. Die Produkte werden anschließend in der Reihenfolge abnehmender relativer Deckungsbeiträge mit ihren Absatzobergrenzen eingeplant, bis die Kapazitätsbegrenzung erreicht ist (zu einem Beispiel vgl. Abb. 2). Bei Vorliegen **mehrerer wirksamer Mehrproduktrestriktionen** ist zur Bestimmung des optimalen Periodenprogramms das lineare Planungsmodell mit Hilfe des Simplexverfahrens zu lösen. Abb. 3 zeigt ein Beispiel zu diesem Programmplanungsproblem (zu den Verfahren vgl. auch Schweitzer/Küpper 1998, S. 453 ff.; Hoitsch 1995, S. 112 ff.; Hieke 1998, S. 127 ff.).



a) Daten

Produkt/Restriktion Merkmale	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Kapazitätsgrenzen (Stunden)
Produktionskoeffizienten der Produktionsstufe 1	2	6	4	2.000
Produktionskoeffizienten der Produktionsstufe 2	7	3	2	3.250
Absatzobergrenze	350	120	500	-
Stückpreis	50	65	95	-
variable Stückkosten	40	45	110	-
Stückdeckungsbeiträge	10	20	-15	-
optimales Periodenpro- gramm	350	120	0	-

b) Überprüfung der Mehrproduktrestriktionen <sup>1)</sup>

- Produktionsstufe 1  
 $2 \cdot 350 + 6 \cdot 120 = 1.420 < 2.000$
- Produktionsstufe 2  
 $7 \cdot 350 + 3 \cdot 120 = 2.810 < 3.250$

Keine der beiden Mehrproduktrestriktionen ist wirksam.

1) Produkt 3 weist einen negativen Stückdeckungsbeitrag auf und wird deshalb nicht in das Periodenprogramm aufgenommen.

Abb. 1: Beispiel zur Programmplanung ohne wirksame Mehrproduktrestriktion

Anders als im Beispiel aus Abb. 1 betrage die Kapazität in Produktionsstufe 1 nur noch 1.000 Stunden. Die Kapazität dieser Produktionsstufe reicht damit nicht aus, die den Absatzobergrenzen entsprechenden Mengen der Produkte mit positivem Stückdeckungsbeitrag (Kapazitätsbedarf in Produktionsstufe 1: 1.420 Stunden) zu fertigen.

Produkt	1	2	3
relativer Deckungsbeitrag	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{20}{6} = 3,33$	-
Rang	1	2	-
optimales Periodenpro- gramm	350	50	0

Produkt 1

- Produktionsmenge:  $x_1 = x_1^0 = 350$
- Kapazitätsbedarf:  $350 \cdot 2 = 700$
- Restkapazität:  $1.000 - 700 = 300$

Produkt 2

- Produktionsmenge:  $\frac{300}{6} = 50$
- Restkapazität: 0

Abb. 2: Beispiel zur Programmplanung bei einer wirksamen Mehrproduktrestriktion

Die Kapazität in Produktionsstufe 1 sei 1.000 Stunden, die in Produktionsstufe 2 1.700 Stunden. Ansonsten gelten die Daten aus Abb. 1. In keiner Produktionsstufe reicht damit die Kapazität aus, die den Absatzobergrenzen entsprechenden Mengen der Produkte mit positivem Stückdeckungsbeitrag zu fertigen (Kapazitätsbedarf in Produktionsstufe 1: 1.420 Stunden; Kapazitätsbedarf in Produktionsstufe 2: 2.810 Stunden).

- lineares Planungsmodell des Programmplanungsproblems

- Zielfunktion

$$Z = 10 x_1 + 20 x_2 \rightarrow \text{Max !}$$

- Kapazitätsrestriktion (Mehrproduktrestriktion)

$$2 x_1 + 6 x_2 \leq 1.000$$

$$7 x_1 + 3 x_2 \leq 1.700$$

- Absatzobergrenzen

$$x_1 \leq 350$$

$$x_2 \leq 120$$

- Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

- Ausgangstableau

Basis	d	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b
$x_3$	0	2	6	1	0	0	0	1.000
$x_4$	0	7	3	0	1	0	0	1.700
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	350
→ $x_6$	0	0	1	0	0	0	1	120
$Z_j$		0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - d_j$		-10	-20	0	0	0	0	0



	Basis	d	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b
→	$x_3$	0	2	0	1	0	0	-6	280
	$x_4$	0	7	0	0	1	0	-3	1.340
	$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	350
	$x_2$	20	0	1	0	0	0	1	120
	$Z_j$		0	20	0	0	0	20	2.400
	$Z_j-d_j$		-10	0	0	0	0	20	

↑

	Basis	d	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b
	$x_1$	10	1	0	0,5	0	0	-3	140
→	$x_4$	0	0	0	-3,5	1	0	18	360
	$x_5$	0	0	0	-0,5	0	1	3	210
	$x_2$	20	0	1	0	0	0	1	120
	$Z_j$		10	20	5	0	0	-10	3.800
	$Z_j-d_j$		0	0	5	0	0	-10	

↑

	x	d	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b
	$x_1$	10	1	0	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{1}{6}$	0	0	200
	$x_6$	0	0	0	$\frac{3,5}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	1	20
	$x_5$	0	0	0	$\frac{1,5}{18}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	150
	$x_2$	20	0	1	$\frac{3,5}{18}$	$-\frac{1}{18}$	0	0	100
	$Z_j$		10	20	$\frac{55}{18}$	$\frac{5}{9}$	0	0	4.000
	$Z_j-d_j$		0	0	$\frac{55}{18}$	$\frac{5}{9}$	0	0	

Das optimale Periodenprogramm lautet:  $x_1 = 200$ ;  $x_2 = 100$ . Es wird ein Deckungsbeitrag in Höhe von 4.000,- DM erzielt.

Abb. 3: Beispiel zur Programmplanung bei mehreren wirksamen Mehrproduktrestriktionen

## II. Arten von Entscheidungen über Zusatzaufträge

### 1. Überblick zu den verschiedenen Entscheidungen über Zusatzaufträge

Arten von Entscheidungen über Zusatzaufträge können nach

- den Produktionsbedingungen und
- den Merkmalen der Zusatzaufträge

unterschieden werden. Jeder Pfad von der Spitze bis zum Ende des Diagramms in Abb. 4 beschreibt ein spezifisches Entscheidungsproblem im Zusammenhang mit Zusatzaufträgen. In den Kapiteln C und D werden Lösungsansätze für diese Entscheidungsprobleme erörtert.

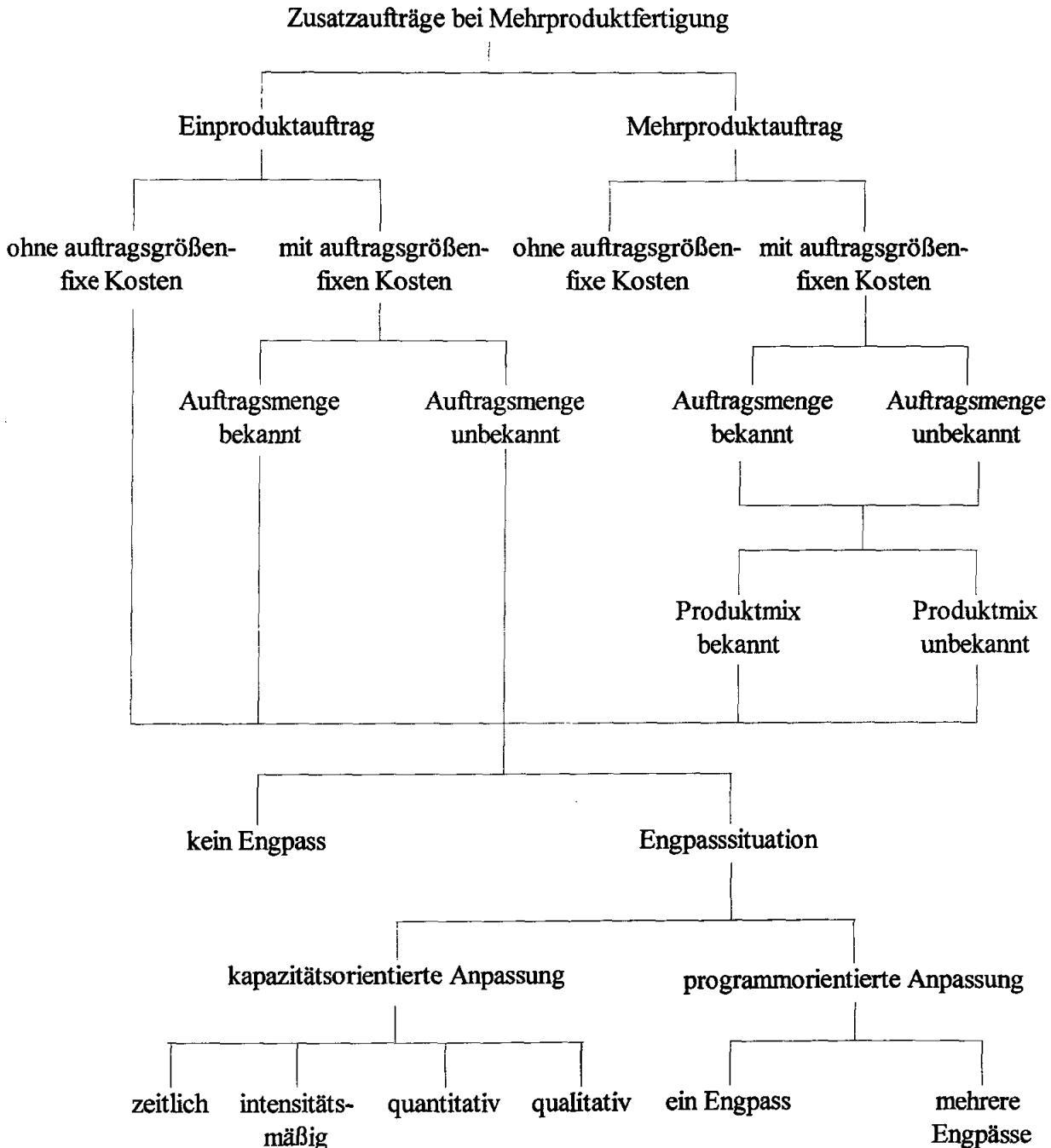


Abb. 4: Arten von Entscheidungen über Zusatzaufträge

## 2. Entscheidungen nach den Produktionsbedingungen

Zu den relevanten Bedingungen der Produktion zählen

- die Existenz von Engpässen sowie
- die Maßnahmen zur Anpassung der Beschäftigung bei Engpässen.

Ein **Engpass** liegt vor, wenn die Kapazität einer Produktionsstelle nicht ausreicht, die zur Realisation des Zusatzauftrages erforderlichen Produktmengen zu produzieren. Um in einer Engpass-situation die für einen Zusatzauftrag erforderlichen Kapazitäten zu schaffen, müssen geeignete Anpassungsmaßnahmen ergriffen werden, deren Kosten bei der Entscheidungsfindung zu berücksichtigen sind. Zusatzaufträge sind auf kurzfristige Zeiträume begrenzt, sodass kapazitätserhöhende Maßnahmen mit langfristigem Charakter (z.B. Investitionen in die Betriebsmittelausstattung) zur Schaffung der für den Zusatzauftrag erforderlichen Kapazitäten ungeeignet sind. Die in der betriebswirtschaftlichen Literatur diskutierten kurzfristigen Maßnahmen zur Anpassung der Produktion an Nachfrageschwankungen können in

- kapazitätsorientierte und
- programmorientierte Anpassungsmaßnahmen

gegliedert werden (vgl. zu dieser Unterscheidung z.B. Ewert/Wagenhofer 2000, S. 168 f.).

Der Anwendungsbereich **kapazitätsorientierter Anpassungsmaßnahmen** ist auf das Beschäftigungsintervall bis zur Maximalkapazität begrenzt (vgl. zu dieser Unterscheidung Kern 1962, S. 121 ff.). Nach der Kosteneinflussgröße, die durch die Anpassungsmaßnahme verändert wird, kann zwischen

- der zeitlichen,
- der intensitätsmäßigen,
- der quantitativen und
- der qualitativen Anpassung

unterschieden werden (in Anlehnung an Gutenberg 1979, S. 353 ff.; Kosiol 1969, S. 53 ff.). Einen Überblick über die Arten kapazitätsorientierter Anpassungsmaßnahmen und ihren Einfluss auf die Kosten gibt Abb. 5.

Erreicht die Beschäftigung die Maximalkapazität, d.h. die Ausbringungsmenge, die bei Produktion mit der maximalen Intensität während der gesamten verfügbaren Zeit erreicht wird, kann die für die Realisierung des Zusatzauftrages erforderliche Kapazität nur noch durch die Anpassung des geplanten Periodenprogramms über die Verringerung der Produktionsmenge einer oder mehrerer Produkte erreicht werden.

Maßnahmen, die auf einer Veränderung des Periodenprogramms beruhen, bewirken eine Verringerung des geplanten Deckungsbeitrages der Periode. Die durch die Anpassung des Periodenprogramms verdrängten Deckungsbeiträge müssen dem Zusatzauftrag als Opportunitätskosten zugerechnet werden. **Opportunitätskosten** einer Alternative können allgemein als Zielerreichungsbeitrag definiert werden, der durch Verdrängung einer anderen Alternative (z.B. Produktionsmengen im Periodenprogramm) zugunsten der betrachteten Alternative (z.B. Zusatzauftrag) entgeht (vgl. Coenenberg 1999, S. 307). Nur wenn die Entscheidungen über den Zusatzauftrag auf der Grundlage von Kosten und Erlösen getroffen werden, handelt es sich bei den Opportunitätskosten um entgangene Deckungsbeiträge. Zur Berechnung der Opportunitätskosten einer Alter-

native (Zusatzauftrag) ist das lineare Planungsmodell zur Bestimmung des optimalen Periodenprogramms unter Einbeziehung der Kapazitäten zu lösen, die bei Realisation der betrachteten Alternative (Zusatzauftrag) für das Periodenprogramm verbleiben, und der sich ergebende Deckungsbeitrag ist dem Deckungsbeitrag gegenüberzustellen, der mit dem ursprünglichen Programm hätte erzielt werden können. Diese Vorgehensweise wird im Folgenden als **Differenzmethode** bezeichnet. Um nicht das gesamte Planungsproblem nochmals lösen zu müssen, können

- die inputbezogenen und
- die outputbezogenen Opportunitätskosten

als Kennzahlen für eine vereinfachte Bestimmung der Opportunitätskosten einer Alternative ermittelt werden (vgl. Coenenberg 1976, S. 109 ff.). **Inputbezogene Opportunitätskosten**  $w_{ij}$  bzw.  $w_i$  bringen den erzielbaren Deckungsbeitrag einer Einheit des Engpassfaktors  $i$  (Inputfaktor) bei Verwendung für das Produkt  $j$  bzw. bei deckungsbeitragsmaximaler Verwendung zum Ausdruck. Sind die Absatzobergrenzen nicht wirksam, werden sie wie folgt bestimmt:

$$(5) \quad w_{ij} = \frac{d_j}{a_{ij}} \quad \text{bzw.} \quad w_i = \max_j \frac{d_j}{a_{ij}}.$$

Werden die Deckungsbeiträge nicht auf Engpassfaktoren, sondern auf eine Outputeinheit bezogen, wird von **outputbezogenen Opportunitätskosten** gesprochen. Sie können als Alternativ- oder Opportunitätskosten in Erscheinung treten. **Alternativkosten** werden als Deckungsbeitrag der besten Alternative gemessen, die aufgrund eines Engpasses in Produktionsstufe  $i$  nicht realisiert wurde. Sind keine Absatzobergrenzen wirksam, werden sie wie folgt berechnet:

$$(6) \quad \eta_j = \max_z \frac{d_z}{a_{iz}} \cdot a_{ij}$$

wobei  $z$  = Index der nicht realisierten Alternativen.

Die **Optimalkosten** bringen den Deckungsbeitrag zum Ausdruck, der bei Veränderung der deckungsbeitragsmaximalen Verwendung des Engpassfaktors  $i$  erbracht werden muss, wenn der gleiche Deckungsbeitrag wie bei der deckungsbeitragsmaximalen Verwendung erzielt werden soll. Berechnet werden sie als Produkt aus den inputbezogenen Opportunitätskosten der Engpasseinheit bei deckungsbeitragsmaximaler Verwendung und dem Produktionskoeffizienten der betrachteten Alternative:

$$(7) \quad \epsilon_i = w_i \cdot a_{ij}.$$

Die Bestimmungsgleichungen für die input- und outputbezogenen Opportunitätskosten sind situationsabhängig und bei Veränderung der vorliegenden Situation (z.B. wirksame Absatzobergrenzen) entsprechend anzupassen.

Art der Anpassung	Beispiele für Anpassungsmaßnahmen	Kostenwirkungen	
		Kostenart	Kostenverhalten
<b>kapazitätsorientierte Anpassung</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• zeitliche Anpassung</li> <li>• intensitätsmäßige Anpassung</li> <li>• quantitative Anpassung                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- rein quantitativ</li> <li>- selektiv</li> </ul> </li> <li>• qualitative Anpassung</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Überstunden, Abbau von Kurzarbeit</li> <li>höhere Produktionsgeschwindigkeit</li> <li>Inbetriebnahme von Reservemaschinen, Einsatz von Leiharbeitern, Einsatz von Mitarbeitern aus unterbeschäftigten Bereichen</li> <li>wie bei rein quantitativer Anpassung</li> <li>Übergang auf ein anderes Verfahren, Substitution von Repetiergütern, Übergang zu Fremdbezug, Vergabe von Lohnarbeit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fertigungslöhne (variable Kosten)</li> <li>variable Fertigungsgemeinkosten</li> <li>Wiederanlaufkosten, Stilllegungskosten</li> <li>Wiederanlaufkosten, Stilllegungskosten, variable Fertigungsgemeinkosten</li> <li>variable Fertigungsgemeinkosten, Materialeinzelkosten</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Zunahme der auftragsgrößenvariablen Stückkosten des Zusatzauftrages</li> <li>Zunahme der auftragsgrößenvariablen Stückkosten des Zusatzauftrages und des Periodenprogramms</li> <li>Zunahme der auftragsgrößenfixen Kosten</li> <li>Zunahme der auftragsgrößenfixen Kosten; Zunahme der auftragsgrößenvariablen Stückkosten des Zusatzauftrages</li> <li>Zunahme der auftragsgrößenvariablen Stückkosten des Zusatzauftrages</li> </ul>
<b>programmorientierte Anpassung</b>	Verdrängung oder Modifikation von Aufträgen, Verringerung der im Periodenprogramm festgelegten Produktionsmengen	Opportunitätskosten (verdrängte Deckungsbeiträge)	Zunahme der auftragsgrößenvariablen Stückkosten des Zusatzauftrages

Abb. 5: Überblick über Anpassungsmaßnahmen für einen Zusatzauftrag in Engpasssituationen

### 3. Arten nach den Merkmalen der Zusatzaufträge

Merkmale eines Zusatzauftrages beziehen sich auf

- die Zusammensetzung des Auftrages,
- die Vollständigkeit der über den Auftrag vorliegenden Informationen sowie
- die Struktur der Kosten des Zusatzauftrages.

Nach der **Zusammensetzung des Auftrages** wird zwischen Ein- und Mehrproduktaufträgen unterschieden. Mehrproduktaufträge können durch ein konstantes oder ein variables Produktmix gekennzeichnet sein. Bei konstantem Produktmix werden die Produkte stets in einem konstanten

Verhältnis abgesetzt, weil z.B. ein Verwendungsverbund vorliegt (z.B. Geschirr, Besteck) oder mehrere Produkte eine Verpackungseinheit bilden (z.B. Dichtungen). Sind die Mengen der verschiedenen Produkte frei bestimmbar, liegt ein variierbares Produktmix vor (z.B. Speiseeis in verschiedenen Geschmacksrichtungen).

Die **Informationen über einen Auftrag** mit Einfluss auf die Entscheidungssituation sind die Auftragsgröße und bei Mehrproduktaufträgen mit variierbarem Produktmix auch die Verteilung der Auftragsmenge auf die verschiedenen Produkte. Die Auftragsgröße ist in der Regel bekannt. Es ist jedoch auch möglich, dass im Zeitpunkt der Entscheidung noch keine vollständigen Informationen über die Auftragsgröße vorliegen, weil der Auftraggeber die Auftragsgröße von der Nachfrage seiner eigenen Kunden abhängig macht, die Aufteilung der Auftragsmenge auf mehrere Lieferanten des Auftraggebers noch nicht festliegt oder Folgeaufträge in Aussicht gestellt werden. Bei Mehrproduktaufträgen mit variierbarem Produktmix kann zusätzlich der Fall eintreten, dass bei Kenntnis der gesamten Auftragsgröße die Aufteilung der Gesamtmenge auf einzelne Produkte im Entscheidungszeitpunkt noch nicht bekannt ist.

Die **Kosten eines Zusatzauftrages** können sich aus auftragsgrößenvariablen und auftragsgrößenfixen Kosten zusammensetzen. Aufträge verursachen stets **auftragsgrößenvariable Kosten**, zu denen u.a. die Materialeinzelkosten und die variablen Fertigungsgemeinkosten zählen. Es ist jedoch denkbar, dass mit einem Zusatzauftrag auch **auftragsgrößen(intervall)fixe Kosten** verbunden sind. Zu dieser Kostenkategorie zählen beispielsweise die Kosten für eine konstruktive Anpassung eines Produktes, für die Anfertigung eines Spezialwerkzeuges oder für die Vorbereitung der Produktion auf die Realisation des Zusatzauftrages.

### III. Entscheidungsrechnungen für Zusatzaufträge

#### 1. Bestimmung von Preisuntergrenzen

Eine sehr weite Definition für die Preisuntergrenze einer Entscheidungsalternative findet sich bei Coenenberg, der sie als kritischen Wert definiert, bei dessen Unterschreitung eine andere Alternative ergriffen wird. Bei diesem Wert kann es sich um den Preis eines Produktes oder den Wert eines Auftrages handeln (vgl. Coenenberg 1999, S. 327). In einer engeren Fassung des Begriffs wird unter einer **Preisuntergrenze** nur der kritische Verkaufspreis einer Produkteinheit verstanden, bei dessen Unterschreitung das Produkt nicht, nicht mehr bzw. nur noch mit einer bestimmten Menge angeboten wird (Kilger 1993, S. 843; Ewert/Wagenhofer 2000, S. 162 f.). Die Wertgrenze, die für die Annahme eines Mehrproduktauftrages entscheidend ist, wird dagegen als **Erlösuntergrenze** bezeichnet (vgl. Kilger 1993, S. 845). Dieser Differenzierung zwischen Preis- und Erlösuntergrenzen soll hier gefolgt werden.

Mit der Bestimmung von Preisuntergrenzen können vor allem die folgenden Entscheidungen unterstützt werden: Annahme oder Ablehnung eines Zusatzauftrages, Elimination eines Produktes aus dem Periodenprogramm sowie Veränderungen der Zusammensetzung des Periodenprogramms. In die Berechnung der Preisuntergrenze für einen Zusatzauftrag sind drei verschiedene **Kostenkategorien** einzubeziehen:

- die auftragsgrößenvariablen Kosten,
- die auftragsgrößenfixen Kosten sowie
- die Anpassungskosten.



Da sich Preisuntergrenzen nicht auf den gesamten Auftrag, sondern auf Produkteinheiten beziehen, sind die **auftragsgrößenfixen Kosten** nach dem Durchschnittsprinzip auf die Produkteinheiten zu verrechnen. **Anpassungskosten** werden in Engpassituationen durch Maßnahmen zur Schaffung der für den Zusatzauftrag notwendigen Kapazitäten verursacht. Ihre Zusammensetzung hängt damit wie auch ihre Berechnung von der jeweiligen Engpasssituation und den ergriffenen Maßnahmen ab.

Die **Preisuntergrenze** eines Zusatzauftrages über ein Produkt gibt den Stückverkaufspreis an, bei dessen Unterschreitung der Zusatzauftrag abgelehnt und das festgelegte Periodenprogramm realisiert wird. Sie kann unter der Annahme, dass

- keine kapazitätserhöhenden Anpassungsprozesse ausgelöst werden,
- zwischen dem Zusatzauftrag und dem festgelegten Periodenprogramm keine engpass- oder marktbezogenen Erlösinterdependenzen existieren und
- die auftragsgrößenvariablen Stückkosten konstant sind

wie folgt bestimmt werden (vgl. Kilger 1982, S. 169):

$$(8) \text{ PUG}_\delta = k_{v\delta} + \frac{K_{f\delta}}{x_\delta}$$

Besteht der Zusatzauftrag aus mehreren verschiedene Produkten (Mehrproduktauftrag), muss von der Preisuntergrenze zur **Erlösuntergrenze** übergegangen werden. Diese wird wie folgt berechnet:

$$(9) \text{ EUG}_\delta = \sum_{n=1}^N k_{v\delta n} \cdot x_{\delta n} + K_{f\delta}$$

Stellen nicht die Annahme bzw. die Ablehnung die Alternativen der Entscheidung über einen Zusatzauftrag dar, sondern die Annahme des einen Zusatzauftrages  $\delta$  bzw. die eines alternativen Zusatzauftrages  $\alpha$ , wird die Preisuntergrenze wie folgt berechnet:

$$(10) \text{ PUG}_\delta - k_{v\delta} - \frac{K_{f\delta}}{x_\delta} = p_\alpha - k_{v\alpha} - \frac{K_{f\alpha}}{x_\alpha}$$

$$\text{PUG}_\delta = p_\alpha + k_{v\delta} - k_{v\alpha} + \frac{K_{f\delta}}{x_\delta} - \frac{K_{f\alpha}}{x_\alpha}$$

wobei  $\text{PUG}_\delta$  = Preisuntergrenzen des Zusatzauftrages,

$k_{v\delta}$  = auftragsgrößenvariable Kosten des Zusatzauftrages,

$K_{f\delta}$  = auftragsgrößenfixe Kosten des Zusatzauftrages,

$x_\delta$  = Auftragsgröße,

$\text{EUG}_\delta$  = Erlösuntergrenze des Zusatzauftrages,

$x_{\delta n}$  = Menge des Produktes  $n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) im Zusatzauftrag,

$k_{v\delta n}$  = auftragsgrößenvariable Stückkosten des Produktes  $n$  im Zusatzauftrag.

Die Bestimmungsgleichung zeigt, dass sich Preisuntergrenzen nur dann berechnen lassen, wenn **vollkommene Informationen** über die Auftragsgröße vorliegen oder keine auftragsgrößenfixen Kosten auftreten bzw. keine Anpassungsmaßnahmen ergriffen werden, die zu Fixkostensprüngen führen. Die Berechnung von Erlösuntergrenzen verlangt darüber hinaus auch noch vollkommene Informationen über die Auftragszusammensetzung. Da die Kosten eines Zusatzauftrages auch von seiner Zusammensetzung abhängen, kann beim Fehlen dieser Informationen keine eindeutige Erlösgrenze berechnet werden.

## 2. Ermittlung von Break-even-Mengen

Die **Break-even-Analyse** ist ein unternehmensbezogenes Analyseinstrument, mit dem die Wirkungen von Entscheidungen auf die Kosten, Erlöse, Deckungsbeiträge und Verluste der Unternehmung untersucht werden (vgl. Coenberg 1999, S. 274; Horngren/Sundem/Stratton 1999, S. 45). Sie ist aber auch ein Instrument der Sensibilitätsanalyse zur Unterstützung von Programm-entscheidungen bei unvollkommener Information über die Absatzmenge. Mit Sensibilitätsanalysen werden die Ausprägungen unsicherer Entscheidungsparameter bestimmt, für die eine spezifische Entscheidungsalternative optimal ist. Diese Ausprägungen werden anschließend den für möglich gehaltenen Ausprägungen gegenübergestellt, um das Zielerreichungsrisiko der Entscheidungsalternative beurteilen zu können. Im Rahmen der Break-even-Analyse wird die Absatzmenge berechnet, bei der die Erlöse die Kosten gerade decken, d.h., die Konsequenzen der analysierten Programm-entscheidung die Verlustzone verlassen und in die Gewinnzone übergehen (zur Break-even-Analyse als Instrument der Sensibilitätsanalyse vgl. Horngren/Sundem/Stratton 1999, S. 45; Drury 1996, S. 238 f.; Ewert/Wagenhofer 2000, S. 220 f.).

Im Grundmodell der Break-even-Analyse wird die **Break-even-Menge** eines Produktes wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} E(x) &= K(x) \\ (11) \quad p \cdot x &= k_v \cdot x + K_f \\ x &= \frac{K_f}{p - k_v} = \frac{K_f}{d} \end{aligned}$$

wobei  $x$  = Absatzmenge,  
 $k_v$  = variable Stückkosten,  
 $K_f$  = fixe Kosten der Unternehmung,  
 $d$  = Stückdeckungsbeitrag.

Für einen **Zusatzauftrag**, der auftragsgrößenfixe Kosten oder fixe Anpassungskosten auslöst, kann bei unvollkommenen Informationen über die Auftragsgröße oder die Auftragszusammensetzung keine Preis- oder Erlösuntergrenze berechnet werden. Bildet die Auftragsgröße  $x_\delta$  den unsicheren Entscheidungsparameter mit dem Auftragsgrößenintervall

$$\left[ x_\delta^{(u)}, x_\delta^{(o)} \right] \quad (x_\delta^{(u)} = \text{Auftragsmindestmenge}, x_\delta^{(o)} = \text{Auftragshöchstmenge})$$

als Menge der für möglich gehaltenen Ausprägungen, kann das Grundmodell der Break-even-Analyse auch zur Unterstützung von Entscheidungen über die Annahme bzw. Ablehnung eines

Zusatzauftrages mit auftragsgrößenfixen Kosten bei unvollkommener Information über die Auftragsgröße herangezogen werden. Dazu sind im Grundmodell die Absatzmenge durch die Auftragsgröße, die variablen Kosten durch die auftragsgrößenvariablen Kosten, die fixen Kosten der Unternehmung durch die auftragsgrößenfixen Kosten und der Preis durch den Verkaufspreis einer Produkteinheit im Auftrag zu ersetzen.

Das Grundmodell der Break-even-Analyse beruht auf einer Vielzahl von **Prämissen**, die in der Literatur bereits ausführlich diskutiert worden sind (vgl. vor allem Schweitzer/Troßmann 1998, S. 36 ff.; Drury 1996, S. 234 ff.). Der Einsatz des Grundmodells der Break-even-Analyse zur Unterstützung von Entscheidungen über einen Zusatzauftrag wird u.a. durch die folgenden Prämissen begrenzt:

- Einproduktaufträge,
- Proportionalität der auftragsgrößenvariablen Kosten im betrachteten Mengenintervall (Konstanz der auftragsgrößenvariablen Stückkosten) sowie
- Konstanz der auftragsgrößenfixen Kosten im betrachteten Mengenintervall.

Mit den beiden zuletzt genannten Prämissen wird eine **lineare Funktion der Auftragskosten** unterstellt. Das setzt voraus, dass im betrachteten Auftragsgrößenintervall keine Engpässe auftreten (in Anlehnung an Poensgen 1981, Sp. 308). Zur Unterstützung von Entscheidungen über Zusatzaufträge muss das Grundmodell um Anpassungskosten und Mehrproduktfertigung erweitert werden.

## **C. Entscheidungen bei vollkommener Information über den Zusatzauftrag**

### **I. Entscheidungen über Einproduktaufträge bei vollkommener Information**

#### **1. Preisuntergrenzen bei kapazitätsorientierter Anpassung**

Bei **kapazitätsorientierter Anpassung** müssen in die Berechnung der Preisuntergrenze für die Entscheidung über die Annahme bzw. Ablehnung eines Zusatzauftrages neben den auftragsgrößenvariablen Stückkosten und den auftragsgrößenfixen Kosten des Zusatzauftrages auch die Anpassungskosten einbezogen werden. Wie Abb. 5 zeigt, weist jede Anpassungsmaßnahme andere Kostenwirkungen auf. Es kann zwischen dem Anstieg

- der auftragsgrößenvariablen Stückkosten,
- der auftragsgrößen(intervall)fixen Kosten sowie
- der variablen Stückkosten der Produkte im Periodenprogramm

unterschieden werden. Für jede dieser Kostenkategorien soll im Folgenden die Bestimmungsgleichung der Preisuntergrenzen entwickelt werden.

### (1) Anstieg der auftragsgrößenvariablen Kosten

Diese Kostenwirkung wird durch Maßnahmen der zeitlichen und der qualitativen Anpassung ausgelöst. Sie umfassen z.B. Überstundenlöhne oder Kosten durch erhöhten Ausschuss.

$$(12) \text{ PUG}_\delta = k_{v\delta} + \Delta k_{v\delta} + \frac{K_{f\delta}}{x_\delta}$$

$$\text{mit } \Delta k_{v\delta} = \sum_{s=1}^S \Delta k_{vs} \cdot a_{s\delta}$$

- wobei  $k_{v\delta}$  = auftragsgrößenvariable Stückkosten des Zusatzauftrages  $\delta$  ohne Anpassungsmaßnahmen,
- $\Delta k_{v\delta}$  = Anstieg der auftragsgrößenvariablen Stückkosten des Zusatzauftrages,
- $\Delta k_{vs}$  = zusätzliche variable Stückkosten pro Fertigungsminute in der durch die Anpassungsmaßnahme betroffenen Kostenstelle  $s$  ( $s = 1, \dots, S$ ),
- $a_{s\delta}$  = Fertigungszeit des Zusatzauftrages in der von der Anpassungsmaßnahme betroffenen Kostenstelle  $s$ .

### (2) Anstieg der auftragsgrößenfixen Kosten

Zusätzliche auftragsgrößenfixe Kosten werden durch Maßnahmen der quantitativen Anpassung ausgelöst. Sie umfassen die Wiederanlauf- und Stilllegungskosten bei Inbetriebnahme von Reservemaschinen sowie die zusätzlichen auftragsgrößenfixen Kosten (z.B. Leasingbeträge für Leiharbeiter und gemietete Betriebsmittel). Da hier der Fall des Kapazitätsaufbaus bei Annahme des Zusatzauftrages betrachtet wird, werden die Wiederanlauf- und Stilllegungskosten addiert. In der Literatur wird häufig der Fall der Stilllegung von Betriebsteilen bei Nichtannahme des Zusatzauftrages betrachtet (vgl. z.B. Coenenberg 1999, S. 350 f.). In dieser Entscheidungssituation müssen die Wiederanlauf- und Stilllegungskosten subtrahiert werden.

$$(13) \text{ PUG}_\delta = k_{v\delta} + \frac{K_{f\delta}}{x_\delta} + \frac{\Delta K_{f\delta}}{x_\delta} + \frac{K_w}{x_\delta}$$

- wobei  $\Delta K_{f\delta}$  = zusätzliche auftragsgrößenfixe Kosten,
- $K_w$  = Wiederanlauf- und Stilllegungskosten

### (3) Anstieg der variablen Kosten der Produkte im Periodenprogramm

Es ist vor allem die intensitätsmäßige Anpassung, die zu einem Anstieg der Kosten von Produkten im Periodenprogramm der Unternehmung führt. Der Kostenanstieg bei Produkten des Periodenprogramms ergibt sich, da in der Engpassstelle nicht nur der Zusatzauftrag, sondern auch die Produkte des Periodenprogramms mit der höheren Intensität bearbeitet werden müssen. Entsprechend fallen für alle Produkte höhere variable Stückkosten an, die dem Zusatzauftrag anzulasten sind. Unter der Annahme, dass das gesamte Periodenprogramm bei erhöhter Intensität gefertigt werden muss, ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für die Preisuntergrenze:

$$(14) \quad \text{PUG}_\delta = k_{v\delta} + \sum_{s=1}^S (k_{vs2} \cdot a_{s\delta 2} - k_{vs1} \cdot a_{s\delta 1}) + \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^J (k_{vs2} \cdot a_{sj2} - k_{vs1} \cdot a_{sj1}) \cdot \frac{x_j}{x_\delta}$$

- wobei  $k_{vs2}$  = variable Kosten pro Fertigungsminute nach der Intensitätserhöhung in der von der Intensitätserhöhung betroffenen Kostenstelle  $s$  ( $s = 1, \dots, S$ ),
- $k_{vs1}$  = variable Kosten pro Fertigungsminute vor der Intensitätserhöhung in Kostenstelle  $s$ ,
- $a_{sj2}$  = Produktionskoeffizient des Produktes  $j$  aus dem Periodenprogramm nach der Intensitätserhöhung in Kostenstelle  $s$ ,
- $a_{sj1}$  = Produktionskoeffizient des Produktes  $j$  aus dem Periodenprogramm vor der Intensitätserhöhung in Kostenstelle  $s$ .

## 2. Preisuntergrenzen bei programmorientierter Anpassung

Die programmorientierte Anpassung besteht in der Verdrängung von Produktmengen bzw. Produkten aus dem geplanten Periodenprogramm. Das modifizierte Periodenprogramm führt zu einem geringeren Deckungsbeitrag als das ursprünglich geplante, da die durch den Zusatzauftrag beanspruchten Kapazitäten für das Periodenprogramm nicht mehr zur Verfügung stehen. Die durch die Anpassung des geplanten Periodenprogramms verdrängten Deckungsbeiträge sind bei der Bestimmung der Preisuntergrenze als **Opportunitätskosten** zu berücksichtigen.

Bei einer **wirksamen Mehrproduktrestriktion** sind zur Berechnung der Preisuntergrenze die Produkte des geplanten Periodenprogramms in der Reihenfolge zunehmender relativer Deckungsbeiträge zu ordnen. Bei dem relativen Deckungsbeitrag eines Produktes handelt es sich um seinen Deckungsbeitrag pro Engpasseinheit, der als Quotient aus dem Stückdeckungsbeitrag und dem Produktionskoeffizienten des Produktes im Engpass berechnet wird. Er gibt die Deckungsbeitragsänderung bei Veränderung der Engpassfaktormenge um eine Einheit (z.B. Fertigungsstunde) an. Die geplante Menge des Produktes mit dem niedrigsten relativen Deckungsbeitrag ist zu reduzieren, bis die für den Zusatzauftrag erforderlichen Kapazitäten frei sind (vgl. Coenenberg 1999, S. 332). Kann der Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages durch die **Verdrängung eines Produktes  $z$**  geschaffen werden, kann die Preisgrenze wie folgt berechnet werden:

$$(15) \quad \text{PUG}_\delta = k_{v\delta} + \frac{d_z \cdot \Delta x_z}{x_\delta}$$

Bei unbegrenzter Teilbarkeit des zu verdrängenden Produktes (z.B. Flüssigkeiten, Schüttgüter) kann die Produktionsmenge des Produktes  $z$  exakt um die Menge reduziert werden, die für die Schaffung der zur Realisation des Zusatzauftrages notwendigen Kapazitäten erforderlich ist, d.h., es gilt:

$$(16) \quad \begin{aligned} a_{i\delta} \cdot x_\delta &= a_{iz} \cdot \Delta x_z \\ \Delta x_z &= \frac{a_{i\delta} \cdot x_\delta}{a_{iz}} \end{aligned}$$

Für die Preisgrenze gilt damit

$$(17) \text{ PUG}_\delta = k_{v\delta} + \frac{d_z}{a_{iz}} \cdot a_{i\delta} = k_{v\delta} + w_i \cdot a_{i\delta}$$

- wobei  $d_z$  = Stückdeckungsbeitrag des verdrängten Produktes z,  
 $a_{iz}$  = Produktionskoeffizient des verdrängten Produktes z im Engpass i,  
 $\Delta x_z$  = verdrängte Menge des Produktes z.

Die Opportunitätskosten des Zusatzauftrages ergeben sich als Produkt aus den inputbezogenen Opportunitätskosten der Engpassstelle bei deckungsbeitragsmaximaler Verwendung und dem Produktionskoeffizienten des Produktes aus dem Zusatzauftrag in der Engpassstelle:

$$\text{PUG}_\delta = k_{v\delta} + w_i \cdot a_{ij} \quad \text{mit} \quad w_i = \min_j \frac{d_j}{a_{ij}}$$

Reicht die vollständige Elimination eines Produktes nicht aus, die Kapazitäten zur Realisation des Zusatzauftrages zu schaffen, muss die Menge des Produktes mit dem zweitniedrigsten relativen Deckungsbeitrag im Periodenprogramm reduziert werden. Dieser Prozess wird fortgesetzt, bis die erforderlichen Kapazitäten geschaffen sind. Das zuletzt verdrängte Produkt, d.h. das Produkt, das von den eliminierten Produkten den höchsten relativen Deckungsbeitrag aufweist, wird u.U. noch produziert, jedoch in geringeren als den ursprünglich geplanten Mengen, während die Produkte mit einem niedrigeren relativen Deckungsbeitrag vollständig aus dem Periodenprogramm eliminiert worden sind. Der relative Deckungsbeitrag des Produktes aus dem geplanten Periodenprogramm, das zur Schaffung freier Kapazitäten als Nächstes verdrängt werden muss, determiniert die **inputbezogenen Opportunitätskosten**. Sie geben den Grenzdeckungsbeitrag an, d.h. die Deckungsbeitragsänderung, die sich ergibt, wenn die Menge des Engpassfaktors bei optimaler Verwendung um eine Einheit erhöht bzw. reduziert wird. Für jede weitere Produktart, die aus dem geplanten Periodenprogramm zur Schaffung der erforderlichen Kapazitäten verdrängt werden muss, verändern sich die inputbezogenen Opportunitätskosten. Die verdrängten Deckungsbeiträge der eliminierten Produkte, d.h. die Opportunitätskosten, die in die Berechnung der Preisuntergrenze eingehen, werden wie folgt berechnet:

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{PUG}_\delta &= k_{v\delta} + \frac{\sum_{z \in Z} \frac{d_z}{a_{iz}} \cdot \Delta x_z \cdot a_{iz}}{x_\delta} \\ &= k_{v\delta} + \frac{\sum_{z \in Z} d_z \cdot \Delta x_z}{x_\delta} \end{aligned}$$

Unter der Bedingung **unbegrenzter Teilbarkeit** der verdrängten Produkte gilt:

$$(19) \quad a_{i\delta} \cdot x_\delta = \sum_{z \in Z} a_{iz} \cdot \Delta x_z$$

Die Preisgrenze kann damit wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \text{PUG}_\delta &= k_{v\delta} + \frac{\sum_{z \in Z} d_z \cdot \Delta x_z}{x_\delta} \\
 (20) \quad &= k_{v\delta} + \frac{\sum_{z \in Z} d_z \cdot \Delta x_z}{\sum_{z \in Z} a_{iz} \cdot \Delta x_z} \cdot a_{i\delta} \\
 &= k_{v\delta} + \frac{\sum_{z \in Z} \frac{d_z}{a_{iz}} \cdot a_{iz} \cdot \Delta x_z}{\sum_{z \in Z} a_{iz} \cdot \Delta x_z} \cdot a_{i\delta}
 \end{aligned}$$

Die Opportunitätskosten entsprechen damit dem mit den durch die verdrängten Produktionsmengen freigesetzten Kapazitäten gewogenen Mittel der Stückdeckungsbeiträge der verdrängten Produkte pro Engpasseinheit (relative Deckungsbeiträge). Diese Bestimmungsgleichung führt jedoch nur unter der Bedingung unbegrenzter Teilbarkeit der verdrängten Produkte zur korrekten Preisuntergrenze. Nicht erfüllt ist diese Bedingung bei begrenzter Teilbarkeit der Produkte, aber auch wenn z.B. bei Kundenfertigung der zuletzt verdrängte Auftrag einen Umfang aufweist, bei dem Kapazitäten in höherem Umfang frei gemacht werden als es für den Zusatzauftrag erforderlich ist, sodass bei Annahme des Zusatzauftrages "Leerkapazitäten im Engpass" entstehen. Treten solche Leerkapazitäten auf, kann versucht werden, diese durch die Erhöhung der Produktionsmengen anderer Produkte im Periodenprogramm zu nutzen. Die Opportunitätskosten des Zusatzauftrages sind um die Deckungsbeiträge zu verringern, die aus dieser Nutzung resultieren. Durch die Erhöhung der Produktionsmengen anderer Produkte können weitere Einsatzgüter zum Engpass werden. Beim Auftreten von Leerkapazitäten sollte deshalb die Differenzmethode zur Anwendung gelangen. Abb. 6 zeigt ein Beispiel zur Bestimmung von Preisuntergrenzen bei einer wirksamen Mehrproduktrestriktion.

Gegeben sei das optimale Periodenprogramm aus nicht teilbaren Produkten bei einer wirksamen Mehrproduktrestriktion aus dem Beispiel in Abb. 2. Hinzu komme folgender Zusatzauftrag:

Produktionskoeffizient der Stufe 1	Produktionskoeffizient der Stufe 2	Auftragsgröße	variable Stückkosten
3	5	115	34,00

Die Kapazität der Produktionsstufe 2 reicht zwar für die Erfüllung des Zusatzauftrages aus (gesamter Kapazitätsbedarf: 3.200 Stunden), nicht jedoch die Kapazität der Produktionsstufe 1 (gesamter Kapazitätsbedarf: 1.345 Stunden). Voraussetzung für die Annahme des Zusatzauftrages ist die Schaffung von Kapazitäten in Höhe von 345 Stunden in Produktionsstufe A durch Verdrängung von Produkten aus dem optimalen Periodenprogramm. Entsprechend den im Beispiel in Abb. 2 berechneten relativen Deckungsbeiträgen sind die Produkte im Periodenprogramm mit den folgenden Mengen zu verdrängen:

50 Einheiten von Produkt 2 mit einem Kapazitätsbedarf in Höhe von (50 · 6 Std.)	300 Std.
23 Einheiten von Produkt 1 mit einem Kapazitätsbedarf in Höhe von $\left(\frac{45}{2} = 22,5\right)$	<u>46 Std.</u>
	346 Std.

Die Preisgrenze ergibt sich damit wie folgt:

$$\begin{aligned} PUG_{\delta} &= 34 + \frac{50 \cdot 20 + 23 \cdot 10}{115} \\ &= 44,70 \text{ €} \end{aligned}$$

Werden die Opportunitätskosten als gewogener Durchschnitt der relativen Deckungsbeiträge berechnet, ergibt sich folgende Preisuntergrenze:

$$\begin{aligned} PUG_{\delta} &= 34 + \frac{2 \cdot 23 \cdot 5 + 6 \cdot 50 \cdot 3,33}{2 \cdot 23 + 6 \cdot 50} \cdot 3 \\ &= 44,66 \text{ €} \end{aligned}$$

Die Abweichungen zwischen den beiden Ergebnissen ergeben sich aus dem Umstand, dass zur Annahme des Zusatzauftrages zwar nur Kapazitäten in Höhe von 345 Stunden erforderlich sind, unter Ganzzahligkeitsbedingungen jedoch 50 Einheiten vom Produkt B und 23 Einheiten von Produkt A verdrängt werden müssen, wodurch freie Kapazitäten in Höhe von 346 Stunden geschaffen werden.

Abb. 6: Beispiel zur Bestimmung von Preisuntergrenzen bei einer wirksamen Mehrproduktrestriktion

Sind zwei oder mehrere **Mehrproduktrestriktionen** wirksam, kommt die Differenzmethode zur Anwendung. Die Opportunitätskosten des Zusatzauftrages werden nach dieser Methode wie folgt ermittelt (vgl. hierzu auch Coenenberg 1999, S. 335 ff.; Hieke 1998, S. 172 ff.): In einem ersten Schritt ist das modifizierte optimale Periodenprogramm zu bestimmen. Hierzu sind in dem ursprünglichen linearen Planungsmodell zur Bestimmung des Periodenprogramms die Kapazitäten um den Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages zu reduzieren. Für die Kapazitätsrestriktionen ergibt sich damit

$$(21) \quad \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot x_j \leq b_i - a_{i\delta} \cdot x_{\delta} \quad \text{für } i = 1, \dots, I \text{ mit}$$

wobei  $a_{i\delta}$  = Produktionskoeffizient des Produktes aus dem Zusatzauftrag in Produktionsstufe i.

In einem zweiten Schritt sind die Opportunitätskosten des Zusatzauftrages (entgangene Deckungsbeiträge) als Differenz zwischen den Deckungsbeiträgen des ursprünglich geplanten und des modifizierten Periodenprogramms zu ermitteln (zu einem Beispiel vgl. Abb. 7).

Gegen sei das optimale Periodenprogramm aus Abb. 3. Hinzu komme ein Zusatzauftrag mit den folgenden Daten:

Produktionskoeffizient der Stufe 1	Produktionskoeffizient der Stufe 2	Auftragsgröße	variable Stückkosten
4	5	120	34,00 €



Nach Anpassung der Kapazitäten lautet das lineare Planungsmodell zur Bestimmung des Periodenprogramms aus Abb. 3:

$$Z = 10x_1 + 20x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 520 \quad (1.000 - 4 \cdot 120)$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 1.100 \quad (1.700 - 5 \cdot 120)$$

$$x_1 \leq 350$$

$$x_2 \leq 120$$

Die optimale Lösung lautet:  $x_1 = 140$ ;  $x_2 = 40$ . Mit diesem Programm wird ein Deckungsbeitrag in Höhe von 2.200,- € erzielt. Gegenüber dem Ausgangsproblem werden Deckungsbeiträge in Höhe von  $4.000\text{€} - 2.200\text{€} = 1.800\text{€}$  verdrängt. Damit ergibt sich eine Preisuntergrenze des Zusatzauftrages in Höhe von

$$\text{PUG}_8 = 34 + \frac{1.800}{120} = 49,-\text{€}$$

Abb. 7: Beispiel zur Bestimmung von Preisuntergrenzen bei mehreren wirksamen Mehrproduktrestriktionen nach der Differenzmethode

Die Opportunitätskosten des Zusatzauftrages können bei unbegrenzter Teilbarkeit der Produkte im Periodenprogramm auch mit Hilfe der **inputbezogenen Opportunitätskosten** bestimmt werden, die als Duale im Endtableau der Lösung des Ausgangsproblems bereits vorliegen. Das setzt jedoch voraus, dass die Reduktion der Kapazitäten um den Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages zu keinem **Basiswechsel** gegenüber der Optimallösung des Ausgangsproblems führt. Ein solcher Basiswechsel tritt nicht auf, wenn

- die Berücksichtigung des Zusatzauftrages zu einer Verringerung der Kapazitäten aller Produktionsstufen um den gleichen Prozentsatz führt (proportionale Kapazitätsbeanspruchung), d.h.  $\Delta b_i = \alpha \cdot b_i$  für  $i = 1, \dots, I$  oder
- die Auftragsgröße bei nicht proportionaler Kapazitätsbeanspruchung keinen basiskritischen Wert übersteigt (vgl. hierzu auch Coenberg 1999, S. 336 ff.).

Ein Beispiel zur Bestimmung von Preisgrenzen bei mehreren wirksamen Mehrproduktrestriktionen mit inputbezogenen Opportunitätskosten und **proportionaler Kapazitätsbeanspruchung** zeigt Abb. 8.

Gegeben sei das optimale Periodenprogramm bei mehreren wirksamen Mehrproduktrestriktionen aus dem Beispiel in Abb. 3. Es geht folgender Zusatzauftrag ein:

Produktionskoeffizient der Stufe 1	Produktionskoeffizient der Stufe 2	Auftragsgröße	variable Stückkosten
5	8,5	120	34,00

Der Zusatzauftrag belastet die Kapazitäten in beiden Produktionsstufen mit 60%. Gleichzeitig führt ein Absatzeinbruch dazu, dass die Absatzobergrenzen 60% unter ihrem bisherigen Wert liegen. Für die Absatzobergrenzen ergeben sich damit die folgenden Werte:  $x_1^0 = 140$  und  $x_2^0 = 48$ . Da sich die Begrenzungen aller Restriktionen um den gleichen Prozentsatz verändern, kommt es zu keinem Basiswechsel, so-

dass mit den Dualwerten als inputbezogene Opportunitätskosten gerechnet werden kann. Die Duale (inputbezogene Opportunitätskosten) können dem Endtableau aus dem Beispiel zur Programmplanung bei mehreren Engpässen in Abb. 3 entnommen werden. Sie weisen folgende Werte auf:

- Produktionsstufe A:  $Z_3 - d_3 = \frac{55}{18}$
- Produktionsstufe B:  $Z_4 - d_4 = \frac{5}{9}$ .

$$\begin{aligned} \text{Für die Preisuntergrenze ergibt sich damit } PUG_{\delta} &= 34 + \frac{\frac{55}{18} \cdot 5 \cdot 120 + \frac{5}{9} \cdot 8,5 \cdot 120}{120} \\ &= 54,00 \text{ €} \end{aligned}$$

Abb. 8: Beispiel zur Bestimmung von Preisuntergrenzen bei mehreren wirksamen Mehrproduktrestriktionen mit inputbezogenen Opportunitätskosten

Übersteigt die Auftragsgröße einen basiskritischen Wert, führt die Verringerung der Kapazität um den Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrags zu einem Basiswechsel und damit zu anderen inputbezogenen Opportunitätskosten. Beansprucht der Zusatzauftrag nur ein begrenzt verfügbares Einsatzgut, kann die **basiskritische Auftragsgröße** wie folgt bestimmt werden (vgl. hierzu auch Abb. 10):

- (1) Durchführung einer Sensibilitätsanalyse zur Bestimmung des Bereichs  $[b_i - \lambda_i, b_i]$ , in dem die Kapazitäten reduziert werden können, ohne dass es zu einem Basiswechsel kommt (zur Sensibilitätsanalyse vgl. Abb. 9).
- (2) Die basiskritische Auftragsgröße  $\bar{x}_{i\delta}$  ergibt sich schließlich als Quotient aus dem Wert  $\lambda_i$ , um den die Kapazität in Produktionsstufe  $i$  ohne Basiswechsel verringert werden kann, und dem Produktionskoeffizienten des Produktes im Zusatzauftrag in Produktionsstufe  $i$   $a_{i\delta}$ :

$$(22) \quad \bar{x}_{i\delta} = \frac{\lambda_i}{a_{i\delta}}$$

Die Reduktion der Kapazitätsbeschränkung  $b_i$  des Einsatzgutes  $i$  um den Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages an diesem Einsatzgut  $a_{i\delta} \cdot x_{\delta}$  beeinflusst im Endtableau des Ausgangsproblems die Schlupfvariable (für  $J+i$  wird im Folgenden  $n$  gesetzt) der  $i$ -ten Restriktion  $x_{J+i}$ . Bei dieser Schlupfvariablen kann es sich um eine Basisvariable oder eine Nichtbasisvariable handeln. Sie verliert die jeweilige Eigenschaft, wenn die Kapazitätsbeschränkung der  $i$ -ten Restriktion unter den unteren Wert des Intervalls  $[b_i - \lambda_i, b_i]$  sinkt. <sup>1)</sup>

- Ist die Schlupfvariable  $x_n$  eine Basisvariable, gilt

$$\lambda_i = x_n.$$

- Handelt es sich bei der Schlupfvariablen  $x_n$  um eine Nichtbasisvariable, gilt

$$\lambda_i \cong \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a_{in} \leq 0 \\ \min \left\{ \frac{b_i^*}{a_{in}^*} \mid i = 1, \dots, I \text{ mit } a_{in} > 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $b_i^*$  = Begrenzungskoeffizient der Basisvariablen  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) im Endtableau,  
 $a_{in}^*$  = Koeffizienten der Schlupfvariablen  $n$  im Endtableau.

1) Der Wert einer Schlupfvariablen kann in der Regel auch nach oben schwanken, ohne dass es zu einem Basiswechsel kommt. Das Intervall, in dem der Begrenzungsfaktor  $b_i$  variiert werden kann, ohne dass es im Endtableau des Ausgangsproblems zu einem Basiswechsel kommt, ist deshalb definiert als  $\left[ b_n - \lambda_n; b_n + \lambda_n \right]$ . Da ein Zusatzauftrag stets mit einem nicht negativem Bedarf an Einsatzgütern verbunden ist, d.h., der Begrenzungsfaktor  $b_i$  bei Annahme des Zusatzauftrages stets kleiner wird, genügt es bei der vorliegenden Problemstellung, die untere Grenze des Schwankungsbereichs zu betrachten.

Abb. 9: Sensibilitätsanalyse bei der Preisgrenzenbestimmung  
 (in Anlehnung an Domschke/Drexler, 1995, S. 44 f.)

Gegeben sei das optimale Periodenprogramm bei mehreren wirksamen Mehrproduktrestriktionen aus dem Beispiel in Abb. 3. Hinzu komme ein Zusatzauftrag über 120 Einheiten eines Produktes, das nur die Kapazität der Produktionsstufe 1 mit 4 Stunden pro Einheit belastet. Eine Sensibilitätsanalyse mit den Daten aus dem Endtableau in Abb. 3 führt zu folgender Obergrenze für den Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages in Produktionsstufe 1:

$$\lambda_3 = \min \left\{ \frac{150}{1,5}; \frac{100}{3,5} \right\} = \min \{ 1.800; 514,29 \} = 514,29.$$

Die basiskritische Auftragsgröße ist in diesem Fall

$$\bar{x}_8 = \frac{514,29}{4} = 128,57 \text{ Einheiten}$$

Belastet der Zusatzauftrag über 120 Einheiten nur die Kapazität der Produktionsstufe 2 mit 5 Stunden pro Einheit, lautet die Obergrenze

$$\lambda_4 = \min \left\{ \frac{200}{1}; \frac{20}{1} \right\} = \min \{ 1.200; 360 \} = 360.$$

Die basiskritische Auftragsgröße beträgt damit

$$\bar{x}_8 = \frac{360}{5} = 72$$

Da im zweiten Fall die basiskritische Auftragsgröße unter der tatsächlichen Auftragsgröße liegt, d.h. der Kapazitätsbedarf in der Produktionsstufe 2 mit 600 Stunden die Obergrenze des Intervalls übersteigt, kommt es zu einem Basiswechsel. Die Preisuntergrenze kann im zweiten Fall deshalb nicht mit Hilfe der Dualwerte aus dem Endtableau berechnet werden, sodass die Differenzmethode zur Anwendung gelangen muss.

Abb. 10: Beispiel zur Bestimmung der basiskritischen Auftragsgröße

Werden von einem Zusatzauftrag mehrere Engpassfaktoren in unterschiedlichem Umfang, d.h. nicht proportional beansprucht, bietet sich für die Bestimmung der basiskritischen Auftragsgröße die **parametrische Optimierung** an (vgl. hierzu Abschnitt DI2). Weniger aufwendig als über die inputbezogenen Opportunitätskosten ist in dieser Situation jedoch die Bestimmung der Opportunitätskosten nach der Differenzmethode.

## II. Entscheidungen über Mehrproduktaufträge bei vollkommener Information

Für einen Mehrproduktauftrag bei gegebenen Auftragsmengen für jedes Produkt  $n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) im Zusatzauftrag kann die Preisuntergrenze wie folgt bestimmt werden:

$$(23) \quad \sum_{n=1}^N (p_{\delta n} - k_{v\delta n}) \cdot x_{\delta n} - K_{f\delta} = 0$$

wobei  $p_{\delta n}$  = Preis des Produktes  $n$  im Zusatzauftrag ( $n = 1, \dots, N$ ),

$k_{v\delta n}$  = auftragsgrößenvariable Stückkosten des Produktes  $n$  im Zusatzauftrag,

$x_{\delta n}$  = Menge des Produktes  $n$  im Zusatzauftrag.

Es wird deutlich, dass es für die einzelnen Produkte keine eindeutigen Preisuntergrenzen gibt, sondern nur eine Vielzahl kritischer Preis-Mengen-Kombinationen. Es wird deshalb empfohlen, von der Preisuntergrenze zur **Erlösuntergrenze** überzugehen (vgl. Kilger 1993, S. 844 f.). Die Erlösuntergrenze ist definiert als

$$(24) \quad EUG_{\delta} = \sum_{n=1}^N k_{v\delta n} \cdot x_{\delta n} + K_{f\delta}$$

Die **Opportunitätskosten** werden berechnet wie bei den Einproduktaufträgen. In die Bestimmung der Erlösgrenze gehen jedoch nicht die Opportunitätskosten pro Stück, sondern die gesamten Opportunitätskosten des Zusatzauftrages ein.

## D. Entscheidungen bei unvollkommenen Informationen über den Zusatzauftrag

### I. Entscheidungen über Einproduktaufträge

#### 1. Break-even-Analyse bei kapazitätsorientierter Anpassung

Break-even-Analysen zur Unterstützung von Entscheidungen über einen Zusatzauftrag setzen **Kostenfunktionen** voraus, welche die Kosten des Zusatzauftrages in Abhängigkeit von der Auftragsgröße angeben. Da für diesen Zusatzauftrag zunächst nur die Restkapazität zur Verfügung steht, d.h. der Teil der Kapazität, der nicht vom geplanten Periodenprogramm beansprucht wird, kann der Fall auftreten, dass die Kapazität für die Realisation des Zusatzauftrages nicht ausreicht. Für die Annahme des Zusatzauftrages sind Maßnahmen zur Anpassung der Produktion an die Beschäftigungszunahme zu ergreifen. Unter diesen Bedingungen kann nicht wie im Grundmodell der Break-even-Analyse von einem linearen Verlauf der Kostenfunktion für einen Zusatzauftrag ausgegangen werden. Bei einstufiger Produktion ist der Bereich der für möglich gehaltenen Auftragsgrößen deshalb in zwei Teilintervalle zu zerlegen. Das erste Teilintervall umfasst die Auftragsmengen, die ohne Anpassungsmaßnahme realisierbar sind, das zweite Teilintervall schließt

die Auftragsmengen ein, zu deren Realisation eine Anpassungsmaßnahme ergriffen werden muss. Für die Bestimmung der Grenzen dieser Teilintervalle ist zunächst die **Restkapazität**  $b_R$  zu berechnen, die für den Zusatzauftrag zur Verfügung steht:

$$(25) \quad b_R = b - \sum_{j=1}^J a_j \cdot x_j^p = b - A$$

wobei  $b_R$  = Restkapazität,  
 $A$  = Kapazitätsbedarf des geplanten Periodenprogramms,  
 $x_j^p$  = Menge des Produktes  $j$  im Periodenprogramm.

Für die **realisierbare Auftragsgröße**  $x_{\delta R}$ , d.h. für die Auftragsgröße, die mit dieser Restkapazität realisiert werden kann, gilt

$$(26) \quad x_{\delta R} = \frac{b_R}{a_\delta} = \frac{b - A}{a_\delta}$$

wobei  $x_{\delta R}$  = realisierbare Auftragsgröße, d.h. ohne Anpassungsmaßnahmen realisierbare Größe eines Einproduktauftrages,  
 $a_\delta$  = Produktionskoeffizient des Produktes in einem Einproduktauftrag bei einstufiger Fertigung.

Ist die Auftragsmindestmenge mit der Restkapazität realisierbar, d.h., liegt sie unter der realisierbaren Auftragsgröße, ist das erste Teilintervall wie folgt begrenzt:

$$[x_\delta^{(u)}, x_{\delta R}].$$

Die Untergrenze des zweiten Teilintervalls ist damit die realisierbare Auftragsgröße. Reicht die Restkapazität nicht aus, ist das erste Teilintervall leer, sodass das zweite Teilintervall mit der Auftragsmindestmenge beginnt. Für die Untergrenze des zweiten Teilintervalls gilt damit:

$$(27) \quad x_\delta^{\min} = \max \left\{ x_\delta^{(u)}, x_{\delta R} \right\}.$$

Jede Anpassungsmaßnahme erlaubt nur eine begrenzte Erweiterung der Kapazität. Das zweite Teilintervall wird deshalb entweder durch die Maximalkapazität, d.h. die Kapazität, die über die kapazitätsorientierte Anpassungsmaßnahme höchstens erreichbar ist, oder die Auftragshöchstmenge nach oben begrenzt:

$$(28) \quad x_\delta^{\max} = \min \left\{ x_\delta^{(o)}, \frac{b_{\max} - A}{a_\delta} \right\}$$

wobei  $x_\delta^{(u)}$  = Auftragsmindestmenge,  
 $x_\delta^{(o)}$  = Auftragshöchstmenge,  
 $b_{\max}$  = Maximalkapazität unter Berücksichtigung der kapazitätsorientierten Anpassungsmaßnahme.

Können verschiedene Anpassungsmaßnahmen ergriffen werden, müssen entsprechend mehrere Teilintervalle abgegrenzt werden. Im Folgenden wird unterstellt, dass nur eine Anpassungsmaßnahme zur Anpassung der Produktion an die Beschäftigungsschwankung ergriffen werden kann und

$$x_{\delta}^{(u)} < x_{\delta R} \text{ sowie}$$

$$x_{\delta}^{(o)} < x_{\delta}^{\max}$$

gilt. Damit ist das Intervall der für möglich gehaltenen Auftragsgrößen in die beiden folgenden Teilintervalle zu zerlegen:

$$\left[ x_{\delta}^{(u)}, x_{\delta R} \right] \text{ und } \left[ x_{\delta R}, x_{\delta}^{(o)} \right]$$

Verursachen die kapazitätsorientierten Anpassungsmaßnahmen einen **Anstieg der auftragsgrößenvariablen Kosten**, weist die Kostenfunktion des Zusatzauftrages folgende Struktur auf:

$$(29) \quad K = \begin{cases} k_{v\delta} \cdot x_{\delta} + K_{f\delta} & \text{für } x_{\delta}^{(u)} \leq x_{\delta} \leq x_{\delta R} \\ k_{v\delta} \cdot x_{\delta} + \Delta k_{v\delta} \cdot (x_{\delta} - x_{\delta R}) + K_{f\delta} & \text{für } x_{\delta R} < x_{\delta} \leq x_{\delta}^{(o)} \end{cases}$$

wobei  $\Delta k_{v\delta} =$  anpassungsbedingte Erhöhung der auftragsgrößenvariablen Stückkosten

Die Kostenfunktion verläuft damit in jedem Teilintervall linear, wobei die Steigung der Kostenfunktion im zweiten Teilintervall höher ist als im ersten (vgl. **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**), d.h. die Kostenfunktion weist einen Knick auf. Zur Bestimmung der Break-even-Menge ist in jedem Teilintervall eine Break-even-Rechnung durchzuführen, sodass sich mehrere Break-even-Punkte ergeben können. Liegt der berechnete Break-even-Punkt außerhalb des betrachteten Teilintervalls, ist er ungültig (vgl. Schweitzer/Troßmann 1998, S. 285 f.). Abb. 12 zeigt ein Beispiel zur Break-even-Analyse bei geknickter Kostenfunktion.

Wirken sich die Anpassungsmaßnahmen auf die **auftragsgrößenfixen Kosten** aus, hat die Kostenfunktion des Zusatzauftrages unter der Annahme, die Kapazität in einem einzigen Schritt erweitert wird, das in Abb. 13 dargestellte Aussehen und weist die folgende Struktur auf:

$$(30) \quad K = \begin{cases} k_{v\delta} \cdot x_{\delta} + K_{f\delta} & \text{für } x_{\delta}^{(u)} \leq x_{\delta} \leq x_{\delta R} \\ k_{v\delta} \cdot x_{\delta} + K_{f\delta} + \Delta K_{f\delta} & \text{für } x_{\delta R} < x_{\delta} \leq x_{\delta}^{(o)} \end{cases}$$

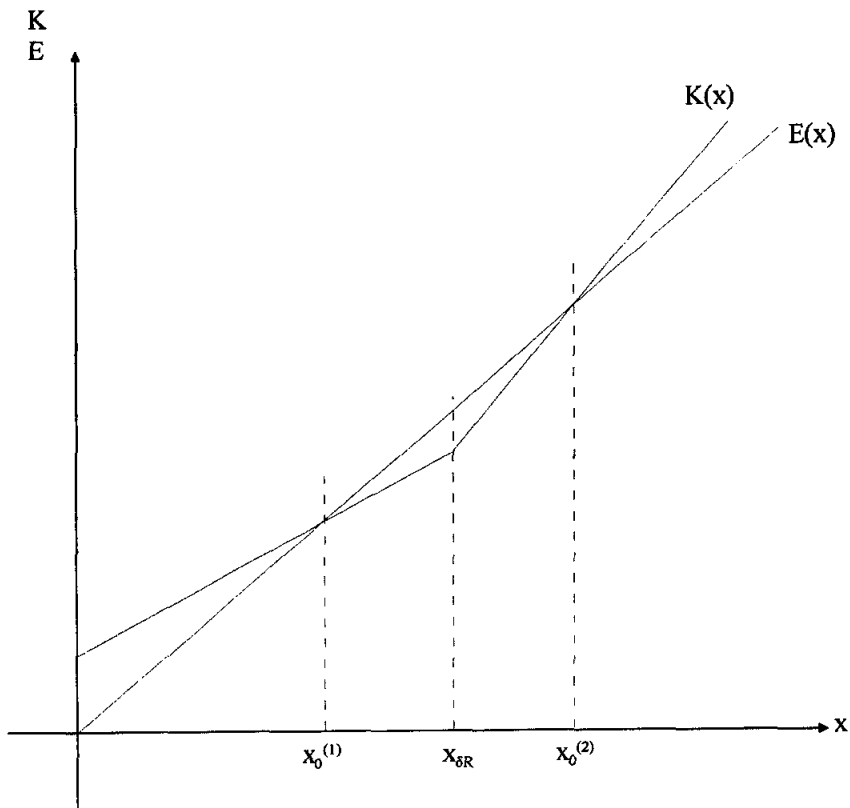


Abb. 11: Break-even-Analyse bei Anstieg der auftragsgrößenvariablen Kosten

Gegeben sei ein Zusatzauftrag mit folgender Kostenfunktion

$$K(x_{\delta}) = \begin{cases} 60x_{\delta} + 4.620 & \text{für } 50 \leq x_{\delta} \leq 200 \\ (60 + 5,50)x_{\delta} + 3.520 & \text{für } 200 < x_{\delta} \leq 300 \end{cases}$$

und einem Stückpreis von 82,00 € .

- Für  $50 \leq x_{\delta} \leq 200$

$$\begin{aligned} (82 - 60) \cdot x_{\delta} &= 4.620 \\ x_{\delta} &= 210 \end{aligned}$$

Die berechnete Menge liegt außerhalb des Teilintervalls und ist damit ungültig.

- Für  $200 < x_{\delta} \leq 300$

$$\begin{aligned} (82 - 65,5) \cdot x_{\delta} &= 3.520 \\ x_{\delta} &= 213,33 \end{aligned}$$

Die berechnete Menge liegt im betrachteten Teilintervall und ist damit die Break-even-Menge.

Abb. 12: Break-even-Analyse bei geknickter Kostenfunktion

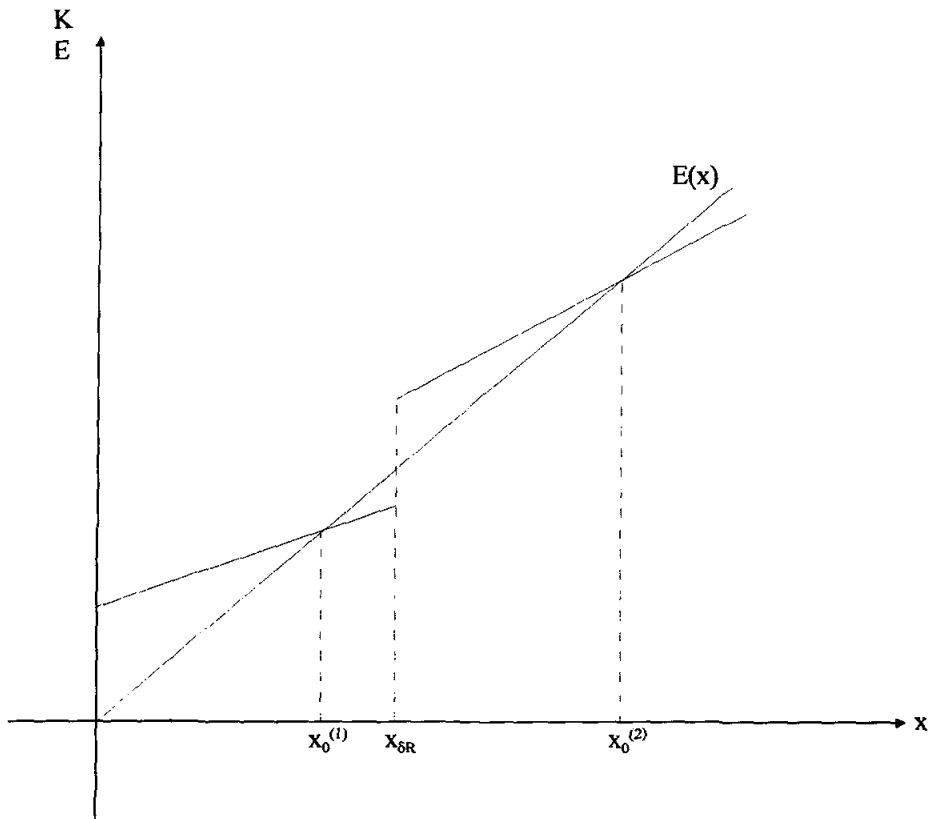


Abb. 13: Break-even-Analyse bei Anstieg der auftragsgrößenfixen Kosten

Wird **intensitätsmäßig angepasst**, steigen auch für die noch zu realisierenden Mengen des geplanten Periodenprogramms die variablen Stückkosten. Da bei dieser Anpassungsform nicht mehr von konstanten auftragsgrößenvariablen Stückkosten ausgegangen werden kann, weist die Kostenfunktion im zweiten Teilintervall einen nichtlinearen Verlauf auf. Unter der Annahme, dass das gesamte Periodenprogramm bei erhöhter Intensität gefertigt wird, ergibt sich die folgende Kostenfunktion:

$$(31) \quad K = \begin{cases} k_{v\delta}(\tau_1) \cdot a(\tau_1) \cdot x_\delta + K_{f\delta} & \text{für } x_\delta^{(u)} \leq x_\delta \leq x_{\delta R} \\ k_{v\delta}(\tau_1) \cdot a_\delta(\tau_1) \cdot x_\delta + k_{v\delta}(\tau) \cdot a_\delta(\tau) \cdot (x_\delta - x_{\delta R}) + \sum_{j=1}^J (k_{vj}(\tau) \cdot a_j(\tau) - k_{vj}(\tau_1) \cdot a_j(\tau_1)) \cdot x_j^p + K_{f\delta} & \text{für } x_{\delta R} < x_\delta \leq x_\delta^{(o)} \end{cases}$$

wobei  $\tau_1$  = konstante Intensität vor der intensitätsmäßigen Anpassung.

Die Intensität ist definiert als Quotient aus der Anzahl gleich bleibender Produktionsbeiträge und der hierfür verbrauchten Arbeitszeit (vgl. Kilger 1993, S. 143). Bei Einproduktfertigung können zur Messung der Produktionsbeiträge Produktionsmengen herangezogen werden, bei Mehrproduktfertigung ist zur Messung der Produktionsbeiträge auf technische Größen überzugehen, die als Arbeitseinheiten bezeichnet werden. Bei einer Arbeitseinheit handelt es sich z.B. um einen Arbeitsgang, der sich identisch wiederholt. Die Zahl der Arbeitseinheiten  $B$  in der Periode wird als von den in dieser Periode erbrachten Produktionsmengen abhängig betrachtet (vgl. Schweizer/Küpper 1997, S. 111):

$$B = \beta_\delta \cdot x_\delta + \sum_{j=1}^J \beta_j \cdot x_j$$

Für die Intensität  $\tau$  gilt damit bei einer Produktionsdauer von  $t$ :



$$\tau = \frac{\beta_{\delta} \cdot x_{\delta} + \sum_{j=1}^J \beta_j \cdot x_j}{t}$$

Da die Mengen der Produkte im Periodenprogramm bei intensitätsmäßiger Anpassung unveränderlich festliegen, sind die Kosten des Zusatzauftrages auch bei intensitätsmäßiger Anpassung ausschließlich von der Auftragsgröße abhängig, d.h. es gilt

$$(34) \quad \tau = \beta_{\delta}^* \cdot x_{\delta} + c \quad \text{mit} \quad \beta_{\delta}^* = \frac{\beta}{t} \quad \text{und} \quad c = \frac{\sum_{j=1}^J \beta_j \cdot x_j}{t}$$

Wird diese Bestimmungsgleichung in die Kostenfunktion eingesetzt, werden die Kosten des Zusatzauftrages in Abhängigkeit der Auftragsgröße abgebildet.

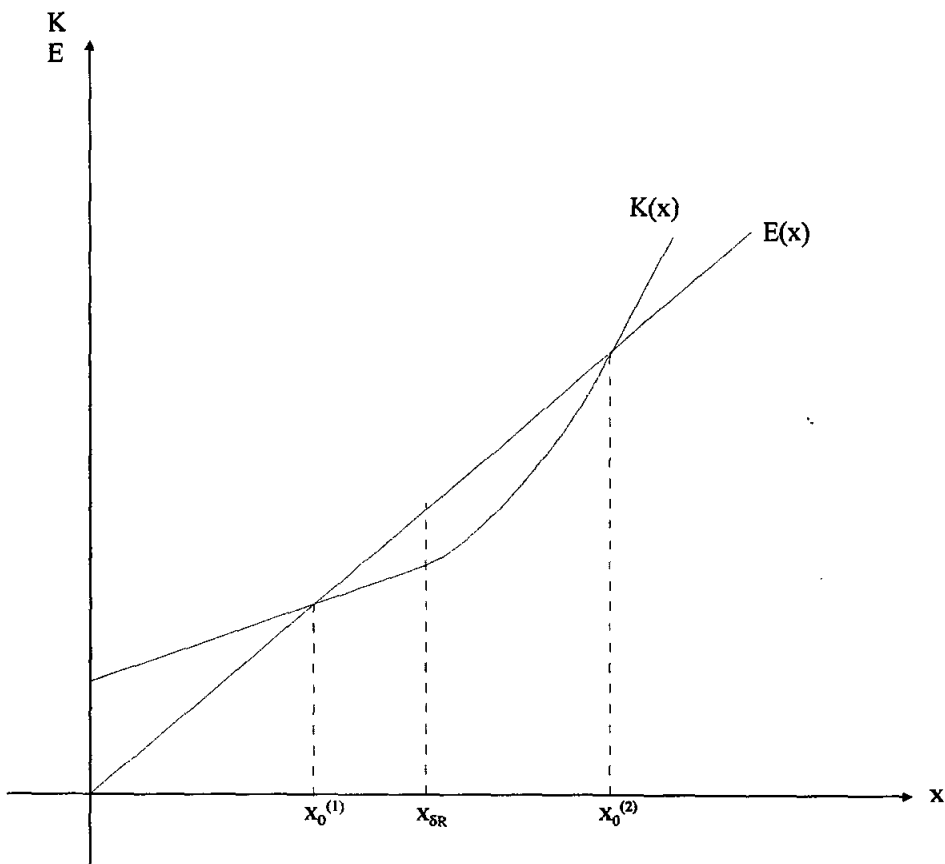


Abb. 14: Break-even-Analyse bei intensitätsmäßiger Anpassung

Bei **mehrstufiger** Produktion weisen die verschiedenen Produktionsstufen unterschiedliche Restkapazitäten auf. Durch die Abgrenzung weiterer Teilintervalle, die durch die Restkapazitäten der Produktionsstufen determiniert werden, und eine kostenstellenbezogene Aufgliederung der Kostenfunktion (vgl. hierzu die Bestimmungsgleichungen für die Preisgrenzen) ist es möglich, die Break-even-Analyse auch bei diesem Produktionstyp zur Unterstützung von Entscheidungen über Zusatzaufträge heranzuziehen.

## 2. Break-even-Analyse bei programmorientierter Anpassung

### a) Struktur der Kostenfunktion

Durch Maßnahmen der programmorientierten Anpassung werden Deckungsbeiträge verdrängt, die mit dem geplanten Periodenprogramm hätten erzielt werden können. Diese verdrängten Deckungsbeiträge sind als Opportunitätskosten in die Break-even-Analyse einzubeziehen. Hierzu ist die Kostenfunktion um eine Teilfunktion zu erweitern, die die Opportunitätskosten bzw. die verdrängten Deckungsbeiträge in Abhängigkeit von der Auftragsgröße angibt. Die **Kostenfunktion** hat damit die folgende Struktur

$$(35) \quad K = \begin{cases} k_{v\delta} \cdot x_{\delta} + K_{f\delta} & \text{für } x_{\delta}^{(u)} \leq x_{\delta} \leq x_{\delta R} \\ k_{v\delta} \cdot x_{\delta} + K_{f\delta} + \Delta DB(x_{\delta}) & \text{für } x_{\delta R} < x_{\delta} \leq x_{\delta}^{(o)} \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Opportunitätskostenfunktion bei **einer wirksamen Mehrproduktrestriktion** sind die Produkte des Periodenprogramms, die den Engpass beanspruchen, nach ihren relativen Deckungsbeiträgen in eine Rangfolge zu bringen, sodass gilt

$$\frac{d_1}{a_{e1}} \leq \frac{d_2}{a_{e2}} \leq \dots \leq \frac{d_j}{a_{ej}}$$

wobei  $a_{ej}$  = Produktionskoeffizient des Produktes mit Rangnummer  $j$  im Engpass  $e$ .

Mit steigendem Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages wird zunächst das Produkt mit dem niedrigsten relativen Deckungsbeitrag, dann das Produkt mit dem nächst höheren relativen Deckungsbeitrag usw. aus dem Periodenprogramm verdrängt. Kann der Kapazitätsbedarf bis zur Auftragshöchstmenge durch die Verdrängung **eines Produktes** erreicht werden, lautet die Opportunitätskostenfunktion

$$\Delta DB(x_{\delta}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_{\delta}^{(u)} \leq x_{\delta} \leq x_{\delta R} \\ \frac{d_1}{a_{e1}} \cdot a_{e\delta} \cdot (x_{\delta} - x_{\delta R}) & \text{für } x_{\delta R} < x_{\delta} \leq x_{\delta}^{(o)} \end{cases}$$

Reicht die Verdrängung eines Produktes nicht aus, die für den Zusatzauftrag erforderliche Kapazität zu schaffen, muss das Produkt mit dem nächst höheren relativen Deckungsbeitrag verdrängt werden. Die Funktion der verdrängten Deckungsbeiträge ist über drei Teilintervalle zu formulieren, mit der realisierbaren Auftragsgröße, die nach Verdrängung des Produktes mit dem niedrigsten relativen Deckungsbeitrag realisiert werden kann, als Intervallgrenze (vgl. hierzu auch das Beispiel in Abb. 15):

$$(37) \quad \Delta DB(x_{\delta}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_{\delta}^{(u)} \leq x_{\delta} \leq x_{\delta R} \\ \frac{d_1}{a_{e1}} \cdot a_{e\delta} \cdot (x_{\delta} - x_{\delta R}) & \text{für } x_{\delta R} < x_{\delta} \leq x_{\delta 1} \\ \frac{d_1}{a_{e1}} \cdot a_{e\delta} \cdot (x_{\delta 1} - x_{\delta R}) + \frac{d_2}{a_{e2}} \cdot a_{e\delta} \cdot (x_{\delta} - x_{\delta 1}) & \text{für } x_{\delta 1} < x_{\delta} \leq x_{\delta}^{(o)} \end{cases}$$

Müssen  $Z$  Produkte verdrängt werden, gilt

$$(38) \Delta DB(x_\delta) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_\delta^{(u)} \leq x_\delta \leq x_{\delta R} \\ \frac{d_1}{a_{e1}} \cdot a_{e\delta} \cdot (x_\delta - x_{\delta R}) & \text{für } x_{\delta R} < x_\delta \leq x_{\delta 1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{Z-1} \frac{d_j}{a_{ej}} \cdot a_{e\delta} \cdot (x_{\delta j} - x_{\delta R}) + \frac{d_z}{a_{ez}} \cdot a_{e\delta} \cdot (x_\delta - x_{x_{\delta Z-1}}) & \text{für } x_{\delta Z-1} < x_\delta \leq x_\delta^{(o)} \end{cases}$$

Alle Produktionsstufen ohne wirksame Mehrproduktrestriktion werden durch den Zusatzauftrag kapazitätsmäßig belastet und durch die Verdrängung von Produkten aus dem Periodenprogramm entlastet. Ist die Belastung durch den Zusatzauftrag größer als die Entlastung durch die Verdrängung von Produkten, können weitere Engpässe auftreten, sodass das beschriebene Verfahren nicht mehr anwendbar ist. Vor der Bestimmung der Opportunitätskostenfunktion ist deshalb zu prüfen, ob durch den Zusatzauftrag nicht weitere Mehrproduktrestriktionen wirksam werden. Eine Mehrproduktrestriktion  $i$  wird durch den Zusatzauftrag wirksam, wenn es Auftragsmengen gibt, für die folgende Kapazitätsbelastungsfunktion negativ wird:

$$(39) b_i(x_\delta) = \begin{cases} b_{iR} - a_{i\delta} \cdot x_\delta + \frac{a_{e\delta} \cdot x_\delta}{a_{e1}} \cdot a_{i1} & \text{für } x_\delta^{(u)} \leq x_\delta \leq x_{\delta 1} \\ \vdots \\ b_{iR} - a_{i\delta} \cdot x_\delta + \sum_{j=1}^{Z-1} a_{ij} \cdot x_j^p + \left( a_{e\delta} \cdot x_\delta - \sum_{j=1}^{Z-1} a_{ij} \cdot x_j^p \right) \cdot \frac{a_{iz}}{a_{ez}} & \text{für } x_{\delta 1} < x_\delta \leq x_\delta^{(o)} \end{cases}$$

Gegeben sei das optimale Periodenprogramm bei einer wirksamen Mehrproduktrestriktion aus Abb. 2. Es gehe der in Abb. 16 gekennzeichnete Zusatzauftrag ein. Da Produktionsstufe 1 ausgelastet ist, gilt  $x_{\delta R} = 0$ , d.h.  $x_\delta^{\min} = x_\delta^{(u)} = 50$ . Zur Realisation der Auftragshöchstmenge  $x_\delta^o = 250$  sind in der Produktionsstufe 1 Kapazitäten im Umfang von  $4 \cdot 250 = 1.000$  Fertigungsstunden zu schaffen, d.h., es müssen sowohl Produkt 2 als auch Produkt 1 aus dem Periodenprogramm eliminiert werden. Die Grenze der Teilintervalle liegt bei  $\frac{50 \cdot 6}{4} = 75$ . Die Kapazität der Produktionsstufe 2 entwickelt sich wie folgt:

$$b_R(x_\delta) = \begin{cases} 650 - 5x_\delta + \frac{4}{6} \cdot 3x_\delta & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 75 \\ 650 - 5x_\delta + 150 + \frac{4}{2} \cdot 7 \cdot (x_\delta - 75) & \text{für } 75 < x_\delta \leq 250 \\ = \begin{cases} 650 - 3x_\delta & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 75 \\ -250 - 9x_\delta & \text{für } 75 < x_\delta \leq 250 \end{cases} \end{cases}$$

Da die Kapazität der Produktionsstufe 2 im gesamten Auftragsintervall positiv ist, tritt kein weiterer Engpass auf. Die Opportunitätskostenfunktion lautet damit

$$DB(x_\delta) = \begin{cases} \frac{20}{6} \cdot 4 \cdot x_\delta & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 75 \\ 1.000 + \frac{10}{2} \cdot 4 \cdot (x_\delta - 75) & \text{für } 75 < x_\delta \leq 250 \end{cases}$$

Für die Kostenfunktion gilt

$$K(x_\delta) = \begin{cases} 73,33x_\delta + 1.470 & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 75 \\ 80x_\delta + 970 & \text{für } 75 < x_\delta \leq 250 \end{cases}$$

Die Break-even-Auftragsgröße ist damit

- für  $50 \leq x_\delta \leq 75$

$$(92 - 73,33) \cdot x_\delta - 1.470 = 0$$

$$x_\delta = 78,74 \rightarrow \text{unzulässige Lösung}$$

- für  $75 < x_\delta \leq 250$

$$(92 - 80) \cdot x_\delta - 970 = 0$$

$$x_\delta = 121,25 \rightarrow \text{Break-even-Auftragsgröße}$$

Abb. 15: Beispiel zur Break-even-Analyse bei einer wirksamen Mehrproduktrestriktion

Produktionskoeffizient der Produktionsstufe 1	4
Produktionskoeffizient der Produktionsstufe 2	5
Obergrenze der Auftragsgröße $x_\delta^{(o)}$	250
Untergrenze der Auftragsgröße $x_\delta^{(u)}$	50
Stückpreis	92,00 €
variable Stückkosten	60,00 €
auftragsgrößenfixe Kosten	1.470,00 €

Abb. 16: Daten zum Zusatzauftrag

Liegen **mehrere Engpässe** vor, fallen die Intervallgrenzen mit den basiskritischen Auftragsgrößen zusammen. Als inputbezogene Opportunitätskosten sind die Duale aus dem jeweiligen Endtableau heranzuziehen. Da anders als bei den Preisuntergrenzen nicht eine einzelne Auftragsgröße, sondern ein Intervall möglicher Auftragsgrößen betrachtet wird, in dem es zu mehreren Basiswechseln kommen kann, ist ein Verfahren erforderlich, mit dem die basiskritischen Auftragsgrößen innerhalb des betrachteten Intervalls sowie die für jedes Teilintervall geltenden Duale bestimmt werden können. Denkbar ist es, mittels Sensitivitätsanalyse die Intervallgrenzen zu ermitteln, für eine Auftragsgröße innerhalb des Intervalls das optimale Periodenprogramm zu bestimmen und über die Duale im Endtableau die Opportunitätskostenfunktion für das Teilintervall zu berechnen. Die Sensitivitätsanalyse ist jedoch nur dann anwendbar, wenn ein einziger Begrenzungsfaktor variiert wird. Durchläuft der Zusatzauftrag bei mehrstufiger Produktion mehrere Produktionsstufen, variieren gleichzeitig die Begrenzungskoeffizienten mehrerer Restriktionen. Zudem verlangt die hier betrachtete Problemstellung nicht nur die Identifikation des Teilintervalls der potentiellen

Auftragsgröße, in dem das ermittelte Periodenprogramm optimal ist, sondern die Ermittlung aller Basislösungen und die Teilintervalle der potentiellen Auftragsgrößen, in denen sie jeweils gültig sind. Zur Lösung von Problemen mit dieser Struktur ist die parametrische Optimierung entwickelt worden. Mit der parametrischen Optimierung werden für einen variierbaren Parameter in der Zielfunktion und/oder mehreren Restriktionen die Intervalle bestimmt, in denen die verschiedenen Basislösungen eines Planungsproblems optimal sind.

b) Ermittlung der Kostenfunktion

aa) Lösung des primalen Entscheidungsproblems

Bei gegebenen Produktionskoeffizienten kann der **Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages**  $\Delta b_{i\delta}$  in jeder Produktionsstufe als lineare Funktion der Auftragsgröße dargestellt werden:

$$(40) \quad \Delta b_{i\delta} = a_{i\delta} \cdot x_{\delta} \quad \text{für } i = 1, \dots, I.$$

Der von der Auftragsgröße abhängige Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages kann deshalb mit Hilfe eines einzelnen Parameters in den Begrenzungsvektor des linearen Planungsmodells zur Bestimmung des optimalen Periodenprogramms einbezogen werden. Die Einbeziehung des Kapazitätsbedarfs des Zusatzauftrages in das Modell zur Bestimmung des optimalen Periodenprogramms führt damit zu einem **linearen Planungsmodell mit einem Parameter im Begrenzungsvektor**. Eine ausführliche Darstellung der parametrischen Optimierung bei einem Parameter im Begrenzungsvektor findet sich bei Dinkelbach (vgl. 1969, S. 104 ff.).

$$(41) \quad \begin{aligned} Z &= \sum_{j=1}^J d_j \cdot x_j \rightarrow \text{Max!} \\ \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot x_j &\leq b_i - c_j \cdot \mu \quad \text{für } i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

wobei  $\mu$  = Parameter im Begrenzungsvektor (Planungsproblem: Auftragsgröße des Zusatzauftrages  $x_{\delta}$ ),

$c_j$  = Koeffizient des Parameters im Begrenzungsvektor (Planungsproblem: Produktionskoeffizient des Zusatzauftrages in Produktionsstufe  $i$   $a_{i\delta}$ ).

Für das Programmplanungsproblem aus Abb. 13 kann das lineare Planungsmodell für den in Abb. 16 beschriebenen Zusatzauftrag wie folgt formuliert werden:

$$Z = 10x_1 + 20x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 1.000 - 4\mu$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 1.700 - 5\mu$$

$$x_1 \leq 350$$

$$x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Mit dem Verfahren der **parametrischen Optimierung mit einem Parameter im Begrenzungsvektor** wird das Intervall der möglichen Auftragsgrößen

$$\left[ x_{\delta}^{(u)}, x_{\delta}^{(o)} \right]$$

in Teilintervalle zerlegt, in denen jeweils eine Basislösung des linearen Planungsmodells zur Bestimmung des optimalen Periodenprogramms zulässig ist. Die Duale der Nichtbasisvariablen in den zu einem Teilintervall gehörigen Simplextableau stellen die inputbezogenen Opportunitätskosten dar. Sie gelten über das gesamte Teilintervall und bringen zum Ausdruck, um welchen Betrag der Deckungsbeitrag des Periodenprogramms sinkt, wenn eine weitere Einheit einer Engpasseinheit zu Lasten des Periodenprogramms für die Realisation des Zusatzauftrages verwendet wird.

Für die parametrische Optimierung wird das Simplextableau um eine Spalte für die Parameter erweitert. Abb. 17 zeigt das Ausgangstableau für das beschriebene Planungsproblem.

Basis	d	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	b	μ
x <sub>3</sub>	0	2	6	1	0	0	0	1.000	-4
x <sub>4</sub>	0	7	3	0	1	0	0	1.700	-5
x <sub>5</sub>	0	1	0	0	0	1	0	350	0
x <sub>6</sub>	0	0	1	0	0	0	1	120	0
DB <sub>j</sub>		0	0	0	0	0	0	0	0
DB <sub>j</sub> - d <sub>j</sub>		-10	-20	0	0	0	0		

Abb. 17: Ausgangstableau für die parametrische Programmierung mit einem Parameter im Begrenzungsvektor

Da im Ausgangstableau alle Elemente der Koeffizientenmatrix  $A$  nicht negativ sind, ist die Basislösung für alle Parameterwerte zulässig, die zu nicht negativen Begrenzungskoeffizienten führen. Da für die Untergrenze des Parameterintervalls  $\mu^{(u)} = x_{\delta}^{(u)} = 50$  kein negativer Begrenzungskoeffizient auftritt,

$$1.000 - 4 \cdot 50 = 800 > 0$$

$$1.700 - 5 \cdot 50 = 1.450 > 0,$$

ist die Basis des Ausgangstableaus für die Auftragsmindestmenge zulässig. Für das lineare Planungsproblem ist im Folgenden unter Einbeziehung des Parameters  $\mu$  die optimale Lösung zu

bestimmen. Abb. 18 zeigt die Simplextableaus nach der ersten, der zweiten und der dritten Iteration. Da in der  $DB_j - d_j$ -Zeile alle Duale nicht negativ sind, handelt es sich bei dem Tableau nach der dritten Iteration um das Endtableau mit der optimalen Lösung.

1. Iteration

Basis	d	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b	$\mu$
$x_3$	0	2	0	1	0	0	-6	280	-4
$x_4$	0	7	0	0	1	0	-3	1.340	-5
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	350	0
$x_2$	20	0	1	0	0	0	1	120	0
$DB_j$		0	20	0	0	0	20	2.400	0
$DB_j - d_j$		-10	0	0	0	0	20		



2. Iteration

Basis	d	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b	$\mu$
$x_1$	10	1	0	0,5	0	0	-3	140	-2
$x_4$	0	0	0	-3,5	1	0	18	360	9
$x_5$	0	0	0	-0,5	0	1	3	210	2
$x_2$	20	0	1	0	0	0	1	120	0
$DB_j$		10	20	5	0	0	-10	3.800	-20
$DB_j - d_j$		0	0	5	0	0	-10		



Tableau 3 (3. Iteration)

Basis	d (Zielbeitrag)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b (Begrenzungskoeffizient)	$\mu$ (Parameter)
$x_1$	10	1	0	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{3}{18}$	0	0	200	-0,5
$x_6$	0	0	0	$-\frac{3,5}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	1	20	0,5
$x_5$	0	0	0	$\frac{1,5}{18}$	$-\frac{3}{18}$	1	0	150	0,5
$x_2$	20	0	1	$\frac{3,5}{18}$	$-\frac{1}{18}$	0	0	100	-0,5
$DB_j$		10	20	$\frac{55}{18}$	$\frac{10}{18}$	0	0	4.000	-15
$DB_j - d_j$		0	0	$\frac{55}{18}$	$\frac{10}{18}$	0	0		

Abb. 18: Bestimmung der ersten optimalen Lösung für das Beispiel zur parametrischen Optimierung mit einem Parameter im Begrenzungsvektor

Die gefundene Lösung ist für alle Parameterwerte im Intervall  $\left[ x_{\delta}^{(u)}, x_{\delta}^{(o)} \right]$  zulässig, für die folgende Ungleichung gilt:

$$(42) \quad b_i^{(1)} + c_i^{(1)} \cdot \mu \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, I,$$

wobei  $b_i^{(1)}$  = Begrenzungskoeffizient  $i$  im Endtableau,

$c_i^{(1)}$  = Koeffizient  $i$  des Parameters im Endtableau.

Enthält das Endtableau mindestens einen Koeffizienten  $c_i^{(1)} < 0$ , gibt es Parameterwerte, für die die gefundene Optimallösung nicht zulässig ist. Der kleinste Parameterwert, bei der die gefundene Optimallösung unzulässig wird, ist der **kritische Parameterwert**. Er wird wie folgt bestimmt:

$$(43) \quad \mu_1 = \min \left\{ \frac{-b_i^{(1)}}{c_i^{(1)}} \mid i = 1, \dots, I \text{ mit } c_i < 0 \right\}.$$

Für das Beispiel ergibt sich der folgende kritische Parameterwert:

$$\mu_1 = \min \left\{ \frac{-200}{-0,5}, \frac{-100}{-0,5} \right\} = \min \{ 400, 200 \} = 200.$$

Die gefundene Optimallösung ist damit für folgende Parameterwerte zulässig:

$$50 \leq \mu \leq 200.$$

Dabei ergibt sich die Untergrenze dieses Teilintervalls nicht als Ergebnis der parametrischen Optimierung, sondern ausschließlich aus der vorgegebenen Auftragsmindestmenge ( $x_{\delta}^{(u)} = 50$ ). Nach der Problemstellung sind Auftragsgrößen bis zu  $x_{\delta}^{(u)} = 250$  möglich. Es sind deshalb die optimalen Lösungen für Parameterwerte zu ermitteln, für die gilt  $\mu > 200$ . Für  $\mu > 200$  ist im Endtableau der Begrenzungskoeffizient der vierten Zeile ( $x_2$ ) negativ,

$$100 - 0,5\mu < 0,$$

d.h., die gefundene Optimallösung ist nicht zulässig, da eine Nichtnegativitätsbedingung verletzt ist. In einer weiteren Iteration ist die optimale Lösung für diese Parameterwerte zu bestimmen.

Enthält die Zeile  $i^*$ , die den kritischen Parameterwert bestimmt, keine negativen Koeffizienten in den Spalten der Nichtbasisvariablen, existiert für  $\mu > 200$  keine zulässige Lösung. Ansonsten kann für jeden negativen Koeffizienten der Zeile des kritischen Parameterwertes  $i^*$  in den Spalten der Nichtbasisvariablen eine weitere Basislösung bestimmt werden, in dem die Basisvariable  $x_{i^*}$  durch die zugehörige Nichtbasisvariable ersetzt wird. Im Beispiel gilt

$$i^* = 2 \text{ und } a_{24}^{(1)} < 0.$$

Es kann damit nur eine zulässige Basislösung ermittelt werden, indem  $x_2$  aus der Basis entfernt und  $x_4$  in die Basis aufgenommen wird. Abb. 19 zeigt das Simplextableau, das sich nach dieser Iteration ergibt. Da in der letzten Zeile alle Werte positiv sind, ist eine Optimallösung gefunden.



Tableau 4

Basis	d	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	b	μ
x <sub>1</sub>	10	1	3	0,5	0	0	0	500	-2
x <sub>6</sub>	0	0	1	0	0	0	1	120	0
x <sub>5</sub>	0	0	-3	-0,5	0	1	0	-150	2
x <sub>4</sub>	0	0	-18	-3,5	1	0	0	-1.800	9
DB <sub>j</sub>		10	30	5	0	0	0	5.000	-20
DB <sub>j</sub> - d <sub>j</sub>		0	10	5	0	0	0		

Abb. 19: Bestimmung der optimalen Lösung für μ > 200

Für die gefundene Optimallösung ist wieder der **kritische Parameterwert** zu bestimmen:

$$(44) \quad \mu_2 = \min \left\{ \frac{-b_i^{(2)}}{c_i^{(2)}} \mid i = 1, \dots, I \text{ mit } c_i < 0 \right\}$$

wobei  $b_i^{(2)}$  = Begrenzungskoeffizient i im Endtableau der zweiten optimalen Lösung,  
 $c_i^{(2)}$  = Koeffizient i des Parameters im Endtableau der zweiten optimalen Lösung.

Für das Beispiel gilt

$$\mu_2 = \min \left\{ \frac{-500}{-2} \right\} = 250,$$

d.h., die gefundene Optimallösung ist zulässig für

$$200 < \mu \leq 250.$$

Da die Auftragshöchstmenge bei 250 liegt, ist das Verfahren mit dieser zweiten Iteration beendet. Das Intervall der für möglich gehaltenen Auftragsgrößen [50, 250] ist damit in zwei Teilintervalle gespalten und das jeweils optimale Periodenprogramm ermittelt worden. Auch bei Auftragshöchstmengen über 250 wäre das Verfahren beendet, da die Zeile des kritischen Parameterwertes keine negativen Koeffizienten enthält und damit keine weitere Lösung gefunden werden kann.

Die **verdrängten Deckungsbeiträge einer Einheit des Zusatzauftrages** werden ermittelt, indem die inputbezogenen Opportunitätskosten mit den Produktionskoeffizienten des Zusatzauftrages multipliziert und anschließend addiert werden:

$$(45) \quad \Delta DB_\delta = \sum_{i=1}^I a_{i\delta} \cdot w_i$$

Für Auftragsgrößen im Intervall  $50 \leq \mu \leq 200$  betragen die inputbezogenen Opportunitätskosten für

– Produktionsstufe 1 (Schlupfvariable  $x_3$  im Simplextableau)  $w_1 = \frac{55}{18}$

- Produktionsstufe 2 (Schlupfvariable  $x_4$  im Simplextableau)  $w_2 = \frac{10}{18}$

(vgl. hierzu das Endtableau in Abb. 18). Die verdrängten Deckungsbeiträge pro zusätzlicher Einheit des Zusatzauftrages betragen damit

$$\Delta DB = 4 \cdot \frac{55}{18} + 5 \cdot \frac{10}{18} = 15 \text{ €}.$$

Im Intervall  $200 < x_\delta \leq 250$  verringert sich der Deckungsbeitrag pro zusätzlicher Einheit des Zusatzauftrages um

$$\Delta DB = 4 \cdot 5 = 20 \text{ €}.$$

Es ergibt sich damit die folgende **Funktion der verdrängten Deckungsbeiträge** (vgl. hierzu auch Bestimmungsgleichung 36):

$$\Delta DB(x_\delta) = \begin{cases} 15x_\delta & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 200 \\ 20x_\delta - 1.000 & \text{für } 200 < x_\delta \leq 250 \end{cases}$$

Der Deckungsbeitrag des Periodenprogramms beträgt 4.000,- € (vgl. Abb. 3). Für die Deckungsbeitragsfunktion, d.h. die Deckungsbeiträge des Periodenprogramms in Abhängigkeit der Größe des Zusatzauftrages ergibt sich damit:

$$DB(x_\delta) = \begin{cases} 4.000 - 15x_\delta & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 200 \\ 5.000 - 20x_\delta & \text{für } 200 < x_\delta \leq 250 \end{cases}$$

Abb. 21 zeigt die graphische Darstellung dieser Funktionen, Abb. 20 die Bestimmung der Break-even-Auftragsgröße für den Zusatzauftrag aus Abb. 16.

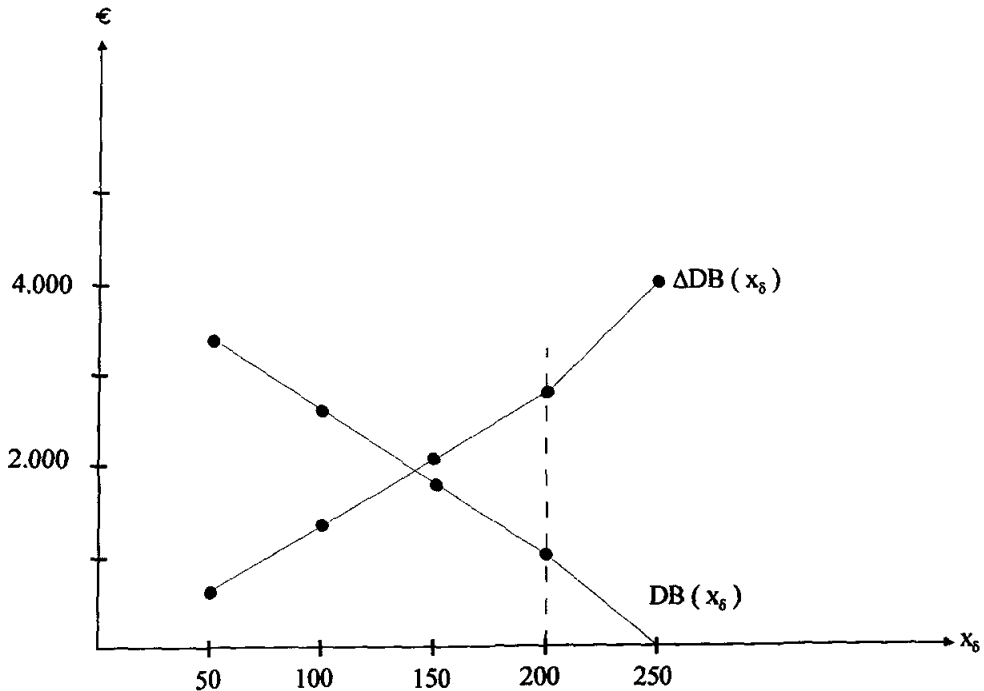


Abb. 20: Funktion der verdrängten Deckungsbeiträge

- Funktion der verdrängten Deckungsbeiträge in Abhängigkeit von der Auftragsgröße

$$\Delta DB(x_\delta) = \begin{cases} 15x_\delta & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 200 \\ 20x_\delta - 1.000 & \text{für } 200 < x_\delta \leq 250 \end{cases}$$

- Kostenfunktion

$$K(x_\delta) = \begin{cases} 75x_\delta + 1.470 & \text{für } 50 \leq x_\delta \leq 200 \\ 80x_\delta + 470 & \text{für } 200 < x_\delta \leq 250 \end{cases}$$

- Berechnung der Break-even-Menge bei einem Stückpreis des Produktes im Zusatzauftrag in Höhe von 82,00 €

- für  $50 \leq x_\delta \leq 200$

$$82x_\delta = 75x_\delta + 1.470$$

$$x_\delta = 210 \rightarrow \text{unzulässige Lösung}$$

- für  $200 < x_\delta \leq 250$

$$82x_\delta = 80x_\delta + 470$$

$$x_\delta = 235 \rightarrow \text{Break-even-Menge}$$

Abb. 21: Beispiel zur Break-even-Analyse bei mehreren wirksamen Mehrproduktrestriktionen

#### bb) Lösung des dualen Entscheidungsproblems

An Stelle des primalen Maximierungsproblems mit einem Parameter im Begrenzungsvektor kann auch das duale Minimierungsproblem mit einem Parameter in der Zielfunktion betrachtet werden (vgl. Dinkelbach 1969, S. 90). Das **duale Problem** weist für das betrachtete Beispiel die folgende Struktur auf:

$$Z = (1.000 - 4\mu)y_1 + (1.700 - 5\mu)y_2 + 350y_3 + 120y_4 \rightarrow \text{Min!}$$

$$2y_1 + 7y_2 + y_3 \geq 10$$

$$6y_1 + 3y_2 + y_4 \geq 20$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Zur Lösung des betrachteten dualen Problems mit einem Parameter in der Zielfunktion ist zunächst eine erste **zulässige Basislösung** zu ermitteln. Abb. 22 zeigt für das hier betrachtete Beispiel die Ermittlung einer ersten zulässigen Basislösung mit der **M-Methode** (zur M-Methode sowie zu einer Reduzierung der Zahl künstlicher Variablen vgl. z.B. Domschke/Drexl 1995, S. 27 ff.). Bei Anwendung der M-Methode ist das Ausgangsproblem wie folgt zu modifizieren und anschließend mit dem Simplex-Algorithmus zu lösen:

$$Z = (1.000 - 4\mu) \cdot y_1 + (1.700 - 5\mu) \cdot y_2 + 350 \cdot y_3 + 120 \cdot y_4 - M \cdot v_1 - M \cdot v_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$2y_1 + 7y_2 + y_3 - v_1 = 10$$

$$6y_1 + 3y_2 + y_4 - v_2 = 20$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, v_1, v_2 \geq 0$$

Basis	b	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$v_1$	$v_2$	w
$v_1$	-M	2	7	1	0	-1	0	1	0	10
$v_2$	-M	6	3	0	1	0	-1	0	1	20
DB <sub>1</sub> -b <sub>1</sub>		1.000 - 4 $\mu$	1.700 - 5 $\mu$	350	120	0	0	0	0	
M-Zeile		-8 M	-10 M	-M	-M	+M	+M	-M	-M	

Basis	b	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$v_1$	$v_2$	w
$y_2$	5 $\mu$ - 1.700	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	0		0	$\frac{10}{7}$
$v_2$	-M	$\frac{36}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	-1		1	$\frac{110}{7}$
DB <sub>1</sub> -b <sub>1</sub>		$\frac{1}{7}(3.600 - 18\mu)$	0	$\frac{1}{7}(5\mu + 750)$	120	$-\frac{1}{7}(5\mu - 1.700)$	0		-M	$-\frac{110}{7}M$
M-Zeile		$-\frac{36}{7}M$	0	$\frac{3}{7}M$	-M	$-\frac{3}{7}M$	+M		0	$\frac{10}{7}(5\mu - 1.700)$

Basis	b	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$v_1$	$v_2$	w
$y_2$	5 $\mu$ - 1.700	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$			$\frac{5}{9}$
$y_1$	4 $\mu$ - 1.000	1	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{7}{36}$			$\frac{55}{18}$
DB <sub>1</sub> -b <sub>1</sub>		0	0	$\frac{1}{6}(3\mu + 900)$	$\frac{1}{2}(\mu + 40)$	$\frac{1}{6}(1.200 - 3\mu)$	$\frac{1}{2}(200 - \mu)$			15 $\mu$ - 4.000
M-Zeile										

Abb. 22: Bestimmung einer zulässigen Basislösung

Basis	b	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$v_1$	$v_2$	w
$y_6$	0	0	18	3	-1	-3	1			10
$y_1$	$4\mu - 1.000$	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0			5
DB <sub>1</sub> -b <sub>1</sub>		0	$9\mu - 1.800$	$2\mu - 150$	120	$-\frac{1}{2}(1.000 - 4\mu)$	0			$20\mu - 5.000$
M-Zeile										

Abb. 23: Simplexverfahren für das Beispiel zur parametrischen Programmierung mit einem Parameter in der Zielfunktion

Sind die Duale der Nichtbasisvariablen im Tableau der ersten zulässigen Basislösung (Tableau 3 in Abb. 22) nicht negativ, ist die erste zulässige Basislösung auch eine Optimallösung. Im Folgenden sind die kritischen Parameterwerte zu bestimmen, d.h. die Parameterwerte, für die das Dual mindestens einer Nichtbasisvariablen negativ wird und die gefundene erste zulässige Basislösung damit die Optimalität verliert. Bestimmt werden die **kritischen Parameterwerte** für die optimale Lösung, indem ermittelt wird, für welche Parameterwerte die Duale der Nichtbasisvariablen negativ werden:

$$(46) \quad b_n^{(1)} - c_n^{(1)} \cdot \mu \leq 0.$$

Definiert sind die kritischen Parameterwerte wie folgt:

- Untergrenze

$$(47) \quad \underline{\mu}_1 = \max \left\{ -\frac{b_n^{(1)}}{c_n^{(1)}} \mid c_n^{(1)} > 0, n = 1, \dots, N \right\}$$

- Obergrenze

$$(48) \quad \bar{\mu}_1 = \min \left\{ -\frac{b_n^{(1)}}{c_n^{(1)}} \mid c_n^{(1)} < 0, n = 1, \dots, N \right\}$$

wobei  $c_n^{(1)}$  = Koeffizient n in der Ergebniszeile.

Für das Beispiel ergeben sich die folgenden kritischen Parameterwerte:

$$\underline{\mu}_1 = \max \left\{ -\frac{900}{3}, -\frac{40}{1} \right\} = \max \{ -300, -40 \} = -40$$

$$\bar{\mu}_1 = \min \left\{ -\frac{1.200}{-3}, -\frac{200}{-1} \right\} = \min \{ 400, 200 \} = 200$$

Da  $\bar{\mu}_1 = -40 \leq x_8^{(u)} = 50$ , ist der untere kritische Parameterwert außerhalb des Intervalls der für möglich gehaltenen Auftragsgrößen, sodass  $\mu = 50$  die Untergrenze des Parameterbereichs bildet. Für  $50 \leq \mu \leq 200$  ist die erste zulässige Basislösung die Optimallösung. Für  $\mu > 200$  wird das Dual der Nichtbasisvariable  $y_6$  negativ, d.h., die erste zulässige Basislösung verliert die Eigenschaft der Optimalität. In einer weiteren Iteration ist diese Nichtbasisvariable in die Basis zu übernehmen. Sie determiniert die Pivotspalte für die nächste Iteration. Da im Beispiel nur ein Koeffizient der Pivotspalte einen positiven Wert aufweist, bildet diese die Pivotzeile. Abb. 23 zeigt das Ergebnis dieser Iteration, für das wieder die kritischen Werte zu ermitteln sind:

$$\underline{\mu}_2 = \max \left\{ -\frac{1.800}{9}, -\frac{150}{2}, -\frac{1.000}{4} \right\} = \max \{ 200, 75, 250 \} = 250$$

Da  $\underline{\mu}_2 = 250 = x_8^{(o)}$ , d.h. die Auftragshöchstmenge erreicht ist, ist das Verfahren mit dieser Iteration beendet. Die verdrängten Deckungsbeiträge pro Einheit des Zusatzauftrages, d.h. die inputbezogenen Opportunitätskosten, ergeben sich anders als beim primalen Problem nicht aus der Zeile der Dualwerte, sondern aus der w-Spalte der Simplextableaus. Die Lösung stimmt mit der des primalen Problems überein.

## II. Entscheidungen über Mehrproduktaufträge

### 1. Ansätze der Break-even-Analyse bei Mehrproduktaufträgen

Den bisherigen Ausführungen lag die Annahme zugrunde, dass der Zusatzauftrag aus nur einem Produkt besteht. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sich ein Zusatzauftrag aus mehreren Produkten zusammensetzt. Nach der Art und dem Umfang der vorliegenden Informationen können drei **Arten von Entscheidungen über Mehrproduktaufträge** bei unvollkommener Information über den Zusatzauftrag unterschieden werden:

- Entscheidungen bei bekanntem Produktmix und unbekannter Auftragsgröße,
- Entscheidungen bei unbekanntem Produktmix und bekannter Auftragsgröße sowie
- Entscheidungen bei unbekanntem Produktmix und unbekannter Auftragsgröße.

Zur Unterstützung dieser Entscheidungen bieten sich die in der betriebswirtschaftlichen Literatur diskutierten **Ansätze der Break-even-Analyse bei Mehrproduktfertigung** an (vgl. Schweitzer/Troßmann 1998, S. 124 ff.). Sie sind für Entscheidungssituationen entwickelt worden, in denen keine Mehrproduktrestriktionen wirksam sind. Zu ihnen zählen:

- die eindimensionale Break-even-Analyse durch
  - die Überführung des Mehrproduktmodells in Einproduktmodelle durch die produktbezogene Spaltung der fixen Kosten oder
  - die Überführung des Mehrproduktmodells in ein Einproduktmodell durch die eindimensionale Messung der Mehrproduktausbringung über Indices
    - bei bekanntem Produktmix oder
    - bei unbekanntem Produktmix sowie
- die mehrdimensionale Break-even-Analyse.

Bei der eindimensionalen Break-even-Analyse durch die **produktbezogene Spaltung der fixen Kosten** werden nach der Zurechenbarkeit zunächst die produktfixen Kosten abgegrenzt, d.h. die fixen Kosten, die ausschließlich für ein Produkt anfallen. Anschließend werden die verbleibenden fixen Kosten in der Regel nach dem Tragfähigkeitsprinzip auf die Produkte verrechnet (vgl. Schweitzer/Troßmann 1998, S. 124 ff.). Auf dieser Grundlage kann für jedes Produkt isoliert eine Break-even-Menge bestimmt werden:

$$(49) \quad x_n = \frac{K_{fn} + \frac{d_n}{N} \cdot (K_f - \sum_{n=1}^N K_{fn})}{\sum_{n=1}^N d_n} \quad \text{für } n = 1, \dots, N$$

wobei  $K_{fn}$  = produktfixe Kosten des Produktes n im Zusatzauftrag,

$K_f$  = fixe Gesamtkosten des Zusatzauftrages.

Entscheidungsrechnungen nach dieser Methode sind allenfalls dann von Interesse, wenn über die Annahme bzw. Ablehnung der einzelnen Produkte im Zusatzauftrag getrennt entschieden werden kann und keine Entscheidung über den gesamten Zusatzauftrag als Ganzes notwendig ist. Da die Differenz aus fixen Gesamtkosten und produktfixen Kosten des Auftrages nicht verursachungsgerecht auf die Produkte verrechnet werden kann, können die ermittelten Ergebnisse der Break-even-Analyse Fehlentscheidungen auslösen.

Für die eindimensionale Messung der Mehrproduktausbringung können Output- oder Inputindices herangezogen werden, die über die Gewichtung der Ausbringungsmengen bzw. der Mengen ausgewählter Einsatzgüter bestimmt werden. Der Schwerpunkt der Betrachtung liegt auf der Verwendung des **Umsatzes als Outputindex**, d.h. der Berechnung des Break-even-Umsatzes. Die Berechnung des Break-even-Umsatzes eignet sich zur Unterstützung von Entscheidungen über Zusatzaufträge mit unbekannter Auftragsgröße bei **bekanntem Produktmix** (vgl. Ewert/Wagenhofer 2000, S. 234 f.). Bei bekanntem Produktmix liegen Informationen über das Verhältnis vor, in dem die Mengen der Produkte zueinander stehen, d.h. über die Faktoren  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  für die gilt:

$$(50) \quad x = \frac{x_1}{\lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda_2}, \dots, \frac{x_N}{\lambda_N}$$

wobei  $x$  = Menge des Leitproduktes.

Für die Break-even-Menge gilt damit:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N p_n \cdot x_n &= \sum_{n=1}^N k_{vn} \cdot x_n + K_f \\ x \sum_{n=1}^N p_n \cdot \lambda_n &= x \sum_{n=1}^N k_{vn} \cdot \lambda_n + K_f \\ (51) \quad x \cdot \bar{p} &= x \cdot \bar{k}_v + K_f \\ \bar{d} \cdot x &= K_f \\ x &= \frac{K_f}{\bar{d}} \end{aligned}$$

wobei  $\bar{p}$  = mit den Mengenanteilen der Produkte im Zusatzauftrag gewichteter Durchschnittspreis,

$\bar{k}_v$  = mit den Mengenanteilen der Produkte im Zusatzauftrag gewichtete variable Stückkosten,

$\bar{d}$  = mit den Mengenanteilen der Produkte im Zusatzauftrag gewichtete Stückdeckungsbeiträge.

Durch Multiplikation mit dem Durchschnittspreis  $\bar{p}$  kann die Bestimmungsgleichung für die Break-even-Menge in die Bestimmungsgleichung für den **Break-even-Umsatz**  $U_0$  überführt werden:

$$(52) \quad U_0 = x \cdot \bar{p} = \frac{K_f}{\frac{\bar{d}}{\bar{p}}}$$

Der Quotient aus durchschnittlichem Deckungsbeitrag und Durchschnittspreis wird als **durchschnittliche Deckungsbeitragsquote**  $\hat{d}$  bezeichnet, sodass sich folgende Bestimmungsgleichung für den Break-even-Umsatz ergibt:

$$(53) \quad U_0 = \frac{K_f}{\hat{d}}$$

Zur Fixkostendeckung führt der Break-even-Umsatz jedoch nur unter der Bedingung, dass sich die Auftragsmenge in dem unterstellten Mengenverhältnis auf die Produkte verteilt. Ist das



Produktmix bei der Entscheidung über den Zusatzauftrag unbekannt, führt der Break-even-Umsatz zu einer Unterdeckung (Überdeckung) der fixen Kosten, wenn der tatsächliche Anteil der Produkte mit hoher Deckungsbeitragsquote an der Gesamtmenge niedriger (höher) ist bzw. der tatsächliche Anteil der Produkte mit niedrigerer Deckungsbeitragsquote an der Gesamtmenge höher (niedriger) ist als bei dem angenommenen Produktmix. Für die **Break-even-Analyse bei unbekanntem Produktmix** wird deshalb vorgeschlagen, ein Intervall von Break-even-Umsätzen zu bestimmen, das durch die Umsätze begrenzt ist, die bei

- optimistischer und
- pessimistischer Auftragszusammensetzung

zur Fixkostendeckung führen. Die optimistische (pessimistische) Auftragszusammensetzung ist dadurch gekennzeichnet, dass die Produkte mit den höchsten (niedrigsten) Deckungsbeitragsquoten

$$(54) \hat{d}_n = \frac{d_n}{p_n} \text{ für } n = 1, \dots, N$$

mit ihren Höchstmengen geordnet werden. Berechnet werden die Intervallgrenzen, indem die Produkte entsprechend ihren Deckungsquoten in eine Reihenfolge gebracht werden. Für die Berechnung des Break-even-Umsatzes bei optimistischer (pessimistischer) Auftragszusammensetzung werden die Deckungsbeiträge der Produkte in der Reihenfolge abnehmender (zunehmender) Deckungsbeitragsquoten kumuliert, und zwar unter der Annahme, dass jeweils die Produkthöchstmenge bestellt wird, bis schließlich die fixen Kosten gedeckt sind. Der Umsatz, bei dem die Fixkostendeckung erreicht wird, ist der Break-even-Umsatz des jeweils betrachteten Falls (vgl. Schweitzer/Troßmann 1998, S. 141 ff.). Abb. 24 und Abb. 25 zeigen ein Beispiel zur Bestimmung des Break-even-Umsatz bei unbekanntem Produktmix.

Gegeben sei ein Zusatzauftrag mit den drei folgenden Produkten:

Produkt \ Merkmal	1	2	3
variable Stückkosten	9,00 €	10,00 €	12,50 €
Stückpreis	15,00 €	20,00 €	10,00 €
Stückdeckungsbeitrag	6,00 €	10,00 €	2,50 €
Produkthöchstmenge	280	250	350
Deckungsbeitragsquote	0,4	0,5	0,25
Rang	2	1	3
auftragsgrößenfixe Kosten	4.000,00 €		

- Bestimmung des Break-even-Umsatzes bei optimistischer Auftragszusammensetzung

Produkt	Deckungsbeitrag	kumulierter Deckungsbeitrag	Umsatz	kumulierter Umsatz
2	2.500 €	2.500 €	5.000 €	5.000 €
1	1.680 €	4.180 €	4.200 €	9.200 €

Wird Produkt 2 mit der Höchstmenge bestellt, kann mit diesem Produkt ein Deckungsbeitrag in Höhe von

2.500,- € erreicht werden. Zur Fixkostendeckung muss damit nur noch ein Deckungsbeitrag in Höhe von  $(4.000 - 2.500) 1.500,- €$  erzielt werden. Hierzu genügt, dass der Auftrag noch  $\frac{1.500}{6} = 250$  Einheiten von Produkt 1 umfasst, die mit einem Umsatz von 3.750,- € verbunden sind. Für den Break-even-Umsatz gilt damit:

$$BEU = 5.000 + \frac{4.000 - 2.500}{0,4} = 8.750,- €$$

- Bestimmung des Break-even-Umsatzes bei pessimistischer Auftragszusammensetzung

Produkt	Deckungsbeitrag	kumulierter Deckungsbeitrag	Umsatz	kumulierter Umsatz
3	875 €	875 €	3.500 €	3.500 €
1	1.680 €	2.555 €	4.200 €	7.700 €
2	2.500 €	5.055 €	5.000 €	12.700 €

$$\text{Break-even-Umsatz} = 7.700 + \frac{4.000 - 2.555}{0,5} = 10.590,- €$$

Abb. 24: Beispiel zur Bestimmung des Break-even-Umsatzes bei unbekanntem Produktmix

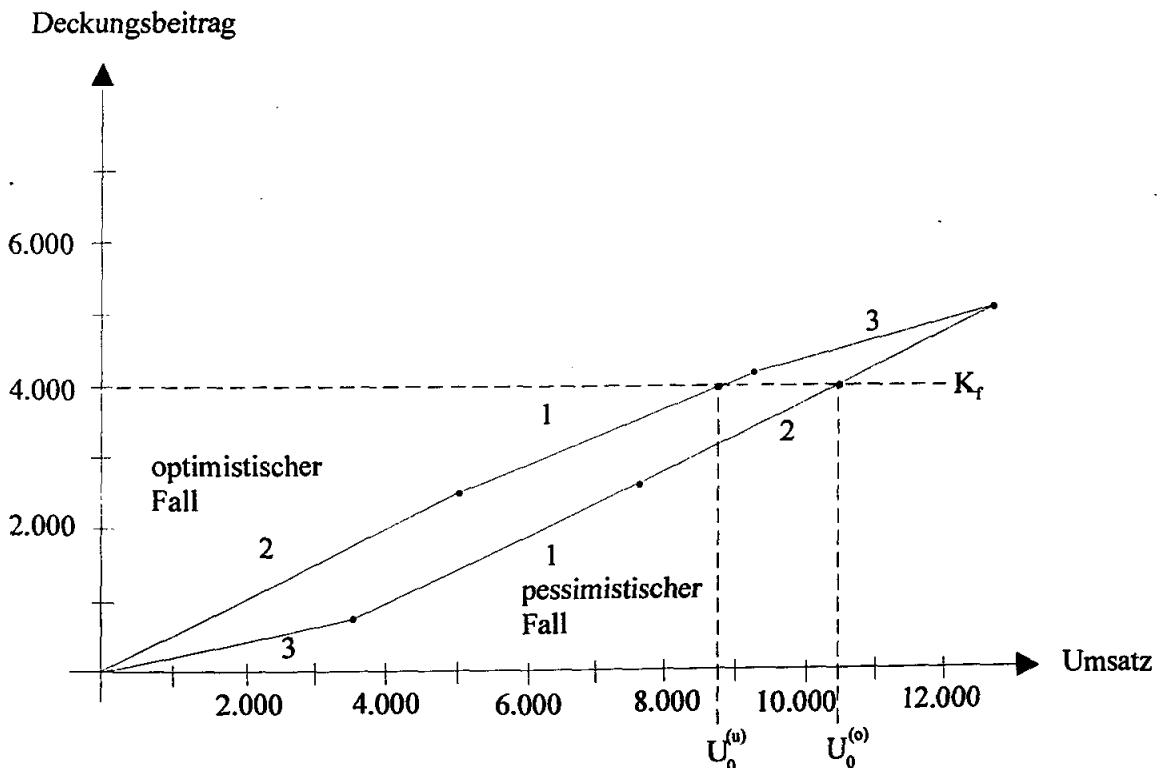


Abb. 25: Break-even-Diagramm zur Bestimmung des Break-even-Umsatzes bei unbekanntem Produktmix

Ziel der **mehrdimensionalen Break-even-Analyse** ist es, die Mengenkombinationen zu ermitteln, die zur Fixkostendeckung führen (vgl. Schweitzer/Troßmann 1998, S. 150 ff.). Für sie gilt:

$$(55) M = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{n=1}^N d_n \cdot x_n = K_f \right\}$$

Eine andere Vorgehensweise zur Herleitung der Mengenkombinationen, die zur Fixkostendeckung führen, ist die Bestimmung isolierter Break-even-Mengen. Es handelt sich hierbei um die Mengen der einzelnen Produkte, die jeweils zur Deckung der gesamten fixen Kosten führen, d.h.

$$(56) \quad \hat{x}_n = \frac{K_f}{d_n} \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

Die Mengenkombinationen, die zur Fixkostendeckung führen, können anschließend als Linearkombinationen der isolierten Break-even-Mengen dargestellt werden:

$$(57) \quad M = \left\{ (\lambda_1 \cdot \hat{x}_1, \lambda_2 \cdot \hat{x}_2, \dots, \lambda_n \cdot \hat{x}_n) \mid \lambda_n \geq 0 \text{ für } n = 1, \dots, N; \sum_{n=1}^N \lambda_n = 1 \right\}$$

Im folgenden Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit diese Ansätze zur Unterstützung von Entscheidungen über Mehrproduktaufträge zur Anwendung gelangen können, wenn mehrere Mehrproduktrestriktionen wirksam sind und die Produktion über programmorientierte Maßnahmen an die Beschäftigungszunahme angepasst werden soll.

## 2. Break-even-Analyse bei Mehrproduktaufträgen und programmorientierter Anpassung

### a) Entscheidungen bei unbekannter Auftragsgröße und bekanntem Produktmix

Entscheidungen über Zusatzaufträge bei **unbekannter Auftragsgröße und bekanntem Produktmix** liegen vor, wenn der Anteil jedes Produktes am Umfang des Auftrages bekannt ist, d.h., zwischen den Mengen der verschiedenen Produktarten eines Auftrages bekannte Relationen bestehen. Ein Beispiel für Entscheidungen dieser Art sind Aufträge in der Textilindustrie, bei denen von einer konstanten Verteilung der Auftragsmenge eines Modells auf die verschiedenen Konfektionsgrößen ausgegangen werden kann (vgl. Schweitzer/Troßmann 1998, S. 135). Es gilt damit

$$(58) \quad x = \frac{1}{\lambda_1} \cdot x_1 = \frac{1}{\lambda_2} \cdot x_2 = \dots = \frac{1}{\lambda_N} \quad \text{mit } \lambda_n \geq 0; \quad \sum_{n=1}^N \lambda_n = 1$$

Für  $x_\delta$  als Größe des Gesamtauftrages ergibt sich damit als Bestimmungsgleichung für die Break-even-Mengen

$$(59) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^N p_n \cdot x_n &= \sum_{n=1}^N k_{vn} \cdot x_n + K_{f\delta} \\ \sum_{n=1}^N p_n \cdot \lambda_n \cdot x &= \sum_{n=1}^N k_{vn} \cdot \lambda_n \cdot x + K_{f\delta} \\ \bar{p} \cdot x &= \bar{k}_{v\delta} \cdot x_\delta + K_{f\delta} \\ x &= \frac{K_{f\delta}}{p - k_v} = \frac{K_{f\delta}}{d} \end{aligned}$$

Treten in der Produktion **Engpässe** auf, kann bei bekannter Auftragsgröße der Kapazitätsbedarf des Mehrproduktauftrages in Produktionsstufe  $i$  auf der Grundlage der mit den Men-

genanteilen der Produktarten am Gesamtauftrag gewichteten Produktionskoeffizienten bestimmt werden:

$$(60) \quad \sum_{n=1}^N a_{in} \cdot \lambda_n \cdot x_{\delta} = \bar{a} \cdot x_{\delta} \quad \text{für } i = 1, \dots, I.$$

Bei bekanntem Produktmix kann die Break-even-Analyse bei Mehrproduktaufträgen vollständig in eine Break-even-Analyse bei Einproduktaufträgen überführt werden. Zur Bestimmung der Break-even-Auftragsmengen können damit die in Abschnitt DI erörterten Ansätze zur Unterstützung von Entscheidungen über Einproduktaufträge herangezogen werden. Ist die Break-even-Auftragsgröße bekannt, können die Break-even-Mengen der Produkte wie folgt ermittelt werden:

$$(61) \quad \begin{pmatrix} x_{\delta 1} \\ \vdots \\ x_{\delta N} \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix}$$

b) Entscheidungen bei bekannter Auftragsgröße und unbekanntem Produktmix

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Auftragsgröße  $x_{\delta}$  festliegt, für die einzelnen Produkte aber nur die Grenzen eines Intervalls möglicher Produktmengen in der Form von Produkthöchst- bzw. Produktmindestmengen

$$\left[ x_{\delta n}^{(u)}, x_{\delta n}^{(o)} \right]$$

angegeben werden können. So kann z.B. die Menge der zu liefernden T-Shirts aus dem vorherigen Abschnitt bekannt sein, nicht jedoch die Aufteilung der Auftragsmenge auf die verschiedenen Formen und Farben. **Reicht die verfügbare Kapazität** in den Produktionsstufen zur Realisation des Zusatzauftrages aus, kann die Entscheidung über den Zusatzauftrag durch die Berechnung des Break-even-Umsatzes für den pessimistischen und den optimistischen Fall unterstützt werden.

Kann der Zusatzauftrag nur nach Schaffung von Kapazitäten durch **programmorientierte Anpassungsmaßnahmen** realisiert werden, müssen die durch die Anpassungsmaßnahmen verursachten Opportunitätskosten in die Break-even-Analyse einbezogen werden. Die Art der Einbeziehung der Opportunitätskosten hängt von der Homogenität der Produkte ab. Es können drei **Homogenitätsgrade** unterschieden werden:

- die Produkte beanspruchen die Kapazitäten in jeder Produktionsstufe im gleichen Umfang, d.h., es gilt

$$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{iN} \quad \text{für } i = 1, \dots, I,$$

- die Produkte beanspruchen nur in einer einzigen Produktionsstufe die Kapazitäten in unterschiedlichem Umfang, d.h.  $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{iN}$  für  $i = 1, \dots, h-1, h+1, \dots, I$  und für mindestens zwei Produkte  $l$  und  $m$  gilt

$$a_{hl} \neq a_{hm},$$

- die Produkte beanspruchen die Kapazitäten in mehreren Produktionsstufen in unterschiedlichem Umfang.

Sind die Produkte über alle Produktionsstufen  $i$  hinweg in der **Kapazitätsbeanspruchung** **identisch**, ist der Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages vom Produktmix unabhängig:

$$(62) \quad b_{i\delta} = \sum_{n=1}^N a_{in} \cdot x_{\delta n} = a_i \sum_{n=1}^N x_{\delta n} = a_i \cdot x_{\delta}$$

Da zusätzlich die Auftragsgröße (annahmegemäß) bekannt ist, ist der Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages (insgesamt) bekannt und konstant. Für die Berechnung der Opportunitätskosten gelten damit die gleichen Bedingungen wie bei einem Einproduktauftrag bei vollkommener Information über den Auftrag, sodass die unter CI diskutierten Ansätze zur Anwendung gelangen können. Die konstante Auftragsgröße und die Unabhängigkeit vom Produktmix führt dazu, dass die Opportunitätskosten den Charakter von auftragsgrößenfixen Kosten haben und als Bestandteil des Deckungsblocks in die Berechnung der Erlösuntergrenze eingehen können.

Beanspruchen die verschiedenen Sorten die **Engpasskapazitäten nicht im gleichen Umfang**, kann der Fall auftreten, dass das optimistische Produktmix bei der bekannten Auftragsgröße einen höheren Kapazitätsbedarf aufweist, als das pessimistische, entsprechend höhere Opportunitätskosten verursacht und deshalb u.U. ungünstiger ist als das pessimistische Produktmix, d.h. zu einem Break-even-Umsatz führt, der über dem für das pessimistische Produktmix liegt. Das optimistische und das pessimistische Produktmix dürfen deshalb nicht mehr ausschließlich nach den Deckungsbeitragsquoten aus den auftragsgrößenproportionalen Kosten ermittelt werden. Vielmehr müssen in die Bestimmung der Deckungsbeitragsquoten für die Abgrenzung des optimistischen und des pessimistischen Produktmix die Opportunitätskosten einbezogen werden.

Die inputbezogenen Opportunitätskosten steigen mit zunehmender Auftragsgröße bei einem optimalen Periodenprogramm aus mehreren Produkten überproportional an, wenn zur Realisation des Zusatzauftrages mehrere Produkte eliminiert werden müssen. Die Opportunitätskosten eines Produktes im optimistischen bzw. pessimistischen Produktmix hängen damit nicht nur von seiner Höchstmenge ab, sondern auch davon, welche Produkte bereits im betrachteten Produktmix enthalten sind. Für den Entwurf eines Ansatzes zur Bestimmung des Break-even-Umsatzes eines Zusatzauftrages mit bekannter Auftragsgröße bei unbekanntem Produktmix sind damit zwei Probleme zu lösen:

- (1) Wie sind die Opportunitätskosten zu berechnen?
- (2) Wie sind die Opportunitätskosten in die Berechnung der Deckungsbeitragsquoten für die Abgrenzung des optimistischen und des pessimistischen Falles einzubeziehen?

### (1) Berechnung der Opportunitätskosten

Die Opportunitätskostenfunktion kann bei Vorliegen mehrerer wirksamer Mehrproduktrestriktionen wieder mit Hilfe der parametrischen Optimierung ermittelt werden. Im Unterschied zu den in Abschnitt DI2 behandelten Entscheidungsproblemen wird die Kapazitätsbelastung in den Produktionsstufen nicht durch die Größe des Zusatzauftrages determiniert, sondern durch die Auftragszusammensetzung, d.h.

$$(63) \quad \Delta b_{i\delta} = \sum_{n=1}^N a_{i\delta n} \cdot x_{\delta n} \quad \text{für } i = 1, \dots, I.$$

Als Parameter kann deshalb nicht die Auftragsgröße herangezogen werden, es ist vielmehr der Kapazitätsbedarf des Zusatzauftrages als Parameter zu wählen. Weicht die Kapazitätsbeanspruchung der verschiedenen Produkte **nur in einer Produktionsstufe h** voneinander ab, weist das lineare Modell zur Bestimmung des optimalen Periodenprogramms bei Berücksichtigung des Kapazitätsbedarfs des Zusatzauftrages die folgende Struktur auf:

$$Z = \sum_{j=1}^J d_j \cdot x_j \rightarrow \text{Max !}$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot x_j \leq b_{i\delta} \quad i = 1, \dots, h-1, h+1, \dots, I$$

$$(64) \quad \sum_{j=1}^J a_{hj} \cdot x_j \leq b_h - \mu \quad \text{mit} \quad \mu = \sum_{n=1}^N a_{h\delta n} \cdot x_{\delta n}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, J.$$

Es liegt damit ein Problem der isolierten Variation des Begrenzungskoeffizienten einer einzigen Mehrproduktrestriktion vor. Das Intervall der für möglich gehaltenen Parameterwerte kann mit der parametrischen Optimierung in Teilintervalle zerlegt werden, für die die inputbezogenen Opportunitätskosten jeweils andere Werte aufweisen. Das Intervall der als möglich betrachteten Werte des Parameters  $\mu$  ist wie folgt begrenzt:

$$\left[ \mu^{(u)}, \mu^{(o)} \right] = \left[ b_{h\delta}^{\min}, b_{h\delta}^{\max} \right]$$

Bei diesen Werten handelt es sich um

- die Höhe des Kapazitätsbedarfs in Produktionsstufe h beim kapazitätsminimalen Produktmix ( $b_{h\delta}^{\min}$ ) sowie
- die Höhe des Kapazitätsbedarfs in Produktionsstufe h beim kapazitätsmaximalen Produktmix ( $b_{h\delta}^{\max}$ ).

Ermittelt werden diese Werte, indem die Produkte des Zusatzauftrages entsprechend ihren Produktionskoeffizienten in Produktionsstufe h aufsteigend gereiht werden. Zur Ermittlung des kapazitätsminimalen (kapazitätsmaximalen) Produktmix des Zusatzauftrages werden zunächst die Produkte mit den Produkthöchstmengen in das Produktmix aufgenommen, die den niedrigsten (höchsten) Produktionskoeffizienten aufweisen, bis die gegebene Auftragsgröße erreicht ist.

Unterscheiden sich die Produktionskoeffizienten der Produkte in **mehreren Produktionsstufen**, hängt der Kapazitätsbedarf anders als im bisher betrachteten Fall nicht nur in einer, sondern in mehreren Produktionsstufen vom Produktmix ab. Da es zwischen dem Kapazitätsbedarf in den verschiedenen Produktionsstufen keine konstante Relation gibt, müssen mehrere Parameter eingeführt werden. Das lineare Planungsproblem, auf dessen Grundlage die Opportunitätskostenfunktion bestimmt wird, weist damit die folgende Struktur auf:

$$Z = \sum_{j=1}^J d_j \cdot x_j \rightarrow \text{Max!}$$

$$(65) \quad \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot x_j \leq b_i - \mu_i \quad \text{mit} \quad \mu_i = \sum_{n=1}^N a_{i\delta n} \cdot x_{\delta n} \quad \text{für } i = 1, \dots, I$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

Berechnet werden kann die Opportunitätskostenfunktion mit der parametrischen Optimierung bei mehreren Parametern im Begrenzungsvektor (vgl. Dinkelbach 1969, S. 146 ff.). Der beschriebene Lösungsansatz eignet sich auch für den Fall, dass das Produktmix und die Auftragsgröße unbekannt sind. Die bekannte Auftragsgröße muss hierzu lediglich durch die maximal mögliche Auftragsgröße ersetzt werden.

## (2) Abgrenzung des optimistischen und pessimistischen Produktmix

Zur Abgrenzung des optimistischen und des pessimistischen Produktmix sind für jedes Produkt im Zusatzauftrag und für jedes Teilintervall die Deckungsbeitragsquoten unter Berücksichtigung der jeweiligen Opportunitätskosten zu ermitteln. Anschließend sind die Produkte entsprechend dieser Deckungsbeitragsquoten in eine Reihenfolge zu bringen. Beim Aufbau dieser Reihenfolge ist zu berücksichtigen, dass die Produkte, die bereits in die Reihenfolge aufgenommen worden sind, einen bestimmten Kapazitätsbedarf aufweisen. Sobald dieser Kapazitätsbedarf die Obergrenze des ersten Teilintervalls erreicht hat, sind für die Auswahl des als nächstes einzureihenden Produktes die Deckungsbeitragsquoten heranzuziehen, die für das zweite Teilintervall ermittelt worden sind. Wird mit der Höchstmenge eines einzureihenden Produktes die Obergrenze eines Teilintervalls überschritten, wird es nur mit der Menge eingereiht, mit der die Obergrenze des Teilintervalls gerade erreicht wird. Die Restmenge des Produktes wird gemäß der Deckungsbeitragsquote für das nächst höhere Teilintervall eingeplant. Es kann damit der Fall auftreten, dass ein Produkt mit Teilen seiner Höchstmenge an verschiedenen Stellen der gebildeten Reihenfolge eingeordnet ist.

Zur Berechnung des Break-even-Umsatzes sind die kumulierten Umsätze und die kumulierten Deckungsbeiträge unter Berücksichtigung der Opportunitätskostenfunktion zu bestimmen und die um die Opportunitätskosten reduzierten Deckungsbeiträge den auftragsgrößenfixen Kosten gegenüberzustellen.

Abb. 26 zeigt ein Beispiel für die Berechnung des Break-even-Umsatzes bei Engpässen. Das zugehörige Break-even-Diagramm zeigt Abb. 27.

Es liege folgender Zusatzauftrag über 550 Einheiten vor, dessen Produktmix unbekannt ist. Die Produkte beanspruchen nur die Produktionsstufe h in unterschiedlichem Umfang.

Produkt \ Merkmal	1	2	3
Produktionskoeffizient in der Engpassstufe h	1,2 Std.	4,2 Std.	0,5 Std.
variable Stückkosten	9,00 €	10,00 €	12,50 €
Stückpreis	15,00 €	20,00 €	10,00 €
Stückdeckungsbeitrag	6,00 €	10,00 €	2,50 €
Produkthöchstmengen	280	250	350
auftragsgrößenfixe Kosten	2.500,-		

Die Kapazität sei durch das Periodenprogramm bereits vollkommen ausgelastet. Mit der parametrischen Optimierung wurden folgende inputbezogene Opportunitätskosten ermittelt:

$$w_h(\mu) = \begin{cases} 0,2 & 0 \leq \mu \leq 400 \\ 0,5 & 400 < \mu \leq 600 \\ 1,0 & 600 < \mu \leq 1.000 \\ 1,6 & 1.000 < \mu \leq 1.561 \end{cases}$$

• Berechnung der Deckungsbeitragsquoten

Produkt \ Teilintervall	1	2	3
$0 \leq \mu \leq 400$	$\frac{6 - 1,2 \cdot 0,2}{15} = 0,384$	$\frac{10 - 4,2 \cdot 0,2}{20} = 0,458$	$\frac{2,50 - 0,5 \cdot 0,2}{10} = 0,24$
$400 < \mu \leq 600$	$\frac{6 - 1,2 \cdot 0,5}{15} = 0,36$	$\frac{10 - 4,2 \cdot 0,5}{20} = 0,395$	$\frac{2,50 - 0,5 \cdot 0,5}{10} = 0,225$
$600 < \mu \leq 1.000$	$\frac{6 - 1,2 \cdot 1,0}{15} = 0,32$	$\frac{10 - 4,2 \cdot 1,0}{20} = 0,29$	$\frac{2,50 - 0,5 \cdot 1,0}{10} = 0,125$
$1.000 < \mu \leq 1.561$	$\frac{6 - 1,2 \cdot 1,6}{15} = 0,272$	$\frac{10 - 4,2 \cdot 1,6}{20} = 0,164$	$\frac{2,50 - 0,5 \cdot 1,6}{10} = 0,17$

• Definition des optimistischen Produktmix

Produkt	2	2	1	2	2	3
Menge	95	48	280	15	92	350
kumulierte Menge	95	143	423	438	530	880
Kapazitätsbedarf	400	200	336	64	386	175
kumulierter Kapazitätsbedarf	400	600	936	1.000	1.386	1.561
Teilintervall	$0 \leq \mu \leq 400$	$400 < \mu \leq 600$	$600 < \mu \leq 1.000$	$1.000 < \mu < 1.561$		



• Definition des pessimistischen Produktmix

Produkt	3	1	1	2	2	2
Menge	350	188	92	21	95	134
kumulierte Menge	350	538	630	651	746	880
Kapazitätsbedarf	175	225	110	90	400	561
kumulierter Kapazitätsbedarf	175	400	510	600	1.000	1.561
Teilintervall	$0 \leq \mu \leq 400$		$400 < \mu \leq 600$		$600 < \mu \leq 1.000$	$1.000 < \mu \leq 1.561$

- Berechnung des Break-even-Umsatzes für den optimistischen Fall

Produkt	Umsatz	kumulierter Umsatz	Kapazitätsbedarf	kumulierter Kapazitätsbedarf	Opportunitätskosten (OK)	Deckungsbeitrag (DB)	DB - OK	kumulierte Differenz zwischen DB und OK
2	1.900 €	1.900 €	400	400	80 €	950 €	870 €	870 €
2	960 €	2.860 €	200	600	100 €	480 €	380 €	1.250 €
1	4.200 €	7.060 €	336	936	336 €	1.680 €	1.344 €	2.594 €
2	300 €	7.360 €	64	1.000	64 €	150 €	86 €	2.680 €
2	1.840 €	9.200 €	386	1.386	618 €	920 €	302 €	2.982 €
3	3.500 €	12.700 €	175	1.561	280 €	875 €	595 €	3.577 €

Deckungsbeitragsquote des zuletzt eingeplanten Produktes: 0,32

$$\text{Break-even-Umsatz: } 2.860 + \frac{2.500 - 1.250}{0,32} = 6.766,25 \text{ €}$$

- Berechnung des Break-even-Umsatzes für den pessimistischen Fall

Produkt	Umsatz	kumulierter Umsatz	Kapazitätsbedarf	kumulierter Kapazitätsbedarf	Opportunitätskosten (OK)	Deckungsbeitrag (DB)	DB - OK	kumulierte Differenz zwischen DB und OK
3	3.500 €	3.500 €	175	175	35 €	875 €	840 €	840 €
1	2.820 €	6.320 €	225	400	45 €	1.128 €	1.083 €	1.923 €
1	1.380 €	7.700 €	110	510	55 €	552 €	497 €	2.420 €
2	420 €	8.120 €	90	600	45 €	210 €	165 €	2.585 €
2	1.900 €	10.020 €	400	1.000	400 €	950 €	550 €	3.135 €
2	2.680 €	12.700 €	561	1.561	898 €	1.340 €	442 €	3.577 €

Deckungsbeitragsquote des zuletzt eingeplanten Produktes: 0,395

$$\text{Break-even-Umsatz: } 7.700 + \frac{2.500 - 2.420}{0,395} = 7.902,53 \text{ €}$$

Erreicht wird der Break-even-Umsatz bei optimistischer Auftragszusammensetzung bei

$$x_2 = \frac{1900 + 960}{20} = 143,$$

bei pessimistischer Auftragszusammensetzung wird der Break-even-Umsatz bei

$$x_3 = 350 \text{ und } x_1 = \frac{2.820 + 1.380}{15} = 280.$$

Da die Auftragsgröße auf 550 Einheiten begrenzt ist, kann der Break-even-Umsatz zwar mit dem optimistischen, nicht jedoch mit dem pessimistischen Produktmix erreicht werden.

Abb. 26: Beispiel zur Berechnung des Break-even-Umsatzes für Mehrproduktaufträge bei Engpässen

## E. Schlussbemerkungen

Im vorliegenden Beitrag wurden Entscheidungsrechnungen zur Unterstützung von Entscheidungen über ein- und Mehrproduktaufträge bei Mehrproduktfertigung in verschiedenen Engpassituationen sowie unterschiedlichen Informationen über den Zusatzauftrag betrachtet. Abb. 28 gibt einen Überblick über die diskutierten Entscheidungsrechnungen. Für ihren Einsatz sind Informationen über die relevanten Kosten des Zusatzauftrages erforderlich, die als auftragsgrößenvariable Stückkosten bzw. auftragsgrößenfixe Kosten in die jeweilige Entscheidungsrechnung eingehen. **Relevante Kosten** sind definiert als

- in der Planungsperiode erwartete
- noch beeinflussbare
- alternativenspezifische Kosten.

Das erste Merkmal fordert, dass Informationen über Prognosekosten bereitgestellt werden. Nach dem zweiten Merkmal sind Kosten nur relevant, wenn sie noch beeinflussbar sind. Fallen Kosten zwar erst in der Zukunft an, ist über ihre Höhe aber bereits in der Vergangenheit entschieden worden, sind sie nicht relevant. **Alternativenspezifisch** sind Kosten, wenn sie ausschließlich für die betrachtete Alternative anfallen. Nicht alternativenspezifisch sind damit zugeschlüsselte Gemeinkosten. Damit wird deutlich, dass die Relevanz von Kosten für eine Entscheidung immer von der Situation abhängt, unter der die Entscheidung getroffen wird. Als Systeme der Kostenrechnung, die Informationen über relevante Kosten bereitstellen, werden

- die Grenzplankostenrechnung sowie
- die relative Einzelkostenrechnung

genannt. Die **Grenzplankostenrechnung** ist eine Teilkostenrechnung auf der Basis variabler Kosten. Aus zwei Gründen ist sie für die Unterstützung von Entscheidungsrechnungen nur begrenzt geeignet: (1) In der Grenzplankostenrechnung werden die Kosten des indirekten Leistungsbereichs (z.B. die Materialeinzelkosten) über indirekte Bezugsgrößen verrechnet, sodass die variablen Stückkosten auch Bestandteile umfassen, die nicht alternativenspezifisch sind. (2) Die Spaltung der Kosten in ihre fixen und variablen Bestandteile ist zeitabhängig. Mit zunehmendem Planungszeitraum sinkt der Anteil der fixen Kosten an den Gesamtkosten. Werden die Kosten für einen Planungszeitraum von einem Jahr gespalten und

bezieht sich die Entscheidung auf einen kürzeren Zeitraum (z.B. zwei Monate) enthalten die auftragsgrößenvariablen Stückkosten Bestandteile, die im Entscheidungszeitraum nicht beeinflussbar und damit auch nicht relevant sind. Die relative Einzelkostenrechnung überwindet diese Grenzen durch die Verrechnung der Kosten nach dem Identitätsprinzip und den Verzicht auf die Spaltung der Kosten in die fixen und variablen Bestandteile. An die Stelle der Kostenspaltung tritt die Trennung von Leistungs- und Bereitschaftskosten, die vom Planungszeitraum unabhängig ist (vgl. hierzu auch Friedl 2000, S. 36 ff., 67 ff.).

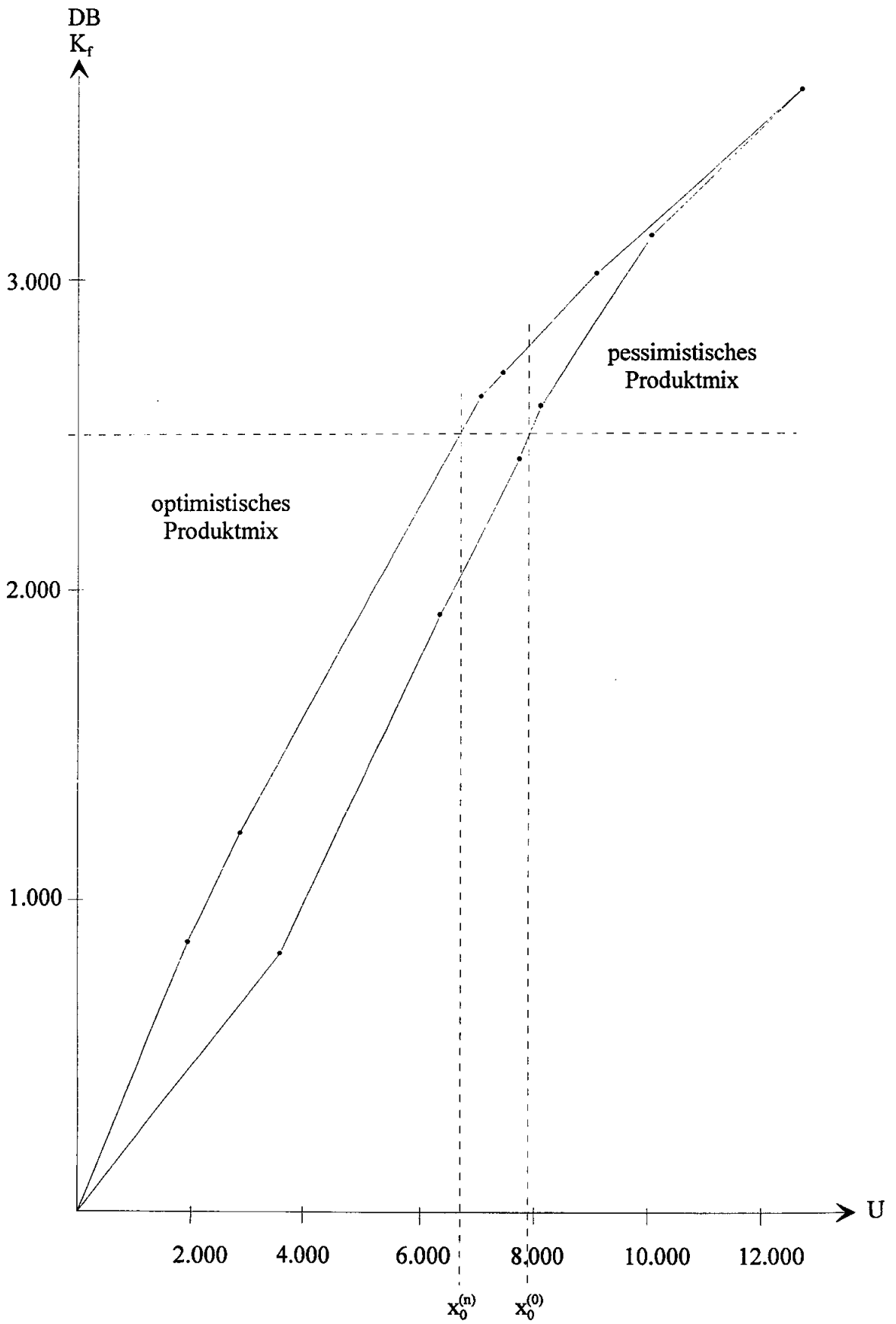


Abb. 27: Break-even-Diagramm für Mehrproduktaufträge bei Engpässen

Art des Auftrags	Informationsstand	Engpassituation	Verfahren der Entscheidungsrechnung	Ermittlung der Opportunitätskosten
Einproduktauftrag	vollständige Informationen	keine wirksame Mehrproduktrestriktion	Ermittlung der Preisgrenze ohne Berücksichtigung von Anpassungskosten	
		eine wirksame Mehrproduktrestriktion	Ermittlung der Preisgrenze mit Berücksichtigung von Anpassungskosten	relative Deckungsbeiträge (inputbezogene Opportunitätskosten)
		mehrere wirksame Mehrproduktrestriktionen	Ermittlung der Preisgrenze mit Berücksichtigung von Anpassungskosten	inputbezogene Opportunitätskosten, Sensitivitätsanalysen
	fehlende Informationen über die Absatzmenge	keine wirksame Mehrproduktrestriktion	Ermittlung der Break-even-Menge ohne Berücksichtigung von Anpassungskosten	
		wirksame Mehrproduktrestriktionen	Ermittlung der Break-even-Menge ohne Berücksichtigung von Anpassungskosten	parametrische Optimierung zur Bestimmung einer Opportunitätskostenfunktion
	Mehrproduktauftrag	vollständige Informationen	keine wirksame Mehrproduktrestriktion	Bestimmung von Erlösgrenzen ohne Berücksichtigung von Anpassungskosten
wirksame Mehrproduktrestriktionen			Bestimmung von Erlösgrenzen mit Berücksichtigung von Anpassungskosten	wie bei der Bestimmung von Preisgrenzen
unbekannte Auftragsgröße, bekanntes Produktmix		Rückführung auf den Fall des Einproduktauftrages		
unbekannte Auftragsgröße, unbekanntes Produktmix		keine wirksame Mehrproduktrestriktionen	Bestimmung des Break-even-Umsatzes für das optimistische und das pessimistische Produktmix ohne Einbeziehung von Opportunitätskosten	
		wirksame Mehrproduktrestriktionen	Bestimmung des Break-even-Umsatzes für das optimistische und das pessimistische Produktmix mit Einbeziehung von Opportunitätskosten	parametrische Optimierung zur Bestimmung einer Opportunitätskostenfunktion; Einbeziehung der Opportunitätskosten in die Ermittlung der Deckungsbeitragsquoten

Abb. 28: Überblick über die Entscheidungsrechnungen zur Unterstützung von Entscheidungen über einen Zusatzauftrag bei Mehrproduktfertigung

## Literatur

- Coenenberg, Adolf G.:* Unternehmensrechnung. München 1976.
- Coenenberg, Adolf G.:* Kostenrechnung und Kostenanalyse. 4. Aufl., Landsberg/L. 1999.
- Drury, Colin:* Management and Cost Accounting. 4. Aufl., London u.a. 1996.
- Corsten, Hans:* Produktionswirtschaft. Einführung in das industrielle Produktionsmanagement. 7. Aufl., München, Wien 1998.
- Dinkelbach, Werner:* Sensitivitätsanalyse und parametrische Optimierung. Berlin u.a. 1969.
- Domschke, Wolfgang und Andreas Drexl:* Einführung in Operations Research. 3. Aufl., Berlin u.a. 1995.
- Ewert, Ralf und Alfred Wagenhofer:* Interne Unternehmensrechnung. 4. Aufl., Berlin u.a. 2000.
- Gutenberg, Erich:* Grundlagen der Betriebswirtschaft. Band 1: Die Produktion. 23. Aufl., Berlin u.a. 1979.
- Friedl, Birgit:* Beitrag der Kostenrechnung zur Planung, Steuerung und Wirtschaftlichkeitskontrolle. Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 528. Kiel 2000.
- Hieke, Hans:* Teilkosten- und Deckungsbeitragsrechnung. Herne, Berlin 1998.
- Hoitsch, Hans-Jörg:* Kosten- und Erlösrechnung. Eine controllingorientierte Einführung. Berlin u.a. 1995.
- Horngren, Charles T., Gary L. Sundem und William O. Stratton:* Introduction to Management Accounting. 11. Aufl., Upper Saddle River (N.J.) 1999.
- Hummel, Siegfried:* Relevante Kosten. In: Handwörterbuch des Rechnungswesens. Hrsg. von Klaus Chmielewicz und Marcell Schweitzer. 3. Aufl., Stuttgart 1993, Sp. 1713-1717.
- Kern, Werner:* Die Messung industrieller Fertigungskapazitäten und ihre Ausnutzung. Grundlagen und Verfahren. Köln, Opladen 1962.
- Kilger, Wolfgang:* Flexible Plankosten- und Deckungsbeitragsrechnung. 10. Aufl., Wiesbaden 1993.
- Kilger, Wolfgang:* Einführung in die Kostenrechnung. 3. Aufl., Wiesbaden 1987.
- Kilger, Wolfgang:* Bestimmung von Preisuntergrenzen. In: Wirtschaftsstudium (11) 1982, S. 167-171 und 219-223.
- Kosiol, Erich:* Kostenrechnung und Kalkulation. Berlin 1969.
- Küpper, Hans-Ulrich:* Produktionstypen. In: Handwörterbuch der Produktionswirtschaft. Hrsg. von Werner Kern. Stuttgart 1979, Sp. 1636-1647.
- Münstermann, Hans:* Der Opportunitätskostenkalkulation als Entscheidungsmodell und seine Bedeutung für die Planungsrechnung. In: Betriebliche Planungs- und Kontrollrechnungen auf der Basis von Kosten und Leistungen. Hrsg. von Adolf G. Coenenberg. München 1976, S. 93-97.
- Poensgen, Otto H.:* Break-even-Analysis. In: Handwörterbuch des Rechnungswesens. Hrsg. von Erich Kosiol, Klaus Chmielewicz und Marcell Schweitzer. 2. Aufl., Stuttgart 1981, Sp. 303-313.
- Schäfer, Sven:* Die Planung kurzfristiger Preisuntergrenzen im Absatz- und Beschaffungsreich von Industrieunternehmen. In: Zeitschrift für Planung (7) 1996, S. 151-180.

- Schweitzer, Marcell* und *Hans-Ulrich Küpper*: Produktions- und Kostentheorie. Grundlagen, Anwendungen. 2. Aufl., Wiesbaden 1997.
- Schweitzer, Marcell* und *Hans-Ulrich Küpper*: Systeme der Kosten- und Erlösrechnung. 7. Aufl., München 1998.
- Schweitzer, Marcell* und *Ernst Troßmann*: Break-even-Analysen. Methodik und Einsatz. 2. Aufl., Berlin 1998.
- Troßmann, Ernst*: Flexible Plankostenrechnung nach Kilger. In: Handbuch Kostenrechnung. Hrsg. von Wolfgang Männel. Wiesbaden 1992, S. 226-246.
- Zäpfel, Günther*: Produktionswirtschaft. Operatives Produktionsmanagement. Berlin, New York 1982.