ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Chávez-Bedoya, Luis

Article

Metodología para comparar comisiones por flujo y saldo en fondos de pensiones

Estudios de Economía

Provided in Cooperation with:
Department of Economics, University of Chile

Suggested Citation: Chávez-Bedoya, Luis (2016) : Metodología para comparar comisiones por flujo y saldo en fondos de pensiones, Estudios de Economía, ISSN 0718-5286, Universidad de Chile, Departamento de Economía, Santiago de Chile, Vol. 43, Iss. 1, pp. 97-151

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/146739

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Metodología para comparar comisiones por flujo y saldo en fondos de pensiones

Methodology to compare front-end load and balance fees in pension funds

Luis Chávez-Bedoya*

Resumen

En el presente artículo se desarrolla una metodología en tiempo discreto para comparar esquemas de cobro de comisiones por saldo y flujo (sueldo) en la fase de acumulación de un fondo de pensiones bajo capitalización individual. Asimismo, mediante distintos métodos se estudia el efecto de incluir el riesgo y la densidad de cotización en el desempeño e idoneidad de los tipos de comisión antes mencionados. Finalmente, se realiza una aplicación práctica de la metodología en el Sistema Privado de Pensiones del Perú.

Palabras clave: *Fondos de pensiones; cuenta individual; comisión por flujo; comisión por saldo.*

Clasificación JEL: *G23*

Abstract

In the present article we develop a discrete-time methodology to compare front-end load and balance fees in the accumulation phase of a defined-contribution pension fund under the system of individual accounts. Additionally, using various methods, we study the effect of considering risk and density of contributions in the performance and suitability of the aforementioned types of fees. Finally, we perform a practical application of the methodology to the Peruvian Private Pension System.

Key words: *Pension funds; individual account; front-end load fee; balance fee.*

JEL Classification: *G23*

* Esan Graduate School of Business. Alonso de Molina 1652, Santiago de Surco, Lima, Perú. E-mail: lchavezbedoya@esan.edu.pe. El autor agradece al Editor y al revisor anónimo por los valiosos comentarios recibidos.

1. Introducción

Durante el último cuarto del siglo pasado muchos países latinoamericanos reformaron sus sistemas pensionarios, migrando total o parcialmente de sistemas públicos de reparto a sistemas privados con cuentas individuales de capitalización (CIC). Los sistemas de reparto antes mencionados generaron importantes déficit fiscales, esto debido a que en su momento no se realizaron los ajustes necesarios para garantizar su viabilidad, sostenibilidad y solvencia. Asimismo, malas políticas económicas redujeron el crecimiento de los países, lo que coadyuvó a la crisis de los sistemas públicos. Fue en este contexto que se introdujeron cambios paramétricos a dichos sistemas (incremento de la edad de jubilación y las contribuciones, límites a la jubilación anticipada y racionalización de beneficios), y se llevaron a cabo reformas estructurales basadas en la introducción de nuevos sistemas pensionarios basados en CIC.[1] Según Banco Mundial (1994) y Escrivá *et al.* (2010), mediante estos nuevos sistemas se buscaba adaptarse a los nuevos riesgos y retos que imponían a los países la vulnerabilidad de las finanzas públicas, los cambios en las tasas de natalidad, la mayor longevidad de la población, los problemas de eficiencia en la administración pública y el mayor desarrollo potencial de los mercados financieros.

Mesa-Lago (2004) menciona que los beneficios más notorios de las reformas estructurales realizadas han sido[2] (entre otras): un mayor alineamiento entre las contribuciones y el monto de la pensión, el reconocimiento de las cotizaciones aportadas al sistema público, la determinación de una pensión mínima en varios países, la eliminación del monopolio del sistema público, la homologación en las normas para determinar el cálculo de las pensiones, la introducción de la competencia entre Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP), la rápida tramitación de pensiones, la posibilidad de la elección de un fondo según perfiles de riesgo, y la creación de organismos técnicos regulatorios. Sin embargo, actualmente se sugiere llevar a cabo una nueva serie de reformas cuyos retos fundamentales, considerados en Kritzer *et al.* (2011) y Escrivá *et al.* (2010), son: aumentar la cobertura y competencia de los sistemas previsionales, reducir sus costos de administración, lograr el cumplimiento del pago de cotizaciones, desarrollar el mercado de capitales, mejorar la diversificación de la cartera administrada, y promover la equidad de género y la solidaridad. En razón a los retos antes mencionados, el presente artículo estudia algunos aspectos importantes relacionados con la comparación y análisis de diferentes tipos de comisiones de administración.

Dos características importantes de un sistema pensionario con CIC son el hecho que el afiliado asume el riesgo derivado por la fluctuación del valor de

---

1 El caso más documentado es Chile. El lector puede encontrar los aspectos principales de tal reforma en Arrau *et al*. (1993), Diamond y Valdés-Prieto (1994), Edwards (1998), Arenas de Mesa y Mesa-Lago (2006). En el caso del Perú, un análisis completo de la reforma del sistema de pensiones y su estado actual se expone en Marthans y Stok (2013). Queisser (1998), Sinha (2000), Kay y Kritzer (2001), Mesa-Lago (2006) y Kritzer *et al*. (2011) son buenas referencias para el estudio de la reforma, situación y perspectiva de los sistemas pensionarios de América Latina.

2 Es importante mencionar que estos beneficios se han logrado en mayor o menor grado en ciertos países, para mayor detalle se guía al lector a la referencia.

los activos administrados, y que además los cargos administrativos (comisiones) cobrados por las AFP tienen un impacto importante en el balance final de las CIC.[3] Más aún, como se menciona en James *et al*. (2001), Whitehouse (2001) y Mitchell (1998), una de las principales críticas a los sistemas con CIC es su elevado costo, pues este hecho no incentiva la participación, daña la imagen del sistema en su conjunto, reduce futuras pensiones e incrementa los costos futuros para el gobierno de existir una pensión mínima garantizada. De acuerdo con Kritzer *et al.* (2011), los cargos administrativos más comunes en sistemas de pensiones con CIC son: proporcionales por flujo (expresados como un porcentaje del salario o contribución), fijos por flujo, proporcionales por saldo y proporcionales sobre rendimientos en exceso.[4] El presente artículo analiza únicamente las comisiones proporcionales por flujo y saldo, las que son los tipos más comunes e importantes en Latinoamérica. Para Queisser (1998) la comisión por flujo es más ventajosa para las AFP en la fase inicial del sistema, y a pesar que la comisión por saldo alinea los objetivos de las AFP en términos de incrementar la rentabilidad del fondo, esta tiende a ser más cara en el largo plazo debido a que las CIC se incrementan en valor. Además, Shah (1997) afirma que la comisión por flujo genera distorsiones y tendencias indeseables como promover altos costos de instalación de las AFP, desalentar la competencia del sistema y generar pérdidas para los afiliados de mayor edad.

La forma tradicional de comparar comisiones por saldo y flujo es por medio de los valores esperados de las CIC (bajo ambos esquemas de cobro) al final del periodo de acumulación. Para desarrollar tal comparación se necesitan algunos supuestos acerca de la rentabilidad del fondo y la estructura futura de los aportes del afiliado. Tal enfoque se utiliza en Shah (1997), Diamond (2000), Blake y Board (2000), Whitehouse (2001), Devesa-Carpio (2003) y Gómez-Hernández y Stewart (2008), y este también es el método estándar para determinar comisiones de equivalencia. Es en esta línea que la principal contribución del artículo se encuentra en desarrollar métodos alternativos para comparar dichas comisiones, y analizar su sensibilidad ante cambios en ciertos parámetros importantes, en especial la aversión al riesgo del afiliado, la densidad de cotización[5] y la tasa

---

[3] Devesa-Carpio *et al*. (2003) considera que el sistema de cobro adoptado en el sistema con CIC es muy importante debido a que el proceso de acumulación es exponencial y dirigido hacia horizontes largos de tiempo. Por ejemplo, Murthi *et al.* (2001) estima que en el Reino Unido más del 40% del valor de la CIC se disipa por cobros de administración mientras que Whitehouse (2001) determina que un cobro de uno por ciento anual de los activos representa cerca del 20% del valor final de la pensión.

[4] Análisis y comparaciones de cargos administrativos en diferentes países se pueden encontrar en James *et al*. (2001), Whitehouse (2001) Gómez-Hernández y Stewart (2008), Corvera *et al.* (2006), Tapia y Yermo (2008) y Devesa-Carpio *et al*. (2003). Además, Sinha (2001), Masías y Sánchez (2007) y Martínez y Murcia (2008) evalúan en detalle (a pesar de que se han realizado modificaciones) los cargos administrativos en México, Perú y Colombia, respectivamente. Finalmente, Medina Giacomozzi *et al.* (2013) estudian el efecto de las comisiones en la rentabilidad de los fondos de las AFP en Chile.

[5] La densidad de cotización (DC) se define como el *ratio* del número de periodos en los cuales se hicieron contribuciones sobre total de periodos. La DC tiene un efecto muy importante en la tasa de reemplazo y la riqueza al final del periodo de acumulación. McGillivray (2001) determina, bajo supuestos razonables (los cuales consisten en una

de crecimiento del fondo. Los métodos alternativos de comparación utilizan las siguientes variables: los valores futuros de las comisiones esperadas a cobrar, las inversas de los coeficientes de variación de los fondos finales y las utilidades esperadas de riqueza terminal de las CIC. Además, se desarrolla un modelo simplificado para determinar la equivalencia de comisiones desde el punto de vista de la AFP. Este último modelo completa el estudio, pues los métodos de comparación mencionados previamente se desarrollan desde la perspectiva del afiliado.

Comparar los esquemas por flujo y saldo por medio del valor futuro de las comisiones esperadas cobradas al afiliado permite expresar el problema desde un punto de vista distinto al de saldos finales esperados en las CIC, y ayuda a modelar los ingresos por comisiones de las AFP. Pero lo más importante es que se derivan condiciones que hacen que este criterio brinde exactamente la misma información que la obtenida con la comparación de los *ratios* de carga[6] y los valores finales esperados de las CIC. Por lo demás, el coeficiente de variación del fondo final del afiliado nos indica el riesgo que se asume por cada unidad monetaria de fondo final acumulado, con lo que un menor coeficiente de variación implicaría una mejor relación riesgo-rendimiento en la acumulación final. Por tal razón podemos utilizar este criterio (o su inversa) para contrastar las dos formas de cobro. Para poder aplicar este método es fundamental calcular la varianza del fondo final del afiliado; es por ello que se introduce el movimiento browniano geométrico como proceso estocástico para el valor cuota del fondo de pensiones. Bajo este proceso se pueden obtener expresiones analíticas para la varianza del fondo final, lo que permite la derivación de propiedades importantes de los coeficientes de variación. Más aún, dichas propiedades serán útiles en la comparación mediante las utilidades terminales esperadas.

Como se indica al final del párrafo anterior, también es posible comparar los saldos finales de las CIC bajo saldo y flujo por sus respectivas utilidades esperadas terminales. La metodología implementada no permite (por lo general) encontrar expresiones analíticas para tales utilidades. Debido a este hecho y con la finalidad de establecer resultados explícitos, se asume para el desarrollo teórico una función de utilidad cuadrática (en este punto resultan útiles los resultados teóricos acerca del coeficiente de variación) y se analiza el efecto que tienen la aversión al riesgo y la densidad de cotización en la comparación. En general, se puede concluir que la comisión por saldo mejora su desempeño al incluir e incrementar la aversión al riesgo. Sin embargo, la densidad de cotización no tendría un efecto muy relevante en la comparación de comisiones. Estos resultados se corroboran con estudios de simulación para una función de utilidad isoelástica.

---

tasa de crecimiento del salario igual a 2 %, una tasa de rendimiento de 4% y 40 años de contribución), que la tasa de reemplazo bajo una DC de 100% será 50%; pero, bajo una DC de 80% la tasa de reemplazo podrá llegar a ser hasta de 37% dependiendo del patrón de interrupciones. Asimismo, las características y determinantes de la DC se han estudiado, para el caso chileno, en Arenas de Mesa *et al*. (2004). El impacto de la DC en la tasa de reemplazo y su implicancia en el diseño de pensiones para países de Latinoamérica pueden encontrarse en Durán y Pena (2011) y Valdés-Prieto (2008), respectivamente.

6 El *ratio* de carga o "charge ratio" se define como uno menos el *ratio* de acumulación esperada con cargos a acumulación esperada sin cargos.

El último método de comparación trata de encontrar comisiones de equivalencia por flujo y saldo desde el punto de vista de una AFP. Dicha equivalencia se logra al igualar los valores presentes de los ingresos generados por ambos tipos de comisión. Asimismo, bajo ciertos supuestos es posible evitar el cálculo de las tasas de descuento requeridas y basarnos en valuación bajo el supuesto de no arbitraje. En los experimentos numéricos se encuentran tales comisiones de indiferencia y se contrastan con las obtenidas bajo los otros métodos de comparación estudiados.

La estructura del presente trabajo de investigación es la siguiente: en la Sección 2 se propone una metodología de modelación y comparación de las comisiones por flujo y saldo. En la Sección 3 se incluye el estudio del efecto de la densidad de cotización en la comparación de ambos tipos de comisión. La aplicación práctica de la metodología propuesta al Sistema Privado de Pensiones del Perú se realiza en la Sección 4. Finalmente, en la Sección 5 se concluye, se brindan ciertas recomendaciones y se proponen algunas extensiones para la metodología.

2. Metodología[7]

Consideremos $i \in \mathbb{Z}$ y $T \in \mathbb{N}^+$ tales que $0 \le i \le T-1$. El índice i representa un mes particular, y T es el número de meses que faltan para la jubilación del afiliado. Asumimos que el valor cuota, V, de un fondo de pensiones representativo de una AFP en el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$ (meses) satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0. \tag{1}$$

Donde μ es la tasa de crecimiento del valor cuota por unidad de tiempo (meses), σ la volatilidad del retorno logarítmico mensual del mismo, V_0 es el valor cuota inicial, y el proceso estocástico B es un movimiento browniano estándar unidimensional.[8] La EDE en (1) es una especificación común para modelar el valor cuota, pues es muy utilizada en modelos de control estocástico para fondos de pensiones.[9] A continuación describiremos con más detalle las

---

7 Las demostraciones de los pasos intermedios o expresiones finales pueden ser solicitadas directamente al autor.

8 La EDE (1) puede ser entendida como la evolución de una cartera de inversiones con múltiples activos similar a la de Merton (1969). Consideremos la existencia de: un espacio completo y filtrado de probabilidad en el que se define un movimiento browniano m-dimensional $(W^1(t),\ldots, W^m(t))$ con $W^i(0)=0$, m activos riesgosos tales que $dS_i(t) = S_i(t)[\mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} W^j(t)]$ con $S_i(0)=s_i>0$ para todo $i=1, \ldots, m$, y un activo libre de riesgo tal que $dS_0(t)=rS_0(t)$ con $S_0(0)=s_0>0$. En este marco, si la AFP determina una estrategia óptima $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ (pesos en los activos riesgosos) como por ejemplo la determinada en Bielecki *et al.* (2005), entonces para los parámetros μ y σ de la EDE (1) se puede inferir que $\mu = r + \mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{b}$ y $\sigma = \left\|\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{C}\right\|$ donde: $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ es la transpuesta de la matriz $\mathbf{M} = (m_{ij})$, $\mathbf{b} = (\mu_1 - r, \ldots, \mu_m - r)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C} = (\sigma_{ij})$ (se asume positiva-definida) y $\|\mathbf{M}\|$ es la norma-L^2 del vector o matriz $\mathbf{M}$, i.e., $\mathbf{M} = \sqrt{\sum_{ij} m_{ij}^2}$.

9 La asignación de activos, *performance* y riesgo de fondos de pensiones con contribución definida durante su fase de acumulación y distribución han recibido atención en la literatura

comisiones por saldo y flujo utilizando una estructura similar a la proporcionada en Shah (1997), Diamond (2000), Blake y Board (2000), Whitehouse (2001), Devesa-Carpio (2003) y Gómez-Hernández y Stewart (2008).

2.1. Comisión por saldo

Sea $\delta > 0$ la comisión por saldo mensual expresada en tiempo continuo.[10] Además, en el mes i el afiliado aporta una suma $W_i > 0$ a su fondo de capitalización individual. Si el valor cuota, V, se normaliza a la unidad en el periodo i, entonces el aporte W_i equivale al mismo número de cuotas. Es decir, que para $t \geq i$, y basándonos en la EDE (1), el aporte realizado en i seguiría el siguiente movimiento browniano geométrico (MBG):

$$W_S^i(t) = W_i e^{\left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-i) + \sigma(B(t) - B(i))}, \quad i \leq t \leq T. \tag{2}$$

Al afiliado le interesa determinar el valor final de su fondo, $W_s(T)$, el que es la suma de los valores finales de todos los aportes realizados según la secuencia $\mathcal{W}_T = \{W_i \mid W_i > 0,\ 0 \leq i \leq T-1\}$. Entonces,

$$W_s(T) = \sum_{i=0}^{T-1} W_s^i(T), \tag{3}$$

donde los procesos W_s^i en (2) están sujetos a la misma fuente de incertidumbre B dada por (1). Además la esperanza $\mathbb{E}[W_s(T)]$, y la varianza, $\mathrm{Var}(W_s(T))$, del valor final del fondo del afiliado serán:

$$\mathbb{E}\left[W_s(T)\right] = \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{(\mu-\delta)(T-i)} = e^{(\mu-\delta)T} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-(\mu-\delta)i}, \tag{4}$$

$$Var\left(W_s(T)\right) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T - \max\{i,j\})} - 1\right). \tag{5}$$

---

sobre todo cuando los activos riesgosos siguen un GBM. Por ejemplo, Devolder *et al.* (2003) derivan múltiples estrategias óptimas para diferentes funciones de utilidad. Bajo las mismas condiciones, la eficiencia de la estrategia media-varianza en planes de pensiones DC es estudiada en Vigna *et al.* (2014). Haberman y Vigna (2002) consideran el riesgo de pérdida (*downside risk*) de una estrategia de asignación óptima derivada mediante un modelo de programación dinámica en tiempo discreto. El riesgo de salario e inflación se incorporan en Battocchio y Menoncin (2004) y Han y Hung (2012) al maximizar la utilidad esperada de riqueza terminal. Battocchio *et al.* (2007) y Yang and Huang (2009) incorporan el riesgo de longevidad en la optimización; el primer caso utiliza a la utilidad esperada como función objetivo, y la segunda utiliza la desviación de la riqueza terminal respecto de una meta predeterminada. Finalmente, el lector interesado en el análisis en la fase de distribución puede referirse, entre otros, a Blake *et al.* (2003), Gerrard *et al.* (2004), Horneff *et al.* (2008), y Gerrard *et al.* (2006).

[10] Un valor constante de δ podría implicar que el sistema ha alcanzado madurez respecto de esta forma de cobro.

Una propiedad interesante es que es posible expresar el valor esperado y la varianza de $W_s(T+1)$ como funciones del valor esperado y la varianza de $W_s(T)$ y el aporte de W_T. Las expresiones recursivas cuando T ≥ 1 son

$$\mathbb{E}\left[W_s(T+1)\right] = e^{(\mu-\delta)}\left(\mathbb{E}\left[W_s(T)\right] + W_T\right), \tag{6}$$

$$Var\left(W_s(T+1)\right) = e^{2(\mu-\delta)}\left(e^{\sigma^2}\mathrm{Var}\left(W_s(T)\right) + \left(e^{\sigma^2}-1\right)\left(\mathbb{E}\left[W_s(T)\right] + W_T\right)^2\right), \tag{7}$$

donde $\mathbb{E}\left[W_s(1)\right] = W_0 e^{(\mu-\delta)}$ y $\mathrm{Var}\left(W_s(1)\right) = W_0^2 e^{2(\mu-\delta)}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$.

Si se asumen aportes iguales, i.e., $W_i = W_0 > 0$ para todo i, la esperanza en (4) se simplifica a

$$\mathbb{E}\left[W_s(T)\right] = W_0 \frac{e^{\mu-\delta}\left(e^{(\mu-\delta)T}-1\right)}{e^{\mu-\delta}-1}. \tag{8}$$

Por otro lado, la varianza en (5) se descompone en $\mathrm{Var}\left(W_s(T)\right) = \mathbb{E}\left[W_s(T)^2\right] - \mathbb{E}[W_s(T)]^2$, y bajo los supuestos considerados se tiene

$$\mathbb{E}\left[W_s(T)^2\right] = W_0\left[\frac{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}+1}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}-1}A_s(T) - \frac{2e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}-1}\mathbb{E}\left[W_s(T)\right]\right], \tag{9}$$

donde $\mathbb{E}[W_s(T)]$ es dado por (8) y $A_s(T)$ satisface

$$A_s(T) = W_0 \frac{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2}\left(e^{(2(\mu-\delta)+\sigma^2)T}-1\right)}{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2}-1}. \tag{10}$$

Con lo cual Var($W_s(T)$) tendría una fórmula explícita al tener disponibles las expresiones de $\mathbb{E}\left[W_s(T)\right]$ y $\mathbb{E}\left[W_s(T)^2\right]$ en (8) y (9), respectivamente. Notar que $A_s(T)$ corresponde al valor en T de un fondo con aportes $W_i = W_0 > 0$ y una tasa de crecimiento igual a $2(\mu-\delta)+\sigma^2$. En los casos extremos, $\mu-\delta=0$, $\mu-\delta+\sigma^2=0$ y $2(\mu-\delta)+\sigma^2=0$, las expresiones (8), (9) y (10) deben ser evaluadas utilizando los límites respectivos.

2.2. Comisión por flujo

Sea $\alpha>0$ la tasa de la comisión por flujo.[11] Si el afiliado realiza un aporte W_i en el mes i, la comisión que pagaría a la AFP (en el momento del aporte) sería igual a $C_i = W_i\left(1-e^{-\alpha}\right)$. Considerando que la comisión C_i pudo ser invertida

[11] También se le conoce como comisión por sueldo, y puede ser cobrada como un porcentaje del salario o la contribución del afiliado.

en el fondo, el aporte del afiliado ajustado por el costo de oportunidad de C_i puede expresarse como $e^{-\alpha}W_i$. A partir de este supuesto, el aporte ajustado de la comisión por flujo en el mes i, W_f^i, evolucionaría según el siguiente MBG:

$$W_f^i(t) = W_i e^{-\alpha} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-i)+\sigma(B(t)-B(i))}, \quad i \le t \le T. \tag{11}$$

Para el afiliado es importante calcular el monto del fondo final ajustado por el costo de oportunidad de la comisión por flujo según la secuencia de aportes. $\mathcal{W}_T = \{W_i \mid W_i > 0,\ 0 \le i \le T-1\}$. Si denotamos dicho monto final como $W_f(T)$, se tiene

$$W_f(T) = \sum_{i=0}^{T-1} W_f^i(T). \tag{12}$$

Además, la esperanza y la varianza de $W_f(T)$ son

$$\mathbb{E}\left[W_f(T)\right] = e^{-\alpha}\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{\mu(T-i)} = e^{-\alpha+\mu T}\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-\mu i}. \tag{13}$$

$$\mathrm{Var}\left(W_f(T)\right) = \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{-2\alpha+\mu(T-i+T-j)}\left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})}-1\right). \tag{14}$$

Es importante recalcar que $W_f(T)$ no representa el verdadero monto final del fondo del afiliado, sino un monto final ajustado por el costo de oportunidad de la comisión por flujo. El fondo final del afiliado sería igual a $e^{\alpha}W_f(T)$, y al incorporar dicho costo de oportunidad se han hecho $W_f(T)$ y $W_s(T)$ comparables.

De la misma forma que se consideró en la comisión por saldo, es posible expresar el valor esperado y la varianza de $W_f(T+1)$ como funciones del valor esperado y la varianza de $W_f(T)$ y el aporte W_T. Las correspondientes relaciones recursivas para la comisión por flujo se obtienen al hacer $\delta=0$ y reemplazar W_T por $e^{-\alpha}W_T$ en (6) y (7), además de utilizar $\mathbb{E}\left[W_f(T)\right]$ y $\mathrm{Var}\left(W_f(T)\right)$ en lugar de $\mathbb{E}\left[W_s(T)\right]$ y $\mathrm{Var}\left(W_s(T)\right)$, respectivamente. Por último, si se asumen aportes iguales a W_0, se pueden encontrar expresiones simplificadas para la esperanza en (13) y la varianza en (14). Basta hacer $\delta=0$ y considerar $W_0e^{-\alpha}$ en vez de W_0 en las expresiones (8) a la (10).

2.3. Comparación de comisiones por flujo y saldo

Un afiliado quiere determinar la idoneidad de los esquemas de cobro de comisiones contrastando los respectivos saldos finales generados, lo que es equivalente a la elección entre dos prospectos riesgosos: $W_s(T)$ y $W_f(T)$. El método natural de comparación es por medio de las utilidades esperadas; sin embargo se han considerado además tres medidas adicionales de comparación. La primera es el *ratio* de riquezas terminales esperadas, esta es la más popular y utilizada en la literatura. La segunda es el *ratio* de los valores futuros de las comisiones esperadas por pagar, dicha medida es relevante pues permite afrontar el problema desde el punto de vista de los costos de administración. Asimismo, se demuestra (bajo ciertos supuestos) la equivalencia de las dos medidas antes

mencionadas. La tercera forma de comparación es mediante las inversas de los coeficientes de variación de los fondos finales. Tal medida nos brinda una idea de la relación rendimiento-riesgo de la acumulación final, y además permite introducir propiedades que serán útiles para la comparación por medio de las utilidades esperadas terminales asumiendo una función cuadrática de utilidad. A continuación describiremos y analizaremos en detalle las propiedades de cada uno de los métodos mencionados.

2.3.1. Ratio *de los valores esperados de fondos finales*

Si la comparación se realiza utilizando las esperanzas de $W_s(T)$ y $W_f(T)$, entonces se define

$$\text{RE}_{sf} = \frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\mathbb{E}\left[W_f(T)\right]}, \tag{15}$$

donde $\mathbb{E}\left[W_s(T)\right]$ y $\mathbb{E}\left[W_f(T)\right]$ están dados por las expresiones (4) y (13), respectivamente. Si $\text{RE}_{sf} > 1$ la comisión por saldo sería preferible. Si $\text{RE}_{sf} < 1$ la comisión por flujo sería preferible. Además, cuando $\text{RE}_{sf} = 1$ el afiliado sería indiferente frente a ambas alternativas. Es importante mencionar que el *ratio* de comparación planteado en (15) asume que el afiliado tiene una función de utilidad de riqueza terminal neutral al riesgo; y, tal como se mencionó en la introducción, esta forma de comparación es la más común en la literatura.

Para el caso de aportes según la secuencia $\mathcal{W}_T$ y cuando $T>1$ podemos expresar RE_{sf} en (15) de las siguientes dos formas:

$$\text{RE}_{sf} = e^{\alpha-\delta}\,\frac{W_0 e^{(\mu-\delta)(T-1)} + W_1 e^{(\mu-\delta)(T-2)} + \ldots + W_{T-1}}{W_0 e^{\mu(T-1)} + W_1 e^{\mu(T-2)} + \ldots + W_{T-1}}, \tag{16}$$

$$\text{RE}_{sf} = e^{\alpha-\delta T}\,\frac{W_0 + W_1 e^{-(\mu-\delta)} + \ldots + W_{T-1} e^{-(\mu-\delta)(T-1)}}{W_0 + W_1 e^{-\mu} + \ldots + W_{T-1} e^{-\mu(T-1)}}. \tag{17}$$

A partir de (17) y para $T>1$ se puede demostrar, haciendo a RE_{sf} una función de μ, que

$$\frac{\partial \text{RE}_{sf}(\mu)}{\partial \mu} < 0, \tag{18}$$

con lo cual RE_{sf} es una función estrictamente decreciente en μ y tal relación es independiente de la secuencia de aportes $\mathcal{W}_T$.

Si se asume la existencia de un activo libre de riesgo con rendimiento r (mensual y en tiempo continuo) y $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot]$ denota la esperanza bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, entonces los precios en $t=0$ de las CIC del afiliado bajo comisión por saldo (p_s) y comisión por flujo (p_f) son:

$$p_s = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[W_s(T)\right], \tag{19}$$

$$p_f = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[W_f(\mathrm{T})\right]. \tag{20}$$

Notar que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[W_s(T)\right]$ y $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[W_f(T)\right]$ se pueden calcular reemplazando μ por r en las expresiones (4) y (13), y además el *ratio* de precios satisface

$$\frac{p_s}{p_f} = \mathrm{RE}_{sf}(r). \tag{21}$$

En general se cumple que $\mu > r$, y la propiedad (18) implica que $\mathrm{RE}_{sf}(\mu) < \mathrm{RE}_{sf}(r)$. Bajo el supuesto que el afiliado pudiera invertir óptima e instantáneamente sus aportes entre el fondo de la AFP dado por (1) y el activo libre de riesgo, la decisión entre los tipos de comisión se basaría únicamente en la comparación de p_s y p_f. Por ejemplo, $p_s = p_f$ implicaría que el *ratio* de riquezas esperadas terminales óptimas sea igual a la unidad.[12] Pero, tal forma de comparación no aplicaría para el artículo pues se asume que todos los aportes del afiliado se invierten enteramente en el fondo riesgoso dado por (1), con lo que $p_s = p_f$ no implicaría necesariamente indiferencia entre los tipos de comisión, y la función de utilidad del afiliado resultaría relevante en la comparación.

A partir de (18), es posible encontrar una cota superior, UB, y otra inferior LB, para RE_{sf}. Utilizando (16) se tiene $\mathrm{UB} = \lim_{\mu\to-\infty}\mathrm{RE}_{sf} = e^{\alpha-\delta}$, y utilizando (17) se tiene $\mathrm{LB} = \lim_{\mu\to\infty}\mathrm{RE}_{sf} = e^{\alpha-\delta T}$. Con lo cual:

$$LB = e^{\alpha-\delta T} \le \mathrm{RE}_{sf} \le e^{\alpha-\delta} = UB, \qquad \text{para} \qquad T \ge 1. \tag{22}$$

Notar que las cotas son independientes de la secuencia $\mathcal{W}_T$ y la tasa de crecimiento μ, además estas serían estrictas cuando $T > 1$. Si $\alpha \le \delta$, se tiene $\mathrm{UB} \le 1$ y por consiguiente $\mathbb{E}\left[W_s(T)\right] \le \mathbb{E}\left[W_f(T)\right]$, i.e., la comisión por flujo sería siempre preferible al comparar los valores esperados de los fondos finales. Adicionalmente, a partir del valor de LB podemos afirmar que cuando $\delta < \dfrac{\alpha}{T}$ se tiene $\mathrm{RE}_{sf} > 1$.

Si asumimos $W_i = W_0 > 0$ para todo el horizonte, RE_{sf} es independiente del monto del aporte W_0. Bajo este supuesto, utilizando (8) y su expresión correspondiente para la comisión por flujo (hacer $\delta = 0$ y considerar W_0 como $e^{-\alpha}W_0$), la expresión de RE_{sf} en (15) cuando $\mu \neq 0$ y $\mu \neq \delta$ se simplifica a

$$\mathrm{RE}^{*}_{sf}(\mu,\alpha,\delta,T) = \frac{e^{\alpha-\delta}(e^{(\mu-\delta)T}-1)(e^{\mu}-1)}{(e^{\mu T}-1)(e^{\mu-\delta}-1)}. \tag{23}$$

A partir de (23) se pueden verificar los valores de UB y LB en (22), además de corroborar también que $\partial \mathrm{RE}^{*}_{sf}(\mu,\alpha,\delta,T)/\partial\mu < 0$. Una propiedad interesante del caso $W_i = W_0 > 0$ es que $\mathrm{RE}^{*}_{sf}(\mu,\alpha,\delta,T) > \mathrm{RE}^{*}_{sf}(\mu,\alpha,\delta,T+1)$ para todo $T \ge 1$. Además, si se tiene $\mu > 0$ entonces $\lim_{T\to\infty}\mathrm{RE}^{*}_{sf} = 0$, y si tenemos

[12] Este hecho puede extenderse también al *ratio* de utilidades óptimas esperadas de riqueza terminal, pues la preferencia al riesgo del afiliado se volvería irrelevante en tal contexto.

también $\alpha > \delta$, existirá $\hat{T}_E$ tal que $\mathbb{E}\left[W_s(T)\right] \geq \mathbb{E}\left[W_f(T)\right]$ para $1 \leq T \leq \hat{T}_E$ y $\mathbb{E}\left[W_s(T)\right] < E\left[W_f(T)\right]$ para $T > \hat{T}_E$.

2.3.2. Ratio *de los valores futuros de las comisiones por pagar*

La siguiente alternativa para comparar los esquemas de comisiones por saldo y flujo se obtiene al considerar los montos de las comisiones por cobrar al afiliado. Es claro que en flujo, la única comisión cobrada por el aporte W_i satisface

$$C_f^i = W_i(1-e^{-\alpha}), \forall i = 0,\ldots,T-1. \tag{24}$$

Asimismo, el aporte W_i bajo comisión por saldo genera el siguiente flujo esperado de comisiones mensuales:

$$C_s^i(j) = W_i e^{\mu} e^{(\mu-\delta)(j-(i+1))}\left(1-e^{-\delta}\right), \tag{25}$$

donde j es un mes particular tal que $j = i + 1, \ldots, T$. Si utilizamos una tasa de descuento mensual d (en tiempo continuo) tal que $d \neq \mu - \delta$, el valor futuro en T del flujo de comisiones por saldo generado por el aporte W_i es igual a

$$\mathrm{VF}_s^i(d) = \sum_{j=i+1}^{T} e^{d(T-j)} C_s^i(j) = W_i \frac{(e^{\delta}-1)\left(e^{d(T-i)} - e^{(\mu-\delta)(T-i)}\right)}{e^{d-\mu+\delta}-1}. \tag{26}$$

Mientras que el valor futuro en T de la comisión C_f^i en (24) viene dado por

$$\mathrm{VF}_f^i(d) = W_i(1-e^{-\alpha})e^{d(T-i)}. \tag{27}$$

Consecuentemente, se puede definir el *ratio* de los valores futuros de las comisiones totales a una tasa de descuento d, $\mathrm{RC}_{sf}(d)$, como

$$\mathrm{RC}_{sf}(d) = \frac{\sum_{i=0}^{T-1} \mathrm{VF}_s^i(d)}{\sum_{i=0}^{T-1} \mathrm{VF}_f^i(d)}. \tag{28}$$

Si $\mathrm{RC}_{sf}(d) < 1$ la comisión por saldo sería preferible y si $\mathrm{RC}_{sf}(d) > 1$ la comisión por flujo sería preferible. Cuando $\mathrm{RC}_{sf}(d) = 1$, el afiliado sería indiferente entre ambos tipos de comisión.

Incorporando las definiciones (26) y (27) en la expresión (28) se tiene

$$\mathrm{RC}_{sf}(d) = \frac{e^{\mu-\delta}}{e^{d-\delta}} \frac{\left(e^{\delta}-1\right)}{\left(e^{\delta}-e^{\mu-d}\right)} \frac{e^{\alpha}}{\left(e^{\alpha}-1\right)} \frac{\sum_{i=0}^{T-1} W_i\left(e^{d(T-i)} - e^{(\mu-\delta)(T-i)}\right)}{\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{d(T-i)}}. \tag{29}$$

Es importante notar que cuando $d = \mu$, el *ratio* $\mathrm{RC}_{sf}(d)$ en (28) pudo encontrarse de una manera directa. Basta notar que los MBG (2) y (11) asumen que las comisiones crecen a tasa μ, y como α es constante se tiene

$$\mathrm{RC}_{sf}(\mu) = \frac{e^{\alpha}\mathbb{E}\left[W_f(T)\right] - \mathbb{E}\left[W_s(T)\right]}{e^{\alpha}\mathbb{E}\left[W_f(T)\right] - \mathbb{E}\left[W_f(T)\right]} = \frac{e^{\alpha} - \mathrm{RE}_{sf}}{e^{\alpha} - 1}, \tag{30}$$

donde RE_{sf} es dado por (15). Se verifica a partir de (30) que tanto $\mathrm{RC}_{sf}(\mu)$ como $\mathrm{RE}_{sf}(\mu)$ brindarían la misma recomendación en torno a la conveniencia de los esquemas de comisiones. Lo anterior implica además que la tasa de descuento d debe ser interpretada como el costo de oportunidad para los fondos del afiliado en vez de una tasa que refleje el riesgo de los flujos de comisiones.

El *ratio* $\mathrm{RC}_{sf}(\mu)$ en (30) es equivalente al cociente entre los *ratios* de carga o *charge ratios* generados por los tipos de cobro. Dichos *ratios* se definen como uno menos el *ratio* de acumulación con cargos a acumulación sin cargos. Si denotamos como RC_s y RC_f a los *ratios* de carga respectivos, entonces

$$\mathrm{RC}_s = 1 - \frac{\mathbb{E}\left[W_s(T)\right]}{\mathbb{E}\left[W(T)\right]}, \tag{31}$$

$$\mathrm{RC}_f = 1 - \frac{\mathbb{E}\left[W_f(T)\right]}{\mathbb{E}\left[W(T)\right]}, \tag{32}$$

donde $W(T)$ es el valor final del fondo del afiliado en ausencia de comisiones, i.e., $\delta = 0$ o $\alpha = 0$. A partir de las definiciones previas $\mathrm{RC}_{sf}(\mu)$ en (30) se puede expresar como

$$\mathrm{RC}_{sf}(\mu) = \frac{\mathrm{RC}_s}{\mathrm{RC}_f}. \tag{33}$$

Entonces $\mathrm{RE}_{sf}(\mu)$, $\mathrm{RC}_{sf}(\mu)$ y el coeficiente de los *ratios* de carga, $\frac{\mathrm{RC}_s}{\mathrm{RC}_f}$, brindan la misma recomendación.

Finalmente, si denotamos como pc_s y pc_f a los valores de mercado en $t = 0$ de los flujos de comisiones por pagar bajo los esquemas por saldo y flujo respectivamente, entonces bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$ y la expresión (30) se tiene:

$$\mathrm{RC}^{\mathbb{Q}}_{sf}(r) = \frac{pc_s}{pc_f} = \frac{e^{\alpha} - \frac{p_s}{p_f}}{e^{\alpha} - 1}, \tag{34}$$

donde $\mathrm{RC}^{\mathbb{Q}}_{sf}(r)$ es igual al *ratio* (29) con $\mu = d = r$, p_s y p_f son los precios en $t = 0$ de las CIC del afiliado bajo comisión por saldo y flujo, respectivamente. Con ello los *ratios* (21) y (34) brindarían la misma recomendación si se trabaja

tanto con los valores actuales de mercado de los fondos y las comisiones cobradas bajo el supuesto de no arbitraje.

2.3.3. Inversa del coeficiente de variación del fondo final

Es posible determinar la conveniencia de uno u otro esquema por medio del *ratio* entre el valor esperado del fondo final del afiliado (ajustado por comisiones) y su desviación estándar respectiva. Para los sistemas de cobro estudiados, los *ratios* serían

$$\text{(35)} \qquad \mathrm{H}_s = \frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\sqrt{\mathrm{Var}(W_s(T))}}, \quad \text{y} \quad \mathrm{H}_f = \frac{\mathbb{E}[W_f(T)]}{\sqrt{\mathrm{Var}(W_f(T))}}.$$

Donde $\mathbb{E}\left[W_s(T)\right]$ y $\mathbb{E}\left[W_f(T)\right]$ vienen dados por (4) y (13), y $\mathrm{Var}(W_s(T))$ y $\mathrm{Var}(W_f(T))$ por (5) y (14), respectivamente. En este criterio, si para ciertos parámetros se cumple que $\mathrm{H}_s > \mathrm{H}_f$, entonces la comisión por saldo sería preferible. Utilizando los valores esperados y varianzas de los fondos finales, los *ratios* en (35) se pueden expresar como

$$\text{(36)} \qquad \mathrm{H}_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)}}{\sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j (\rho_{ij}-1) e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)}}},$$

$$\text{(37)} \qquad \mathrm{H}_f = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{\mu(T-i+T-j)}}{\sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j (\rho_{ij}-1) e^{\mu(T-i+T-j)}}},$$

y ρ_{ij} es dado por

$$\text{(38)} \qquad \rho_{ij} = e^{\sigma^2(T-\max\{\mathrm{i,j}\})}.$$

Cuando se realiza un único aporte en $i^* < T$, los *ratios* se simplifican a

$$\text{(39)} \qquad \mathrm{H}_f = \mathrm{H}_s = \frac{1}{\sqrt{e^{\sigma^2(T-i^*)}-1}},$$

y ambos esquemas de comisión generarían el mismo *ratio*. Asimismo, se puede hacer a H_f una función de la tasa de crecimiento μ, y se demuestra que para $T > 1$

$$\text{(40)} \qquad \frac{\partial \mathrm{H}_f(\mu)}{\partial \mu} < 0.$$

La expresión en (40) es equivalente a $\mathrm{H}_s > \mathrm{H}_f$ para cualquier conjunto común de parámetros, pues $\mathrm{H}_f > 0$, $\delta > 0$ y α se cancela en H_f. Consecuentemente, la

comisión por saldo genera siempre un mejor *ratio* que la comisión por flujo para cualquier sucesión $\mathcal{W}_T$ tal que $W_i > 0$ para todo i.

Al ser H_s y H_f funciones monótonas en μ, es posible encontrar una cota superior $\widehat{UB}$ y otra inferior $\widehat{LB}$ para dichos *ratios*. Después de una apropiada manipulación de (37) se tiene que

$$\widehat{UB} = \lim_{\mu\to-\infty} H_{f=} \frac{1}{\sqrt{e^{\sigma^2}-1}}, \tag{41}$$

$$\widehat{LB} = \lim_{\mu\to\infty} H_f = \frac{1}{\sqrt{e^{\sigma^2 T}-1}}. \tag{42}$$

Si asumimos $W_i = W_0 > 0$ para todo el horizonte, definimos

$$RH^*_{sf}\left(\mu,\delta,T,\sigma^2\right) = \frac{H_s}{H_f}. \tag{43}$$

El *ratio* RH^*_{sf} en (43) por lo general no presenta monotonicidad en T; pero, para $T>1$, se verifica que $RH^*_{sf}\left(\mu,\delta,T,\sigma^2\right) > 1$ como consecuencia directa de (40). En el largo plazo y con $\mu > \delta$ tenemos $RH^*_{sf}\left(\mu,\delta,\infty,\sigma^2\right) = \lim_{T\to\infty} RH^*_{sf}\left(\mu,\delta,T,\sigma^2\right)$, donde

$$RH^*_{sf}\left(\mu,\delta,\infty,\sigma^2\right) = \frac{e^{\mu}-1}{e^{\mu-\delta}-1}\sqrt{\frac{\left(e^{\mu-\delta+\sigma^2}-1\right)\left(e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2}-1\right)\left(e^{\mu+\sigma^2}+1\right)}{(e^{\mu+\sigma^2}-1)(e^{2\mu+\sigma^2}-1)(e^{\mu-\delta+\sigma^2}+1)}}. \tag{44}$$

2.3.4. Utilidad esperada de riqueza terminal

Consideremos un afiliado con aversión al riesgo y sea $U(W)$ su utilidad cuando una realización de riqueza terminal ajustada por comisiones es igual a W. Para determinar el tipo de comisión más apropiado, el afiliado quiere comparar $\mathbb{E}\left[U(W_s(T))\right]$ y $\mathbb{E}\left[U(W_f(T))\right]$. Sin embargo, expresiones analíticas explícitas para los esperados anteriores no se encuentran disponibles en general.

Debido a que contamos con fórmulas explícitas para el primer y segundo momento de $W_s(T)$ y $W_f(T)$, encontramos apropiado utilizar una función de utilidad cuadrática dada por

$$U(W) = aW - bW^2, \tag{45}$$

donde $a > 0$ y $b > 0$ es el coeficiente de aversión al riesgo. Notar que cuando $b = 0$ el afiliado sería neutral al riesgo, Adicionalmente, fijamos $a = 1 + 2b\ \mathbb{E}[W]$ de manera similar a Zhou y Li (2000). Si U es como en (45), tenemos

$$\mathbb{E}[U(W_s(T))] = \mathbb{E}[W_s(T)] + b(2\mathbb{E}\left[W_s(T)\right]^2 - \mathbb{E}[W_s(T)^2]), \tag{46}$$

$$\mathbb{E}[U(W_f(\mathrm{T}))] = \mathbb{E}[W_f(T)] + b(2\mathbb{E}\left[W_f(T)\right]^2 - \mathbb{E}[W_f(T)^2]). \tag{47}$$

Las expresiones de $\mathbb{E}[W_s(T)^2]$ y $\mathbb{E}[W_f(T)^2]$ se pueden derivar de las esperanzas (4) y (13), y las varianzas (5) y (14). Para un conjunto fijo de parámetros y la utilidad cuadrática en (45), definimos Υ como la diferencia entre $\mathbb{E}[U(W_s(\mathrm{T}))]$ y $\mathbb{E}[U(W_f(\mathrm{T}))]$. Entonces,

$$\Upsilon(b, \delta) = \mathbb{E}\left[U\left(W_s(T)\right)\right] - \mathbb{E}\left[U\left(W_f(T)\right)\right]. \tag{48}$$

En la siguiente proposición se establecen las condiciones que hacen a Υ una función monótona decreciente en δ pues tal propiedad no se cumple en general.

Proposición 2.1 (Monotonicidad de Υ respecto de δ) *Dada la secuencia de contribuciones del afiliado* $\mathcal{W}_T = \{W_i \mid W_i > 0,\ 0 \le i \le T-1\}$, *y sea* $\mathbf{A} = \{T, \alpha, \mu, \sigma^2, b, \mathcal{W}_T\}$ *un escenario para los valores de las variables del modelo. Si* $T > 1$, $b > 0$ *y* $\sigma^2 \le \frac{1}{T} ln\ (2)$, *entonces* $\partial_\delta \Upsilon(b, \delta) < 0$ *con* $\delta > 0$.

Demostración*:* Ver Apéndice A.

Dado el escenario $\mathbf{N} = \{T, \alpha, \mu, \sigma^2, b, \mathcal{W}_T\}$ definimos la comisión por saldo neutral al riesgo, $\delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$, como el valor de δ que hace RE_{sf} en (15) igual a uno. Asimismo, para el escenario $\mathbf{A} = \mathbf{N} \cup \{\mathrm{b}\}$ definimos la comisión por saldo aversa al riesgo, $\delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A})$, como el valor δ que hace $\mathbb{E}\left[U\left(W_s(\mathrm{T})\right)\right]$ igual a $\mathbb{E}\left[U\left(W_f(\mathrm{T})\right)\right]$. En la siguiente proposición se establecen condiciones que aseguran que tanto $\delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A})$ como Υ sean crecientes en b, i.e., la comisión por saldo mejora respecto de la de flujo al aumentar la aversión al riesgo.

Proposición 2.2 (Efecto de la aversión al riesgo en Υ y δ^*_{A}) *Dado* $T > 1$ *y un conjunto de parámetros* $\mathbf{N} = \{T, \alpha, \mu, \sigma^2, b, \mathcal{W}_T\}$, *entonces para el escenario* $\mathbf{A} = \mathbf{N} \cup \{b\}$ *con* $b > 0$ *tal que* $\sigma^2 \le \frac{1}{T} ln(2)$ *se cumple que* $\Upsilon(b, \delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})) > 0$, $\partial_b \Upsilon(b, \delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})) > 0$, $\delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A}) > \delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$ *y* $\partial_b \delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A}) > 0$.

Demostración*:* Ver Apéndice B.

Es importante notar que Υ definida en (48) se consideró una función solo de b y δ debido a que en las Proposiciones 2.1 y 2.2 se asume (indirectamente) un nivel fijo α de la comisión por flujo. Si Υ se define en términos de b y α para un valor fijo de δ, i.e., Υ (b, α), entonces es posible extender los resultados obtenidos en esta sección. En primer lugar se verifica que si $T > 1$, $b > 0$ y $\sigma^2 \le \frac{1}{T} ln(2)$, entonces $\partial_\alpha \Upsilon(b, \alpha) > 0$ para $\alpha > 0$. De manera similar al caso de la comisión por saldo, se pueden definir como $\alpha^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$ y $\alpha^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{A})$ con $\mathbf{N} = \{T, \delta, \mu, \sigma^2, b, \mathcal{W}_T\}$ y $\mathbf{A} = \mathbf{N} \cup \{b\}$ a las comisiones por flujo neutral y aversa al riesgo, respectivamente. Entonces bajo los mismos supuestos de la Proposición 2.2 se demuestra que $\Upsilon(b, \alpha^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})) > 0$, $\partial_b \Upsilon(b, \alpha^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})) > 0$, $\alpha^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A}) < \alpha^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$ y $\partial_b \alpha^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A}) < 0$. Los resultados anteriores implican que la comisión por flujo empeora respecto de la de saldo al aumentar la aversión al riesgo.

2.4. Comisiones equivalentes desde la perspectiva de la Administradora de Fondos de Pensiones (AFP)

Los métodos para comparar comisiones por flujo y saldo presentados en la Sección 2.3 fueron desarrollados desde la perspectiva del afiliado. Sin embargo, es importante determinar la equivalencia de comisiones desde el punto de vista de una AFP. Es por ello que en esta sección, haciendo uso de un modelo simplificado, se estudian los flujos de ingresos de las AFP bajo ambos tipos de comisiones y se determinan las comisiones de equivalencia.

Sean $t_m \in \mathbb{N}$ la edad mínima en la que un afiliado puede incorporarse al sistema pensionario, $t_r \in \mathbb{N}$ la edad de jubilación común del sistema y $t \in \mathbb{N}$ un indicador de un mes cualquiera, todas las variables anteriores se expresan en meses y se cumple que $t_m < t_r$. Definimos como $x^0(t_0)$ al número inicial de afiliados de edad $t_m + t_0$ tal que $t_0 = 1,\ldots, t_r - t_m - 1$. Luego, en cada $t \geq 0$ se incorporan al sistema un número de afiliados igual a $x^N(t)$ todos los cuales tienen edad t_m.

Vamos a estudiar el caso simplificado correspondiente al inicio de un sistema de pensiones, en el cual primero se afilia a toda la población relevante (en términos de edad) y después solo se incorporan nuevos afiliados en la medida que cumplen con la edad mínima. Un afiliado "inicial" de edad $t_m + t_0$ con $t_0 = 1,\ldots, t_r - t_m - 1$. contribuirá al fondo con aportes $W_i^0(t_0)$ para $i = 0, \ldots, t_r - t_m - 1$; y un afiliado con edad igual a t_m que ingresa en $t \geq 0$ contribuirá al fondo mediante una secuencia de aportes $W_i^N(t)$ con $i = 0, \ldots, t_r - t_m - 1$. Además, definimos como T_{AFP} al horizonte de tiempo en meses que fija la AFP para el análisis (solo se van a considerar las comisiones generadas en este lapso), y es tal que satisface la condición $t_r - t_m \geq T_{AFP}$.

Si la AFP fija una tasa de descuento q_f mensual en tiempo continuo para sus ingresos por comisiones por flujo, entonces para el caso de un nivel de comisión por flujo constante durante el periodo de análisis, α, los valores presentes de las comisiones cobradas a los afiliados iniciales (aquellos con edad mayor que t_m que se incorporan en el momento inicial) y nuevos (aquellos que se incorporan al sistema con edad mínima t_m en cada periodo incluyendo el inicial) serían, respectivamente:

$$VP_f^0(T_{AFP}) = \sum_{t_0=1}^{t_r - t_m - 1} \sum_{j=0}^{t_0^*} x^0(t_0) e^{-q_f i} W_i^0(t_0) \left(1 - e^{-\alpha}\right), \tag{49}$$

$$VP_f^N(T_{AFP}) = \sum_{t=0}^{T_{AFP}-1} \sum_{i=0}^{T_{AFP}-t-1} x^N(t) e^{-q_f (i+t)} W_i^N(t) \left(1 - e^{-\alpha}\right), \tag{50}$$

donde $t_0^* = \min\{T_{AFP} - 1, t_r - t_m - t_0 - 1\}$. Es importante mencionar que tanto $W_i^0(t_0)(1 - e^{-\alpha})$ como $W_i^N(t_0)(1 - e^{-\alpha})$ en las expresiones (49) y (50) representan las comisiones por flujo generadas por los aportes $W_i^0(t_0)$ y $W_i^N(t)$, respectivamente. Con lo que el valor presente de todas las comisiones por flujo generadas por los afiliados, $V_{Pf}(T_{AFP})$, sería:

$$VP_f\ (T_{AFP}) = VP_f^0(T_{AFP}) + VP_f^N(T_{AFP}). \tag{51}$$

Por otro lado, si se considera una comisión por saldo fija igual a δ (mensual) durante T_{AFP}, entonces:

$$VP_s^0\left(T_{AFP}\right) = \sum_{t_0=1}^{t_r-t_m-1} \sum_{i=0}^{t_0^*} x^0\left(t_0\right) e^{-q_s i}\, VPC_s^0\left(t_0,i\right), \tag{52}$$

$$VP_\delta^N\left(T_{AFP}\right) = \sum_{t=0}^{T_{AFP}-1} \sum_{i=0}^{T_{AFP}-t-1} x^N\left(t\right) e^{-q_s(i+t)}\, VPC_s^N\left(t,i\right); \tag{53}$$

tal que $VPC_s^0\left(t_0,i\right)$ y $VPC_s^N\left(t,i\right)$ se definen como:

$$VPC_s^0\left(t_0,i\right) = \sum_{j=i+1}^{T_{AFP}} W_i^0\left(t_0\right) e^{-q_s j}\, e^{\mu}\, e^{(\mu-\delta)(j-(i+1))}\left(1-e^{-\delta}\right), \tag{54}$$

$$VPC_s^N\left(t,i\right) = \sum_{j=i+1}^{T_{AFP}} W_i^N\left(t\right) e^{-q_s j}\, e^{\mu}\, e^{(\mu-\delta)(j-(i+1))}\left(1-e^{-\delta}\right). \tag{55}$$

Notar q_s es la tasa de descuento respectiva, $VP_s^0\left(T_{AFP}\right)$ en (52) es el valor presente de las comisiones por saldo por cobrar a los afiliados que en $t = 0$ tenían una edad mayor que t_m, y $VP_s^N\left(T_{AFP}\right)$ en (53) es el valor presente de las comisiones por saldo por cobrar a los afiliados con edad igual a t_m en el momento inicial y en cada mes subsecuente hasta llegar a T_{AFP}–1. Asimismo, tanto (54) como (55) se basan en la expresión (25) y representan el valor presente (al mes en que se realiza el aporte) de las comisiones por saldo generadas por los aportes $W_i^0(t_0)$ y $W_i^N(t)$, respectivamente. Con ello el valor presente de todas las comisiones por saldo generadas por los afiliados durante el periodo T_{AFP}, $VP_s(T_{AFP})$, sería:

$$VP_s\left(T_{AFP}\right) = VP_s^0\left(T_{AFP}\right) + VP_s^N\left(T_{AFP}\right). \tag{56}$$

A un nivel de comisión por flujo α, la comisión por saldo equivalente de la AFP, δ_{AFP}, es el valor δ tal que $VP_f(T_{AFP})$ en (51) es igual a $VP_s(T_{AFP})$ en (56). Dicha comisión equivalente δ_{AFP} es además una función de T_{AFP}, μ, q_s, q_f, las secuencias del número de afiliados $\{x^0\}$ y $\{x^N\}$, y los aportes $\{W^0\}$ y $\{W^N\}$.

Es importante mencionar que el modelo presentado compara las comisiones cobradas por las AFP desde la etapa inicial del sistema hasta un periodo T_{AFP}. Sin embargo, si se considera el mismo horizonte de análisis de T_{AFP} meses, entonces lo más probable es que la comisión δ_{AFP} disminuya en el tiempo debido al crecimiento del fondo total administrado. Este hecho podría entenderse debido a que la parte correspondiente a los componentes transitorios VPC_f^0 y VPC_s^0 tienden a tener menor preponderancia a medida que se avanza en el tiempo, pues los flujos de comisiones restantes de los afiliados iniciales van disminuyendo. Por otro lado, VPC_s^N tiende a crecer respecto de VPC_f^0 en razón a que con el tiempo las comisiones por saldo de los afiliados que quedan en el sistema tienden a incrementar respecto de las de flujo. Asimismo, dependiendo de los

parámetros, se podrá determinar una comisión por saldo equivalente de largo plazo, δ_{AFP}^{∞}, que es la que se obtendrá cuando el flujo de comisiones alcanza un estado de estabilidad. Tales situaciones se mostrarán en los experimentos numéricos de la Sección 4.

De la forma en que se ha presentado el modelo, la única fuente de incertidumbre en los flujos estaría dada por la evolución del valor cuota del fondo. Este hecho hace que q_f, la tasa de descuento de los ingresos cuando se asume comisión por flujo, sea igual a la tasa libre de riesgo, r. Asimismo, es importante notar que en el caso de la comisión por saldo, los ingresos por comisiones corresponden a valores esperados, y por lo tanto se tendría que estimar q_s pero bajo la condición $q_s > r$. Una forma de evitar el cálculo de q_s es trabajar bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, bajo esta medida se tiene que $\mu = r$ y además $q_s = q_f = r$. Tal método de valuación es que se empleará en los ejemplos numéricos. En caso que existiera aleatoriedad en las secuencias $\{x^N\}$, $\{W^0\}$ y $\{W^N\}$, no sería posible trabajar bajo el enfoque anterior pues los flujos de ingresos no podrían ser replicados utilizando el activo riesgoso y el activo libre de riesgo, y por tanto se tendrían que estimar adecuadamente q_f y q_s.

Finalmente, es posible adaptar este modelo para comparar cambios en la forma de cobro de comisiones cuando ciertos grupos de afiliados antiguos mantienen su tipo de comisión anterior, mientras que los nuevos afiliados están sujetos a la nueva forma de cobro. Tal situación se podrá modelar mediante cambios en la estructura de VPC_f^0 y VPC_s^N en función del tipo de comisión que seleccionan los afiliados, i.e., ciertos $x^0(t_0)$ podrán multiplicar valores presentes de comisiones correspondientes al otro tipo de comisión.

En la siguiente sección se estudia el efecto que tiene la interrupción de aportes en los métodos de comparación descritos en la Sección 2.3. Tal proceso de interrupción, como se verá a continuación, se introduce por medio de un proceso estocástico que representa la ocurrencia o no de aportes en un periodo respectivo.

3. Interrupción de aportes

Existe la posibilidad de que el afiliado no sea capaz de contribuir con un monto $W_i > 0$ para todo i. Para representar tales interrupciones, introducimos un proceso estocástico $Z = \{Z_i,\ 0 \le i \le T-1\}$, independiente del proceso B, tal que Z es una secuencia de variables aleatorias independientes $Z_i \sim$ Bernoulli (p_i) con al menos un i^* tal que $p_{i^*} > 0$. Si $Z_i = 0$, no existiría contribución en el periodo i, lo que ocurre con probabilidad $1–p_i$. Asimismo, denotamos como P_T a la secuencia de probabilidades de aportar, i.e., $P_T = \{p_i \mid p_i \in [0,1],\ 0 \le i \le T–1\}$.

El proceso Z es una de las formas más simples de incluir interrupciones en la secuencia $\mathcal{W}_T = \{W_i \mid W_i > 0,\ \ 0 \le i \le T-1\}$. Adicionalmente, $\mathcal{W}_T$ podría ser interpretada como el flujo de contribuciones representativas para grupos homogéneos de afiliados compartiendo un mismo T. Por ejemplo, es posible determinar $\mathcal{W}_T$ mediante proyecciones de salarios dependiendo de una tasa de crecimiento promedio que es a su vez función de la edad, sexo, nivel educativo, etc.

También definimos

$$\widehat{W_s}(T) = \sum_{i=0}^{T-1} Z_i W_s^i(T), \tag{57}$$

$$\widehat{W_f}(T) = \sum_{i=0}^{T-1} Z_i W_f^i(T), \tag{58}$$

donde $W_s^i(T)$ y $W_f^i(T)$ están dados por (2) y (11), respectivamente. Ambos $\widehat{W_s}(T)$ y $\widehat{W_f}(T)$ representan riqueza terminal (bajo los esquemas de saldo y flujo) cuando las interrupciones se modelan a través del proceso estocástico Z.

Calculando los valores esperados de $\widehat{W_s}(T)$ y $\widehat{W_f}(T)$ tenemos

$$\mathbb{E}[\widehat{W_s}(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[Z_i W_s^i(T)] = e^{(\mu-\delta)T} \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i e^{-(\mu-\delta)i}, \tag{59}$$

$$\mathbb{E}[\widehat{W_f}(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[Z_i W_f^i(T)] = e^{-\alpha+\mu T} \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i e^{-\mu i}. \tag{60}$$

Para obtener (59) y (60), se ha utilizado la independencia de Z_i con respecto a $W_s^i(T)$ y $W_f^i(T)$. Las varianzas de $\widehat{W_s}(T)$ y $\widehat{W_f}(T)$ pueden ser determinadas utilizando la siguiente proposición.

Proposición 3.1 (Varianza de riqueza terminal) *Bajo el proceso de interrupción Z, las varianzas de* $\widehat{W_s}(T)$ y $\widehat{W_f}(T)$ *en (57) y (58) son*

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(\widehat{W_s}(T)\right) = & \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1\right) \\ & + \sum_{i=0}^{T-1} p_i (1-p_i) W_i^2 e^{\left(2(\mu-\delta)+\sigma^2\right)(T-i)} \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(\widehat{W_f}(T)\right) = & \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{-2\alpha+\mu(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1\right) \\ & + \sum_{i=0}^{T-1} p_i (1-p_i) W_i^2 e^{-2\alpha+(2\mu+\sigma^2)(T-i)} \end{aligned} \tag{62}$$

Demostración: Ver Apéndice C.

Si se asume $p_i = p$ con $p \in (0,1]$ para todo $0 \le i \le T-1$, el afiliado tiene la misma probabilidad de contribuir en cada periodo (mes). En consecuencia, la probabilidad p se puede interpretar como la densidad de cotización del afiliado.

Si en la comparación de comisiones se utilizan los valores esperados de riqueza terminal ajustados por comisiones, entonces se define

$$\widehat{\mathrm{RE}}_{sf} = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W_s}(T)]}{\mathbb{E}[\widehat{W_f}(T)]}, \tag{63}$$

donde $\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]$ y $[\widehat{W}_f(T)]$ se encuentran en (59) y (60), respectivamente. La regla de decisión para determinar el tipo de comisión más conveniente es la misma que en el caso de RE_{sf} en (15). Si en el proceso Z se asume que existe $i^{**} \neq i^*$ tal que $p_{i^{**}} \in (0,1]$, y si consideramos $\widehat{\mathrm{RE}}_{sf}$ en (63) como una función de la tasa de crecimiento μ, entonces para todo μ y $T>1$:

$$\frac{\partial \widehat{\mathrm{RE}}_{sf}(\mu)}{\partial(\mu)} < 0 \tag{64}$$

La derivación del resultado anterior es similar al de la expresión (18). Si $p_i = p$ para todo i con $p \in (0,1]$, el *ratio* $\widehat{\mathrm{RE}}_{sf}$ se vuelve independiente del proceso de interrupción Z y de la densidad de cotización p, i.e., $\widehat{\mathrm{RE}}_{sf} = \mathrm{RE}_{sf}$.

En el caso de la comparación de las inversas de los coeficientes de variación de los fondos finales ajustados tenemos:

$$\widehat{\mathrm{H}}_s = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]}{\sqrt{\mathrm{Var}\,[\widehat{W}_s(T)]}}, \qquad y \qquad \widehat{\mathrm{H}}_f = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)]}{\sqrt{\mathrm{Var}\,[\widehat{W}_f(T)]}}, \tag{65}$$

donde las varianzas de $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ se obtienen por la Proposición 3.1. Bajo el proceso de interrupción Z, no es posible demostrar la monotonicidad de $\widehat{\mathrm{H}}_f$ respecto de μ tal como se hizo en (40). Sin embargo, es posible analizar el efecto de la densidad de cotización p en $\widehat{\mathrm{H}}_s$ y $\widehat{\mathrm{H}}_f$ a través de la siguiente proposición.

Proposición 3.2 (Impacto de p en $\widehat{\mathrm{H}}_s$ y $\widehat{\mathrm{H}}_f$) *En el proceso Z se asume* $p_i = p$ tal que $p \in (0,1]$, *se consideran a* $\widehat{\mathrm{H}}_s$ y $\widehat{\mathrm{H}}_f$ *en (65) como funciones de p. Bajo tales supuestos se cumple lo siguiente:*

(1) Si $\mu + \sigma^2 < 0$, $W_{i+1} \geq W_i$ *para todo* $0 \leq i \leq T-1$ y $T > 1$, *entonces existe* $p^* \in (0,1)$ *tal que* $\widehat{\mathrm{H}}_s(p) < \widehat{\mathrm{H}}_f(p)$ *cuando* $p < p^*$.

(2) Si $\mu - \delta + \sigma^2 > 0$, $W_{i+1} \leq W_i$ *para todo* $0 \leq i \leq T-1$ y $T > 1$, *entonces* $\widehat{\mathrm{H}}_s(p) > \widehat{\mathrm{H}}_f(p)$ *para todo p.*

Demostración: Ver Apéndice D.

La Proposición 3.2 muestra que la densidad de cotización p podría afectar la comparación de comisiones cuando se utiliza la inversa del coeficiente de variación. Además bajo ciertas condiciones la comisión por flujo se beneficiaría con una reducción en p. Notar que cuando $p = 1$, $\widehat{\mathrm{H}}_s(1) > \widehat{\mathrm{H}}_f(1)$ sin necesidad de los supuestos considerados.

Sea la función de utilidad U dada en (45), entonces las utilidades esperadas de $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ son

$$\mathbb{E}[U(\widehat{W}_s(\mathrm{T}))] = \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)] + b(2\mathbb{E}\left[\widehat{W}_s(T)\right]^2 - \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2]), \tag{66}$$

$$\mathbb{E}[U(\widehat{W}_f(\mathrm{T}))] = \mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)] + b(2\mathbb{E}\left[\widehat{W}_f(T)\right]^2 - \mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)^2]). \tag{67}$$

Las expresiones para $\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2]$ y $\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)^2]$ se pueden derivar a través de (59) y (60), y la Proposición 3.1. A la función Υ en (48) le añadimos como argumento la densidad de cotización *p*, con lo cual

$$\Upsilon(b, p, \delta) = \mathbb{E}\Big[U\Big(\widehat{W}_s(T)\Big)\Big] + \mathbb{E}\Big[U\Big(\widehat{W}_f(T)\Big)\Big]. \tag{68}$$

Dado un escenario $\mathbf{N} = \{T, \alpha, \mu, \sigma^2, \mathcal{W}_T, P_T\}$ definimos (de manera similar que en la Sección 2.3) la comisión por saldo neutral al riesgo, $\delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$, , al valor de δ tal que $\widehat{\mathrm{RE}}_{sf} = 1$. Es posible también definir la función Υ en (68) como una función de *b, p* y α, y realizar el análisis asumiendo un valor fijo de la comisión por saldo; pero, como tal especificación produce resultados congruentes con los que se van a obtener en la presente sección no se van a hacer explícitos los resultados.

La siguiente proposición estudia el comportamiento de Υ en (68) como función del coeficiente de aversión al riesgo *b* bajo supuestos en la secuencia $\mathcal{W}_T$; pero antes de ello introducimos una forma particular de la sucesión de aportes.

Se puede asumir el siguiente flujo de contribuciones

$$W_i = W_0 e^{\beta i}, \ \beta \in \mathbb{R}, \quad W_0 > 0 \quad y \quad 0 \le i \le T-1; \tag{69}$$

entonces, β es la tasa de crecimiento mensual de las contribuciones, y la contribución inicial es W_0. Notar que bajo el modelo de crecimiento exponencial[13] en (69) se tiene $W_i > 0$ para todo *i*.

Proposición 3.3 (Efecto de la aversión al riesgo sobre Υ) *Sean* $T > 1$, $b > 0$, $p_i = p \in (0,1]$, *en Z, y* $\delta^*_{\mathrm{N}} = \delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$ *la comisión por saldo neutral al riesgo, donde* $N = \{T, \alpha, \mu, \sigma^2, \mathcal{W}_T\}$. *Los siguientes postulados se cumplen:*

(1) Si $\mu - \delta + \sigma^2 > 0$, *y* $W_{i+1} \le W_i$ *para todo* $0 \le i \le T-1$, *entonces* $\Upsilon\left(b, p, \delta^*_{\mathrm{N}}\right) > 0$ *y* $\partial_b \Upsilon\left(b, p, \delta^*_{\mathrm{N}}\right) > 0$.

(2) Si $\mathcal{W}_T$ *es dado por (69) y* $\mu - \delta + \sigma^2 > \beta$ *entonces* $\Upsilon\left(b, p, \delta^*_{\mathrm{N}}\right) > 0$ *y* $\partial_b \Upsilon\left(b, p, \delta^*_{\mathrm{N}}\right) > 0$.

Demostración*:* Ver Apéndice E.

La Proposición 3.3 brinda condiciones bajo las cuales la comisión por saldo genera mayor utilidad esperada que la comisión por flujo cuando se incrementa la aversión al riesgo y se considera la interrupción de aportes. Notar que si $p = 1$ se puede afirmar directamente que $\Upsilon\left(b, 1, \delta^*_{\mathrm{N}}\right) > 0$ y $\partial_b \Upsilon\left(b, 1, \delta^*_{\mathrm{N}}\right) > 0$ debido a que $\mathrm{H}_s > \mathrm{H}_f$ siempre se cumple (ausencia de interrupciones). La parte (1) es más general pues solo requiere $\mu > \delta$ y una sucesión decreciente de contribuciones. Por otro lado, (2) requiere una tasa de crecimiento de contribuciones, β, que

[13] Modelos alternativos para $\mathcal{W}_T$ se encuentran en la literatura. Por ejemplo, Devesa-Carpio y Vidal (1997) proponen un modelo en el cual las contribuciones se incrementan con la edad hasta llegar a un máximo, y a partir de tal punto decrecen gradualmente. Carriere y Shand (1998) asumen que las contribuciones se incrementan con la edad; pero, a una tasa decreciente debido a un factor de mérito que disminuye con el tiempo. Devesa-Carpio *et al.* (2003) propone una función polinómica para modelar las contribuciones como una función de la edad del afiliado.

no exceda a $\mu-\delta+\sigma^2$. Notar que el resultado mostrado depende de un valor particular de δ (dado por la comisión por saldo neutral al riesgo δ^*_{N}) debido a que valores arbitrarios no pueden garantizar que la Proposición 3.3 se cumpla.

Proposición 3.4 (Efecto de la densidad de cotización sobre Υ) *Sean* $T>1$, $b>0$, $p_i=p\in(0,1]$, *en el proceso* Z y $\delta^*_{\mathrm{N}}=\delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$ es *la comisión por saldo neutral al riesgo, donde* $\mathbf{N}=\left\{T,\ \alpha,\ \mu,\ \sigma^2,\ \mathcal{W}_T\right\}$. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si $\mu-\delta+\sigma^2>0$ *y* $W_{i+1}\le W_i$ *para todo* $0\le i\le T-1$ *entonces* $\partial_p\Upsilon\left(b,\ p,\delta^*_{\mathrm{N}}\right)>0$ *para* $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(2) Si $\mathcal{W}_T$ *es dado por (69) y* $\mu-\delta+\sigma^2>\beta$ *entonces* $\partial_p\Upsilon\left(b,\ p,\delta^*_{\mathrm{N}}\right)>0$ *para* $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Demostración*:* Ver Apéndice F.

Hasta el momento se ha demostrado que bajo ciertas condiciones $\Upsilon\left(b,\ p,\delta^*_{\mathrm{N}}\right)>0$ y además es estrictamente creciente en *b* y *p*. La siguiente proposición generaliza los resultados de la Proposición 2.1 sobre la monotonicidad de $\Upsilon(b,\ p,\ \delta)$ con respecto de δ al incluir interrupción de aportes.

Proposición 3.5 (Monotonicidad de Υ respecto de δ) *Sea* $T>1$, $b>0$, $p_i=p\in(0,1]$ *en el proceso* Z *y algún escenario* $\mathbf{N}=\left\{T,\ \alpha,\ \mu,\ \sigma^2,\ \mathcal{W}_T\right\}$. *Si* $\sigma^2\le\frac{1}{T}\ln(2p)$, *entonces* $\partial_\delta\Upsilon\left(b,\ p,\delta^*_{\mathrm{N}}\right)<0$.

Demostración*:* Ver Apéndice G.

Dado un conjunto de parámetros $\mathbf{A}=\{T,\alpha,\mu,\sigma^2,\mathcal{W}_T,P_T\}$, definimos de manera similar que en la Sección 2.3) la comisión por saldo aversa al riesgo, $\delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A})$, como el valor δ tal que $\mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_s(T)\right)\right]$ es igual a $\mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_f(T)\right)\right]$. Si consideramos $\sigma^2\le\frac{1}{T}\ln(2p)$, además de los supuestos de la Proposición 3.3 (incluyendo el caso de la secuencia de aportes con crecimiento exponencial) se puede verificar que $\delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A})>\delta^*_{\mathrm{N}}(\mathbf{N})$ y $\partial_b\delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A})>0$ para cualquier $b>0$ y $p\in(0,1)$. Asimismo, va a existir $\delta^*_I(\mathbf{I})$, , que es la comisión por saldo que hace $2\mathbb{E}\left[\widehat{W}_s(T)\right]^2-\mathbb{E}\left[\widehat{W}_s(T)^2\right]$ igual a $2\mathbb{E}\left[\widehat{W}_f(T)\right]^2-\mathbb{E}\left[\widehat{W}_f(T)^2\right]$ para $\mathbf{I}=\left\{T,\ \alpha,\ \mu,\ \sigma^2,\ \mathcal{W}_T,\ p\right\}$. Notar que la comisión $\delta^*_I(\mathbf{I})$, se puede interpretar como la comisión por saldo aversa al riesgo cuando $b\to\infty$, i.e., $\lim_{b\to\infty}\delta^*_{\mathrm{A}}(\mathbf{A})=\delta^*_I(\mathbf{I})$. Además podemos colegir que $\partial_b\Upsilon(b,p,\delta)>0$ cuando $\delta<\delta^*_I(\mathbf{I})$ y $\partial_b\Upsilon(b,p,\delta)<0$ cuando $\delta>\delta^*_I(\mathbf{I})$. Finalmente, no es posible determinar condiciones de monotonicidad similares para Υ respecto de *p* cuando $b>0$ y $\delta>0$ son arbitrarios.

La comparación entre $\mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_s(T)\right)\right]$ y $\mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_f(T)\right)\right]$ también pudo ser realizada utilizando los respectivos equivalentes de certeza: $CE\left[\widehat{W}_s(T)\right]$ y $CE\left[\widehat{W}_f(T)\right]$. Definimos, el siguiente *ratio* para establecer tal comparación:

$$\Delta CE_{sf}=\frac{CE\left[\widehat{W}_s(\mathrm{T})\right]}{CE\left[\widehat{W}_f(\mathrm{T})\right]}-1. \tag{70}$$

Si $\Delta CE_{sf}>0$, la comisión por saldo resultaría preferible. Si $\Delta CE_{sf}<0$, la comisión por flujo resultaría preferible. Adicionalmente, cuando $\Delta CE_{sf}=0$ el afiliado sería indiferente entre ambos tipos de comisión. Bajo la función de

utilidad cuadrática en (45) y utilizando la parte de la función que es creciente en términos de la riqueza ajustada, se verifica que

$$CE\left[\widehat{W}_s(T)\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{W}_s(T)\right] + \frac{1}{2b} - \sqrt{\left(\frac{1}{2b}\right)^2 + \text{Var}\ \widehat{W}_s(T)}, \tag{71}$$

$$CE\left[\widehat{W}_f(T)\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{W}_f(T)\right] + \frac{1}{2b} - \sqrt{\left(\frac{1}{2b}\right)^2 + \text{Var}\ \widehat{W}_f(T)}. \tag{72}$$

Notar que las proposiciones que describen el comportamiento de $\mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_s(T)\right)\right] - \mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_f(T)\right)\right]$ también aplican para $CE\left[\widehat{W}_s(T)\right] - CE\left[\widehat{W}_f(T)\right]$; pero, ellas no pueden ser generalizadas para describir ΔCE_{sf}.

Finalmente, si $\mathcal{W}_T$ tiene una estructura tal que $W_{i+1} = \rho_i W_i$ con $W_0 > 0$, entonces ΔCE_{sf} sería independiente de W_0 dependiendo de la función de utilidad seleccionada. Para el caso de la utilidad cuadrática, el *ratio* se vería afectado por la contribución inicial y esto generaría una nueva dimensión en el análisis.

4. Aplicación de la metodología al Sistema Privado de Pensiones del Perú

En esta sección se presenta la aplicación de la metodología propuesta al Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP). Esta aplicación es relevante debido a que el SPP está atravesando un proceso importante de reforma después de 20 años de ser creado.[14] Parte de la reforma consiste en el cambio de comisión por flujo a saldo, y es en parte por ello que este artículo de investigación analiza el efecto de ciertas variables en la comparación de dichas comisiones.

4.1. Parámetros del modelo

Para las aplicaciones numéricas se ha considerado una edad de jubilación de 65 años y dos escenarios: moderado y agresivo, los cuales corresponderían a los fondos de riesgo medio y alto del SPP. Se han fijado además tres niveles de comisión por flujo (expresados como porcentajes del salario del afiliado): $f_{min} = 1.47\%$, $f_{max} = 1.84\%$, y $f_{pro} = 1.615\%$; los cuales corresponden al cargo mínimo, máximo y promedio por flujo del SPP a diciembre de 2013, respectivamente. Como los trabajadores dependientes en el Perú están sujetos a una contribución obligatoria de 10% del salario y f_i se aplica sobre este último, tenemos $\alpha_i = -\ln(1-10f_i)$ con lo cual $\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{max} = 0.2033$ y $\alpha_{pro} = 0.1761$. Es importante mencionar que no se está incluyendo el cargo correspondiente a la prima de seguro obligatoria.

[14] La Ley Nº 29903 contiene los principales aspectos de la reforma. Uno de los cuales es que los afiliados migrarán a una comisión mixta, la que tiene un componente por flujo transitorio decreciente de 10 años, y a partir del décimo año el cargo sería únicamente por saldo. La reforma también incluye el mecanismo de subasta de las nuevas cuentas individuales de capitalización y normas para incorporar a trabajadores independientes.

Para aplicar la metodología es fundamental estimar los parámetros μ y σ del proceso estocástico del valor cuota del fondo para los escenarios moderado y agresivo, y determinar la sucesión de contribuciones del afiliado. Tales contribuciones se expresan usualmente como porcentajes de los salarios y estos últimos son afectos por inflación. En un mercado con rendimientos aleatorios es sabido que existe una correlación entre la tasa de inflación y rendimiento. Con ello, introducir aleatoriedad en rendimientos pero no en inflación podría llevar a falsas conclusiones. Por tal razón, en la aplicación práctica al SPP se emplean tanto rendimientos reales como contribuciones (determinísticas) reales. Los detalles de la calibración de los parámetros del valor cuota del fondo se muestran en el Apéndice A.1. A manera de resumen, para el escenario moderado se tiene $\mu_M = 5.3\%$ anual y $\sigma_M = 8.7\%$ anual, lo que genera un rendimiento real promedio en tiempo continuo, r_M igual a 4.90% anual (equivalente a 5.00% efectivo anual). Para el escenario agresivo se tiene $\mu_A = 7.8\%$ anual y $\sigma_A = 14.6\%$ anual, lo que genera un rendimiento real promedio en tiempo continuo, r_A, igual a 6.78% anual (equivalente a 7.01% efectivo anual). La tasa libre de riesgo también se ha estimado y se considera $r = 1.52\%$ real anual en tiempo continuo.

La sucesión mensual de las contribuciones reales del afiliado ($\mathcal{W}_T$) se asume tal que $W_{i+1} = (1+\tau_i)W_i$ para $i \geq 0$ y $W_0 > 0$ arbitrario. Los factores mensuales τ se calculan mediante la suma del crecimiento correspondiente a lo largo de la curva de salario más un componente de ganancia por incremento de productividad. Asimismo, τ depende de diferentes clasificaciones de los afiliados según su género, nivel educativo y edad. Los detalles de la calibración de los factores se muestran en el Apéndice A.2; pero es importante mencionar que para afiliados jóvenes los factores promedio de crecimiento fluctúan entre 2.5% y 3.5% anual.

A pesar que sus supuestos de independencia son fuertes, el proceso de interrupción Z es suficientemente flexible debido a que la secuencia de probabilidades p_i pueden reflejar diferentes perfiles de contribución y circunstancias de los afiliados. Sin embargo, en esta aplicación hemos considerado el caso más simple: $p_i = p \in (0,1]$ para todo i. El objetivo detrás de este supuesto es demostrar, en la forma más directa, el efecto de la densidad de cotización, p, en la comparación de comisiones por flujo y saldo. Futuras investigaciones podrán incluir formas más sofisticadas y/o adecuadas para p_i, y analizar su impacto en los sistemas de cobro. Se consideran en la aplicación dos escenarios para la densidad de cotización: $p = 100$ (asume una sucesión ininterrumpida de contribuciones) y $p = 0.458$ (densidad de cotización promedio del SPP a diciembre de 2012). El Cuadro 8 de SBS (2013) muestra la densidad de cotización para diferentes grupos de edades del SPP. Con lo que, según la base de afiliados del SPP, el valor de $p = 0.458$ es representativo pues no se observan diferencias marcadas de la densidad de cotización por grupo de edad.

4.2. Resultados numéricos

En esta sección presentamos los resultados numéricos correspondientes a las diversas formas de comparación de comisiones por flujo y saldo descritas en las secciones previas.

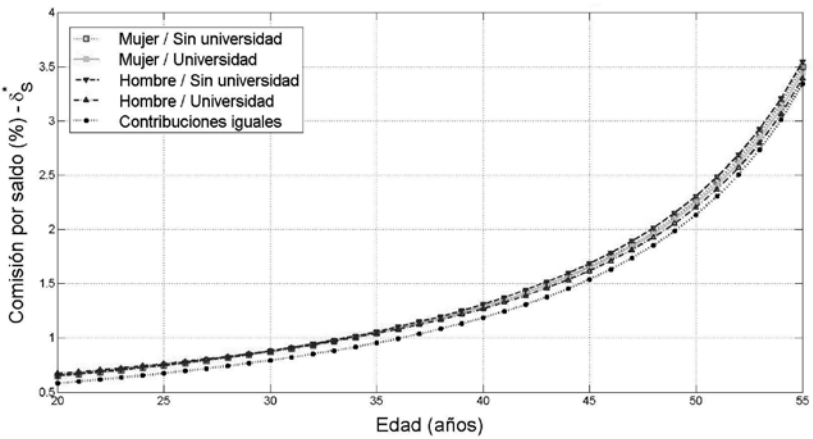
4.2.1. Comisión por saldo neutral al riesgo (δ_N^*)

La Tabla 3 muestra los valores de δ_N^* anualizada y en porcentaje, para ciertas edades, cinco perfiles (*M/SU, M/U, H/SU, H/U* y *E*) donde los primeros cuatro se describen en la Tabla 2, un escenario moderado (asume un rendimiento anual real del fondo igual a 5% efectivo anual) y tres valores distintos de comisión por flujo correspondientes a 1.47%, 1.615% y 1.84% del salario ($\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$). La Tabla 4 muestra la misma información pero para el escenario agresivo, el cual asume una rentabilidad anual real del fondo igual a 7.01%. Notar además que δ_N^* es independiente de la contribución inicial $W_0 > 0$. Se puede observar en ambas tablas que δ_N^* es estrictamente creciente con la edad (o estrictamente decreciente en *T*) para un perfil, un α y un escenario fijo de rentabilidad. Asimismo, δ_N^* es estrictamente decreciente en la tasa de crecimiento tal como se derivó en la expresión (18), esto para *T*, α y perfil de contribuciones fijos. En el escenario moderado y considerando un afiliado de 30 años con perfil *H/SU* (según la Tabla 2), se tiene $\delta_N^* = 0.792\%$ anual para $\alpha_{min} = 0.1590$, $\delta_N^* = 0.879\%$ para $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\delta_N^* = 1.019\%$ para $\alpha_{max} = 0.2033$. Por ejemplo, esto implica que cuando se considera una comisión por flujo igual a α_{min} un cargo por saldo menor a 0.792% hará preferible la comisión por saldo para el afiliado de 30 años y perfil *H/SU*. En el escenario agresivo dichas comisiones límite serían 0.707% para α_{min}, 0.784% para α_{pro} y 0.908% para α_{max}. Notar que $\delta_N^* > 0.518\%$ para todos los escenarios de las Tablas 3 y 4 (sin considerar el perfil *E*). Tal valor corresponde a un afiliado de 20 años de edad con perfil *M/SU* y bajo un escenario agresivo de rentabilidad del fondo. Es decir, que una tasa de comisión por saldo menor o igual a 0.518% haría preferible a tal comisión para todos los tipos de afiliados (sin *E*) y escenarios considerados. Asimismo, las diferencias entre δ_N^* para los distintos perfiles (sin *E*) son de alrededor de 0.04% para afiliados menores a los 40 años, esto implica que las diferentes tasas de crecimiento de salario generan valores bastante similares de δ_N^*. También se ha incluido un caso particular, *E*, el que corresponde a una secuencia de contribuciones reales iguales a $W_0 > 0$. Los valores de δ_N^* que genera *E* bajo el escenario moderado son similares a los del escenario agresivo (sin considerar *E* y para un mismo α). Este hecho es interesante porque la diferencia entre los rendimientos esperados de los escenarios moderado y agresivo es 2% anual, mientras que la tasa de crecimiento de las contribuciones es cercana a 2% para los diferentes perfiles. Entonces, un incremento de las contribuciones produce un efecto similar en δ_N^* que un incremento similar en el rendimiento esperado del fondo. La Figura 1 muestra el gráfico de δ_N^* como una función de la edad y perfil de contribuciones pero solo para el escenario moderado y considerando α_{prom}.

Bajo el supuesto de existencia de la medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$ es posible determinar la comisión por saldo que hace a los precios p_s en (19) y p_f en (20) iguales. Tal comisión de indiferencia equivale a δ_N^* cuando μ es igual a la tasa libre de riesgo *r*. La Tabla 5 resume tal información para distintas edades de afiliados, tasas de la comisión por flujo y perfiles de aporte. Además, debido a la propiedad (18) todos los valores de la Tabla 5 son mayores que los de las Tablas 3 y 4. Por ejemplo, para un afiliado de 20 años bajo una comisión por flujo α_{pro}, el promedio de δ_N^* excluyendo el perfil *E* es igual a 0.85% para *r* equivalente a 1.52% anual (Tabla 5) mientras que se tienen 0.66% y 0.58% en

el caso de rendimientos del fondo correspondientes a 5.00% anual (Tabla 3) y 7.01% anual (Tabla 4), respectivamente. Para la misma edad pero bajo α_{min}, los valores promedio de la comisión de indiferencia serían 0.77%, 0.60% y 0.52%; y, para α_{max} tendríamos 0.99%, 0.76% y 0.67%. Finalmente, a medida que la edad del afiliado se incrementa, las diferencias entre las respectivas comisiones de las Tablas 3 y 5 se hacen más significativas.

FIGURA 1
COMISIÓN POR SALDO NEUTRAL AL RIESGO, δ_{N}^{*}



Comisión por saldo neutral al riesgo, δ_{N}^{*}, en porcentaje (%) y anualizada para diferentes combinaciones de edad y género/educación bajo un escenario moderado (r_M = 4.90% anual en tiempo continuo). Se ha incluido el caso de contribuciones iguales (*E*). Se ha asumido $\alpha = 0.1761$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.615% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último) y una edad de jubilación de 65 años.

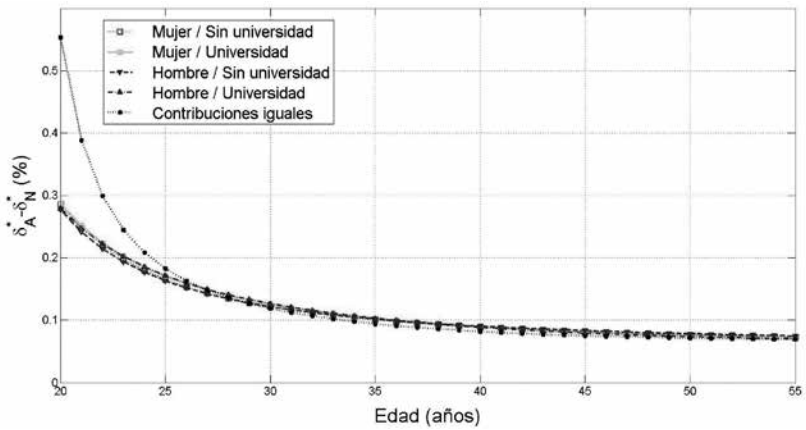
4.2.2. Comisión por saldo aversa al riesgo δ_{A}^{*}

Queremos estudiar el efecto de la aversión al riesgo en δ_{A}^{*}. Recordar que δ_{A}^{*} es la comisión por saldo que hace $\mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_s(T)\right)\right]$ es igual a $\mathbb{E}\left[U\left(\widehat{W}_f(T)\right)\right]$ bajo la función de utilidad cuadrática en (45). De manera más específica, se brindará información acerca de $\delta_{\mathrm{A}}^{*} - \delta_{\mathrm{N}}^{*}$ con el efecto de aislar el efecto causado por la aversión al riesgo. La Tabla 6 muestra los valores de $\delta_{\mathrm{A}}^{*} - \delta_{\mathrm{N}}^{*}$, anualizados y en porcentaje, para distintas edades, perfiles de contribución (ver Tabla 2) y valores de comisión por flujo pero bajo el escenario moderado de rentabilidad. Se ha asumido $p = 1$, i.e., no hay interrupción en la secuencia de contribuciones y $b \to \infty$ (caso extremo de aversión al riesgo). Notar que cuando b se acerca a infinito δ_{A}^{*} se vuelve independiente de la contribución inicial $W_0 > 0$ porque se necesita encontrar δ tal que $2\mathbb{E}\left(\widehat{W}_s(T)\right)^2 - \mathbb{E}\left[\widehat{W}_s(T)\right]^2$ es igual a $2\mathbb{E}\left(\widehat{W}_f(T)\right)^2 - \mathbb{E}\left[\widehat{W}_f(T)\right]^2$, y es posible factorizar W_0^2 en ambas expresiones.

Los resultados numéricos de la Tabla 6 (escenario moderado) muestran que $\delta_{\mathrm{A}}^{*} - \delta_{\mathrm{N}}^{*}$ se mantiene estable para los perfiles *M/SU, M/U, H/SU,* y *H/U*. Por ejemplo,

$\delta^*_A - \delta^*_N \approx 0.021\%$ para α_{min}, $\delta^*_A - \delta^*_N \approx 0.024\%$ para α_{pro} y $\delta^*_A - \delta^*_N \approx 0.027\%$ para α_{max}. En el caso del perfil *E*, los valores de $\delta^*_A - \delta^*_N$ tienden a ser 0.005% menores que los correspondientes a los otros perfiles. Sin embargo, y tal como lo indican los valores de la Tabla 7, la situación cambia dramáticamente cuando se considera el escenario agresivo. Por ejemplo, si consideramos los perfiles de la Tabla 2 (se excluye *E*) para un afiliado de 20 años $\delta^*_A - \delta^*_N \approx 0.25\%$ para α_{min}, $\delta^*_A - \delta^*_N \approx 0.28\%$ para α_{pro} y $\delta^*_A - \delta^*_N \approx 0.32\%$ para α_{max}. Sin embargo, para un afiliado de 50 años tales valores no excederían a 0.1%. Además, el perfil *E* tiende a presentar valores de $\delta^*_A - \delta^*_N$ mayores, sobre todo en afiliados menores de 25 años. La Figura 2 muestra los valores de $\delta^*_A - \delta^*_N$ como función de la edad y del perfil de contribución para el escenario agresivo y α_{pro}.

FIGURA 2
EFECTO DE LA AVERSIÓN AL RIESGO: $\delta^*_A - \delta^*_N$



Comisión por saldo aversa al riesgo menos comisión por saldo neutral al riesgo, $\delta^*_A - \delta^*_N$, en porcentaje (%) y anualizada para diferentes combinaciones de edad y género/educación bajo un escenario agresivo (r_A = 7.68% anual en tiempo continuo). Se ha incluido el caso de contribuciones iguales (*E*). Se ha asumido $b \to \infty$, $p = 1$ (sin interrupciones), $\alpha = 0.1761$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.615% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último) y una edad de jubilación de 65 años.

4.2.3. Comparación de equivalentes de certeza (ΔCE_{sf})

En esta sección vamos a estudiar el *ratio*

$$\Delta CE_{sf} = \frac{CE\left[\widehat{W}_s(T)\right]}{CE\left[\widehat{W}_f(T)\right]} - 1 \tag{73}$$

El valor de ΔCE_{sf}, bajo función de utilidad cuadrática tiene expresión analítica explícita debido a que las fórmulas (71) y (72) pueden utilizarse en (73).

Pero, ΔCE_{sf}, dependerá de W_0 inclusive se asume $\mathcal{W}_T$ como en la Sección 4.1.2. En consecuencia, este hecho complica el estudio del comportamiento de ΔCE_{sf} debido a cambios en b y p porque los resultados dependerán también de W_0. Una alternativa para eliminar la dependencia de W_0 es utilizar una función de utilidad tal que ΔCE_{sf} sea independiente de W_0 cuando $\mathcal{W}_T$ se asume como en la Sección 4.1. Si utilizamos una función de utilidad CRRA de la forma

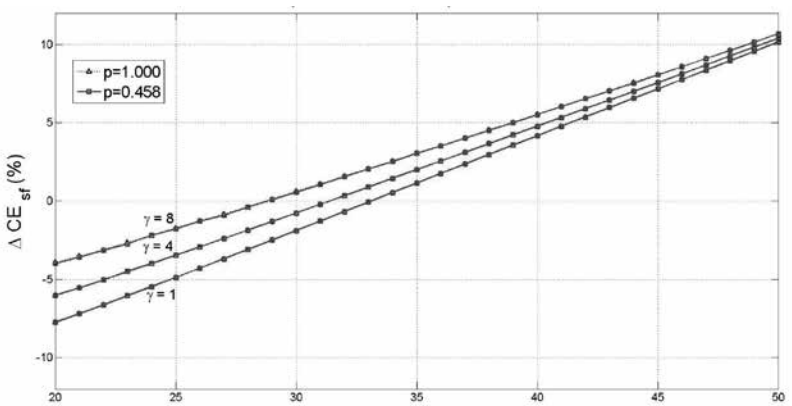
$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{74}$$

donde W es la riqueza terminal ajustada y $\gamma > 0$, entonces ΔCE_{sf} no dependerá de W_0. Este hecho será importante para separar el efecto de la aversión al riesgo y de la densidad de cotización en ΔCE_{sf} del causado por W_0. Es importante mencionar que las expresiones para $CE\left[\widehat{W}_s(T)\right]$ y $CE\left[\widehat{W}_f(T)\right]$ no están disponibles para (74), con lo que se tendrá que utilizar simulación para obtener un estimador de ΔCE_{sf}.

La Tabla 8 presenta los valores estimados de ΔCE_{sf} para: diferentes edades, dos valores de densidad de cotización (p = 1.00 y p = 0.458), el perfil de contribuciones *M/SU* (como los resultados para los otros perfiles de la Tabla 2 son muy similares entre sí estos no se han reportado) y los escenarios moderado y agresivo descritos en la Sección 4.1. Siguiendo a Poterba *et al*. (2005), se consideran tres valores distintos de aversión al riesgo del afiliado: $\gamma = 1$ para un grado bajo y en este caso $U(W) = \ln(W)$, $\gamma = 4$ para un grado moderado y $\gamma = 8$ para un grado alto. El valor de la comisión por saldo, δ, se fija en 1% anual, y el valor de la comisión por flujo, α, se fija en 0.1761. El número de caminos muestrales de la riqueza ajustada utilizados para estimar ΔCE_{sf} se determinó utilizando el procedimiento secuencial de Kelton y Law (2000) con un error relativo de 0.0001 y un nivel de confianza de 99 %. Asimismo, las Figuras 3 y 4 resumen la información contenida en la Tabla 8.

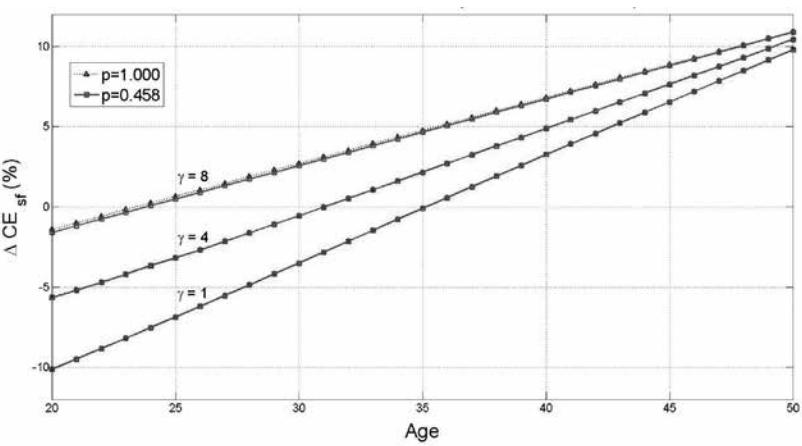
A partir de los resultados obtenidos se observa la poca o casi nula influencia que tiene la densidad de cotización en ΔCE_{sf}, esto en consecuencia a que las curvas correspondientes a p = 1.00 y p = 0.458 prácticamente se superponen en las Figuras 3 y 4. La mayor diferencia causada por la densidad de cotización se obtiene para el escenario agresivo y cuando $\gamma = 8$, tal diferencia no excede a 0.2%. Asimismo, se puede observar que ΔCE_{sf} es una función creciente en γ para una edad fija, esto corrobora parcialmente la Proposición 3.3 en relación con el hecho que a mayor aversión al riesgo la comisión por saldo mejora respecto de su par por flujo. Sin embargo, no se obtiene $\Delta CE_{sf} > 0$ para toda edad, pues estamos fijando δ en 1% en vez de trabajar con la comisión por saldo neutral al riesgo, δ_{N}^{*}, correspondiente. Además, a partir de cierta edad se tiene que $\Delta CE_{sf} > 0$ (tal edad depende de los valores considerados para las variables), lo que en parte verifica el rol que tiene δ_I^{*} en la función γ según lo establecido como consecuencia de los resultados de la Proposición 3.5. Consecuentemente, incrementos en γ, manteniendo fijas las otras variables, tienden a disminuir la edad a partir de la cual la comisión por saldo se torna favorable. Asimismo, si δ disminuye, i.e., la comisión por saldo se vuelve más atractiva, las curvas de ΔCE_{sf} correspondientes a un γ fijo deberían subir. También, a medida que aumenta el riesgo del fondo el efecto de la aversión al riesgo es más marcado,

FIGURA 3
DIFERENCIA PORCENTUAL EN CE (ESCENARIO MODERADO)



Valores estimados de $\Delta CE_{sf} = CE\left[\widehat{W}_s(T)\right] / CE\left[\widehat{W}_f(T)\right] - 1$ en porcentaje (%) para diferentes edades, valores del coeficiente de aversión al riesgo (γ = 1, 4, 8) y densidades de cotización (p = 1.00 y p = 0.458) bajo un escenario moderado (μ_M = 5.3% anual y σ_M = 8.7% anual) y perfil de contribución *M/U* según Tabla 2. Se ha asumido utilidad CRRA, δ = 1% anual, α = 0.1761 (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.615% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último) y una edad de jubilación de 65 años.

FIGURA 4
DIFERENCIA PORCENTUAL EN CE (ESCENARIO AGRESIVO)



Valores estimados de $\Delta CE_{sf} = CE\left[\widehat{W}_s(\mathrm{T})\right] / CE\left[\widehat{W}_f(\mathrm{T})\right] - 1$ en porcentaje (%) para diferentes edades, valores del coeficiente de aversión al riesgo (γ = 1, 4, 8) y densidades de cotización (p = 1.00 y p = 0.458) bajo un escenario agresivo (μ_A = 7.8% anual y σ_A = 14.6% anual) y perfil de contribución *M/SU* según Tabla 2. Se ha asumido utilidad CRRA, δ = 1% anual, α = 0.1761 (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.615% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último) y una edad de jubilación de 65 años.

pues las curvas correspondientes tienden a alejarse entre sí y tal separación es mayor para los afiliados de menor edad. Por ejemplo, si fijamos una edad de 20 años, en el escenario moderado se tiene que $\Delta CE_{sf} \in [-7.76\%, -3.93\%]$ (este rango aplica para los valores de γ y p considerados) y en el agresivo $\Delta CE_{sf} \in [-10.12\%, -1.40\%]$, mientras que para un afiliado de 35 años los rangos correspondientes son $\Delta CE_{sf} \in [1.15\%, 3.04\%]$ en el escenario moderado y $\Delta CE_{sf} \in [-0.11\%, 4.76\%]$ en el agresivo. Notar que tales rangos son válidos para los valores considerados en esta aplicación. Finalmente, la pendiente de ΔCE_{sf} tiende a ser positiva, mantenerse constante con la edad y disminuir al incrementar el grado de aversión al riesgo.

4.2.4. Comisión por saldo equivalente desde la perspectiva de la AFP (δ_{AFP})

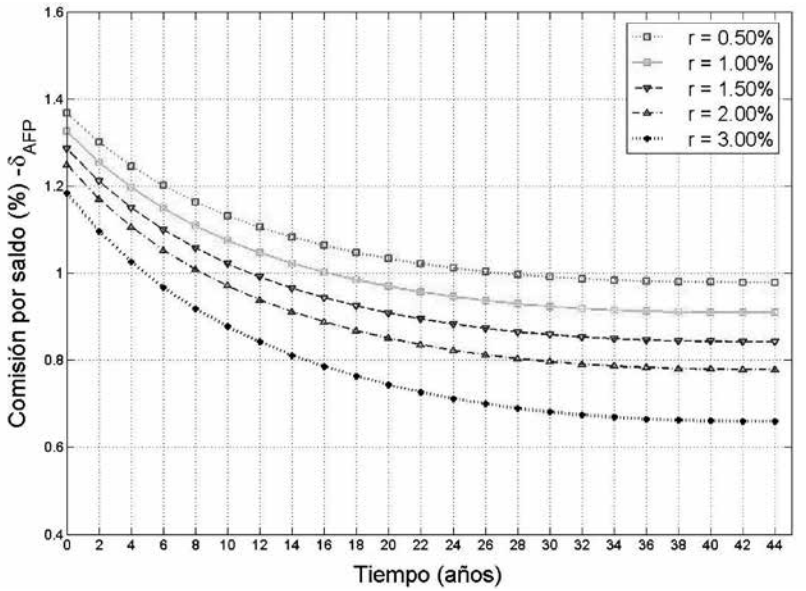
A continuación se va a estudiar la evolución de la comisión por saldo equivalente de la AFP, δ_{AFP}, utilizando el modelo simplificado descrito en la Sección 2.4. Se han considerado tres valores de comisión por flujo correspondientes a 1.47%, 1.615% y 1.84% del salario ($\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$) y cinco valores de la tasa de descuento, r, iguales a: 0.5%, 1.0%, 1.5%, 2.0% y 3% anual en tiempo continuo. Se fija además una edad de jubilación de 65 años la cual equivale a $t_r = 780$ meses y una edad mínima de afiliación de 20 años la cual equivale a $t_m = 240$ meses. Los aportes de los afiliados iniciales (secuencia $\{W^0\}$) y nuevos (secuencia $\{W^N\}$) se asumen bajo el modelo exponencial dado por (69) con $\beta = 3\%$ anual y $W_0 > 0$ arbitrario; con lo cual, independientemente de la edad y del momento en el que ingresan al sistema, todos los afiliados tienen el mismo perfil de aportes.

Además, se asume una distribución en la población tal que $x^0(t_0)$ es igual a $x^N(t)$ para todo t_0 y t, i.e., existe la misma cantidad de afiliados por edad y se incorporan al sistema siempre un número igual de ellos. Los supuestos anteriores hacen que δ_{AFP} se vuelva independiente de la contribución inicial de cada afiliado y del número de afiliados. La AFP fija un horizonte de análisis de 45 años, es decir que $T_{AFP} = 540$ meses, i.e., solo se van a considerar ingresos por comisiones en un rango de 45 años.

La Tabla 9 muestra la evolución en el tiempo de δ_{AFP} según los supuestos descritos anteriormente. Es importante mencionar que el modelo descrito en la Sección 2.4 solo brindaría el valor correspondiente a $t = 0$ (primera fila de la tabla). Para calcular los valores subsecuentes de δ_{AFP} se han considerado los ingresos por comisiones que se darán en un horizonte de 45 años empezando en un año específico. Dichos ingresos contienen el "stock" de comisiones de los afiliados actuales en el sistema más las comisiones generadas por los afiliados nuevos (en la tabla se presenta el tiempo en años pero los ingresos por comisiones han sido actualizados mensualmente). Observando los valores de la Tabla 9 se aprecia que δ_{AFP} es una función decreciente del tiempo para α y r constantes. Tal comportamiento es esperado, pues a medida que el tiempo pasa, el fondo total administrado por la AFP crece y por ende los ingresos bajo comisión por saldo; pero tal reducción es menor con el tiempo, debido a que se va llegando a una situación de estabilidad en la cual el efecto de los aportes de los afiliados iniciales del sistema en $t = 0$ va desapareciendo. Como se puede observar, los valores de largo plazo de δ_{AFP} convergen a diferentes valores para las combinaciones de α y r consideradas. Por ejemplo, cuando $\alpha_{pro} = 0.1761$

(valor promedio de comisión por flujo del SPP que corresponde a 1.615% del salario) y r igual a 1.50% anual, δ_{AFP} tiende a 0.84% anual aproximadamente. Asimismo, resulta interesante comparar los resultados de la Tabla 9 con los valores de las Tablas 3, 4, 6 y 7, esto con el fin de determinar la edad del afiliado para la cual la comisión δ_{AFP} es menor o mayor que las comisiones por saldo neutrales y aversas al riesgo, y así analizar la conveniencia de los esquemas de cobro. La Figura 5 muestra gráficamente la información de la Tabla 9 para $\alpha_{pro} = 0.1761$ y allí se observa claramente la convergencia de δ_{AFP} a valores distintos de r. Además, cada 0.5% anual de incremento en la tasa libre de riesgo corresponde aproximadamente a una reducción de δ_{AFP} igual a 0.6% anual.

FIGURA 5
COMISIÓN POR SALDO EQUIVALENTE DE LA AFP: δ_{AFP}



Evolución de la comisión por saldo equivalente para la AFP, δ_{AFP}, en porcentaje (%) y anualizada. Se ha asumido $\alpha = 0.1761$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.615% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último), cinco escenarios de la tasa libre de riesgo r iguales a 0.50%, 1.00%, 1.50%, 2.00% y 3.00% anual, una edad de jubilación de 65 años, una edad mínima de ingreso al sistema de 20 años, un horizonte de análisis $T_{AFP} = 45$ años, una tasa de crecimiento del salario $\beta = 3\%$ anual, una contribución inicial común $W_0 > 0$ y una distribución de la población tal que $x^N = x^0$.

La Tabla 10 muestra los valores de largo plazo de δ_{AFP} (en porcentaje y anualizada) para diferentes tasas de crecimiento anuales del salario, β, y valores de la comisión por flujo α. En la mencionada tabla se muestran los valores de la comisión por flujo también en términos del porcentaje del salario, f, cuando la contribución obligatoria es igual a 10% del salario. Asimismo, se especifica un valor de la tasa libre de riesgo igual a 1.52% anual. Es importante mencionar

que se mantienen los supuestos y los valores de los otros parámetros del modelo tal como se consideró al inicio de la sección. Se puede observar que δ_{AFP} es creciente tanto en β, como en el valor de la comisión por flujo. Más aún, los valores de la Tabla 10 pueden contrastarse con δ_{N}^{*} y δ_{A}^{*} para determinar la conveniencia de los sistemas de cobro en el largo plazo. Cuando $\beta \in [2\%, 3\%]$ y $\alpha = 0.174$ (equivalente a 1.615% del salario) se tiene que $\delta_{AFP} \in [0.75\%, 0.83\%]$ aproximadamente. Lo anterior implica que en el escenario promedio de α en la Tabla 3 (α_{pro}), se tiene $\delta_{\mathrm{N}}^{*} < \delta_{AFP}$ para un afiliado menor a 28 años y $\delta_{\mathrm{N}}^{*} > \delta_{AFP}$ para un afiliado de 32 años. En el escenario agresivo de la Tabla 4 las respectivas edades de corte serían 27 y 33 años, aproximadamente.

5. Conclusiones y recomendaciones

En el presente artículo se ha desarrollado una metodología en tiempo discreto que permite comparar comisiones por flujo y saldo en sistemas de pensiones con cuentas individuales de capitalización durante su fase de acumulación. Al considerar el proceso estocástico subyacente del valor cuota como un movimiento browniano geométrico se han podido calcular analíticamente valores esperados y varianzas de fondos de pensiones, los cuales han permitido introducir diferentes métodos para realizar la comparación y demostrar propiedades importantes de los tipos de comisión antes mencionados.

Los métodos de comparación considerados fueron: *ratio* de valores esperados de fondos finales, *ratio* de valores futuros de comisiones a pagar, inversas de los coeficientes de variación de fondos finales y diferencia de utilidades esperadas de riqueza terminal. Además, se introdujo un modelo simplificado para determinar comisiones equivalentes (en el corto y largo plazo) desde el punto de vista de una AFP. En muchos casos se obtienen resultados muy generales en cuanto al desempeño relativo de los esquemas de comisión, y estos se logran en su mayoría sin la necesidad de asumir un patrón particular en la secuencia de aportes. Adicionalmente, en el marco de la metodología considerada, se brindan fórmulas y/o expresiones que permiten determinar el tipo de comisión que sería conveniente para cada afiliado.

Se ha estudiado también el efecto que tiene la aversión al riesgo del afiliado en la comparación de comisiones por flujo y saldo. A partir del uso de una función de utilidad cuadrática, se demuestra, por lo general, que incrementos de aversión al riesgo mejoran el desempeño de la comisión por saldo respecto de su par por flujo. Asimismo, incorporando un proceso de interrupción de aportes independiente del proceso estocástico del fondo, se ha podido estudiar el efecto de la densidad de cotización en la comparación de comisiones. Sin embargo, a pesar que se derivan propiedades importantes para los otros criterios de comparación, solo es posible brindar resultados parciales respecto del efecto de la densidad de cotización cuando se utiliza el criterio de la utilidad esperada. Tales resultados son válidos al considerar valores específicos de comisión por saldo, por lo que su generalización es limitada.

A partir del desarrollo teórico y su aplicación práctica al SPP, se puede afirmar que una comparación utilizando solamente valores esperados de fondos finales resulta incompleta e imprecisa, ya que cuando se añade el efecto del riesgo de acumulación del fondo en dicha comparación las conclusiones tienden a cambiar,

y en algunos casos de manera importante. Por ejemplo para el SPP, utilizando únicamente valores esperados y ciertos supuestos, una comisión por saldo de 0.5% anual haría conveniente al esquema por saldo sobre el flujo en casi todo escenario; esto considerando la comisión mínima por flujo del SPP que es igual al 14.70% de los aportes. Sin embargo, si se incorpora aversión al riesgo en la comparación, dicha comisión de indiferencia podría incrementarse hasta en 0.3% anual para ciertos escenarios relevantes. Por otro lado, densidades de cotización de 50% y 100% producen prácticamente los mismos efectos en los equivalentes de certeza generados bajo ambos esquemas de comisión, incluso al considerar diferentes niveles de aversión al riesgo. Lo anterior comprobaría empíricamente que la densidad de cotización tiene un efecto secundario en la comparación de comisiones.

Utilizando el modelo simplificado desarrollado desde el punto de vista de la AFP, es posible determinar la evolución en el tiempo de la comisión por saldo equivalente y su valor de largo plazo. Para una comisión por flujo igual a 16.15% de los aportes (promedio del SPP) y una tasa de crecimiento de los salarios igual al 3% anual, el valor de largo plazo de tal comisión de equivalencia es cercano a 0.8% anual. Asumiendo que el afiliado exhibe neutralidad al riesgo y el rendimiento del fondo es igual a 5% anual, tal valor de la comisión por saldo haría a esta preferible solo para afiliados mayores a los 28 años. Además, incrementos en la aversión al riesgo del afiliado tenderían a disminuir tal edad crítica. Consecuentemente, dada una comisión por flujo constante (con valores similares a sus niveles actuales), es posible que la comisión de indiferencia por saldo de la AFP no llegue a niveles que la harían preferible para cualquier afiliado del SPP, y en especial para el segmento más joven.

Es posible hacer muchos refinamientos a la metodología y a los métodos de comparación, los cuales pueden generar nuevas investigaciones. Por ejemplo, podrían considerarse comisiones variables por saldo según la evolución de las comisiones equivalentes de la AFP y procesos estocásticos más sofisticados para el valor cuota. Asimismo, sería interesante contrastar los esquemas utilizando políticas óptimas que permitan cambiar el nivel de riesgo y rendimiento del fondo de acuerdo con la edad del afiliado y tamaño del fondo, en un contexto de optimización estocástica. Más aún, es posible trabajar bajo el supuesto de compleción del mercado y brindar expresiones para determinar utilidades terminales esperadas empleando valuación en ausencia de oportunidades de arbitraje. Finalmente, utilizando todos los métodos desarrollados, se podría estudiar a profundidad las implicancias del cambio de comisión por flujo a comisión mixta en el marco de la reforma del SPP.

A. Estimación de los parámetros del modelo

A.1. Calibración del MBG

Es necesario calcular los parámetros μ y σ del proceso estocástico del valor cuota del fondo. Para el escenario moderado, la volatilidad mensual de los rendimientos reales es $\sigma_M = 2.511\%$, y tal valor se ha estimado a partir de los rendimientos logarítmicos diarios corregidos por inflación de los fondos Tipo 2 (riesgo moderado) del SPP. Para el escenario agresivo, la volatilidad mensual se fija en $\sigma_A = 4.212\%$, y se ha estimado a partir de los rendimientos logarítmi-

cos diarios corregidos por inflación de los fondos Tipo 3 (riesgo alto) del SPP. En ambos casos se ha considerado para la calibración información diaria del 02/01/2009 al 30/05/2013. Debido a la corta historia de los rendimientos de los fondos del SPP es de esperar que los *drifts* calibrados tengan un alto error de estimación. Por esta razón, y siguiendo las justificaciones del Anexo Técnico Nº 2 de SBS (2013), se asume un rendimiento anual real para el escenario moderado igual a 5.0% efectivo anual (el rendimiento histórico real del fondo Tipo 2 es aproximadamente 6.0% efectivo anual). Por teoría del MBG se verifica que $r_M = \mu_M - 0.5\ \sigma_M^2$,, donde r_M es el rendimiento esperado mensual real en tiempo continuo del fondo moderado. Después de las transformaciones adecuadas se obtiene $r_M = 0.0041$ con lo cual $\mu_M = 0.0044$. Para el caso del escenario agresivo consideramos que el *market price of risk* es constante, i.e., $\frac{\mu_i - r}{\sigma} = k$ para $i = M, A$ donde r es la tasa de interés mensual libre de riesgo ajustada por inflación y expresada en tiempo continuo. El parámetro r se estima por medio de los rendimientos reales de los bonos VAC Soberanos (indexados a la inflación) a 6 años (se toma este punto como representativo de la estructura de plazos pues proporciona un balance entre el horizonte de aportación y los plazos de reinversión). La serie de datos consta de observaciones diarias de la tasa real a 2160 días del periodo 12/20/2005 al 05/16/2013. Con la información se obtuvo $r = 0.0013$ mensual (lo que equivale a 1.52% efectivo anual), entonces $k = 0.125$ y con ello es posible estimar μ_A. Después de realizar los cálculos respectivos se tiene $\mu_A = 0.0065$ mensual, lo cual corresponde a un rendimiento real aproximado de 7.01% efectivo anual. Es importante mencionar que los valores de μ y σ presentados en la Sección 4.1 son referenciales y se obtienen escalando directamente sus respectivos valores mensuales.

A.2. Crecimiento real de los salarios

Esta parte se basa enteramente en SBS (2013). Estudios empíricos y teóricos en economía laboral indican que la tasa de crecimiento del salario real es explicada en su mayoría por el nivel de productividad del trabajador (Mincer, 1974 y Ashenfelter, 2012), además las ganancias en productividad están asociadas con el nivel de educación y la experiencia laboral. Para la economía Peruana, Castro y Yamada (2010) muestran evidencia empírica de diferencias salariales explicadas por género y edad.

La tasa de crecimiento del salario real a lo largo de la curva de salario de los afiliados al SPP se determinó utilizando los correspondientes salarios implícitos (contribuciones sobre tasa de contribución obligatoria) entre junio de 2010 y septiembre de 2012 (10 trimestres). Los afiliados fueron clasificados a base de su género y nivel educativo: universitario y no universitario, y se calculó el correspondiente salario promedio por rango de edad a soles de septiembre de 2012. La Tabla 1 muestra los porcentajes de crecimiento real como función de las diferentes combinaciones género/educación y un rango de edad de 5 años.

El impacto de la productividad en el crecimiento del salario real se estimó utilizando la Encuesta Permanente de Empleo (EPE) entre los años 2003 y 2012. La variación anual de los salarios reales fue determinada para las mismas combinaciones de género/educación. Los valores para mujeres y hombres sin educación superior fueron 2.73% y 3.52% por año, respectivamente. Por otro lado, las variaciones fueron 1.69% y 0.63% por año para mujeres y hombres

TABLA 1
PORCENTAJE ANUAL DE CRECIMIENTO REAL DE LOS SALARIOS DEL SPP

Edad	Mujer		Hombre	
	Sin universidad	Universidad	Sin universidad	Universidad
18-22	2.33%	3.26%	2.03%	3.90%
23-27	1.44%	2.05%	1.12%	3.06%
28-32	0.71%	1.26%	0.51%	2.35%
33-37	0.56%	0.98%	0.30%	1.89%
38-42	0.46%	1.10%	0.23%	1.66%
43-47	0.35%	1.46%	0.21%	1.66%
48-52	0.22%	1.22%	0.17%	1.48%
53-57	0.09%	0.71%	0.11%	1.16%
58-64	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Fuente: Base de datos trimestral del SPP Junio 2010-Setiembre 2012.

con educación superior, respectivamente. Es importante considerar que la tasa de crecimiento por ganancia de productividad no debería ser constante en el tiempo. Con lo que los cambios porcentuales presentados son considerados para los primeros 10 años, después de 20 años se asume que las ganancias en productividad convergen a 1.00% (valor de largo plazo), y para los años del 11 al 20 se considera el promedio entre las ganancias actuales de productividad y las correspondientes de largo plazo. La Tabla 2 resume la información del crecimiento del salario real debido al incremento en la productividad.

TABLA 2
INCREMENTOS PORCENTUALES ANUALES EN SALARIOS REALES DEBIDO A GANANCIA EN PRODUCTIVIDAD PARA DIFERENTES COMBINACIONES DE GÉNERO/EDUCACIÓN

Género/Educación	Abreviación	Periodo		
		1-10 años	11-20 años	21 o más
Mujer / Sin universidad	M / SU	2.73%	1.87%	1.00%
Mujer / Universidad	M / U	1.69%	1.35%	1.00%
Hombre / Sin universidad	H / SU	3.52%	2.26%	1.00%
Hombre / Universidad	H / U	0.63%	0.82%	1.00%

Se incluye abreviación de dichos perfiles.
Fuente: Encuesta Permanente de Empleo 2003- 2012 (sólo primera columna)

La tasa de crecimiento del salario real (anualizada) es la suma del crecimiento correspondiente a lo largo de la curva de salario más el componente de ganancia por incremento de productividad. Por ejemplo, una mujer con estudios

universitarios de 23 años tendrá un crecimiento real del salario igual a 3.74% por año (2.05% de la curva de salario más 1.69% por productividad) hasta que llegue a los 27 años. De los 28 a los 32 años de edad la tasa de crecimiento real será de 2.95% (1.26% de la curva de salario más 1.69% por productividad). Adicionalmente, de los 33 a los 37 años la tasa de crecimiento será de 2.33% (0.98% de la curva de salario más 1.35% por productividad), notar que el cambio de la ganancia por productividad después de 10 años, va de 1.69% a 1.35 %. Se puede continuar de la misma forma hasta que se determinan las tasas de crecimiento durante toda la fase de acumulación. Finalmente, las tasas de crecimiento anuales son transformadas a tasas mensuales, τ, con lo cual la sucesión mensual de contribuciones $\mathcal{W}_T$ será tal que $W_{i+1} = (1 + \tau_i)W_i$ para $i \geq 0$ y $W > 0$ arbitrario.

TABLA 3

COMISIÓN POR SALDO NEUTRAL AL RIESGO, δ_N^*, EN PORCENTAJE (%)

Edad	$\alpha_{min} = 0.1590$					$\alpha_{pro} = 0.1761$					$\alpha_{max} = 0.2033$				
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
20	0.518	0.523	0.520	0.529	0.477	0.575	0.581	0.577	0.587	0.529	0.665	0.672	0.668	0.679	0.611
21	0.532	0.537	0.535	0.543	0.490	0.590	0.596	0.593	0.602	0.544	0.683	0.690	0.686	0.697	0.629
22	0.547	0.552	0.550	0.557	0.504	0.607	0.613	0.610	0.618	0.559	0.702	0.709	0.706	0.715	0.647
23	0.563	0.568	0.566	0.572	0.519	0.624	0.630	0.628	0.635	0.576	0.722	0.729	0.726	0.735	0.666
24	0.579	0.585	0.583	0.588	0.535	0.643	0.649	0.647	0.652	0.594	0.744	0.751	0.749	0.755	0.687
25	0.597	0.602	0.601	0.605	0.552	0.662	0.668	0.667	0.671	0.612	0.766	0.773	0.772	0.777	0.708
26	0.616	0.621	0.620	0.623	0.570	0.683	0.689	0.688	0.691	0.632	0.791	0.798	0.797	0.800	0.731
27	0.636	0.641	0.641	0.642	0.588	0.705	0.711	0.711	0.712	0.653	0.816	0.823	0.823	0.825	0.755
28	0.657	0.662	0.662	0.662	0.608	0.729	0.735	0.735	0.735	0.675	0.844	0.851	0.851	0.851	0.781
29	0.679	0.685	0.685	0.684	0.629	0.754	0.760	0.761	0.759	0.698	0.873	0.880	0.881	0.879	0.808
30	0.703	0.709	0.710	0.707	0.652	0.781	0.787	0.788	0.784	0.723	0.904	0.911	0.912	0.908	0.837
31	0.729	0.734	0.736	0.731	0.676	0.809	0.815	0.817	0.812	0.750	0.937	0.944	0.946	0.940	0.867
32	0.756	0.762	0.764	0.757	0.701	0.839	0.845	0.848	0.840	0.778	0.972	0.979	0.982	0.973	0.900
33	0.785	0.791	0.794	0.785	0.729	0.872	0.878	0.881	0.871	0.808	1.009	1.016	1.021	1.009	0.935
34	0.816	0.822	0.826	0.815	0.758	0.906	0.912	0.917	0.905	0.841	1.050	1.056	1.062	1.048	0.973
35	0.850	0.855	0.860	0.847	0.789	0.943	0.949	0.955	0.940	0.876	1.093	1.099	1.106	1.089	1.013
36	0.886	0.891	0.897	0.881	0.823	0.983	0.989	0.996	0.978	0.913	1.139	1.145	1.154	1.133	1.057
37	0.924	0.929	0.937	0.918	0.859	1.026	1.031	1.040	1.019	0.953	1.189	1.195	1.205	1.181	1.104
38	0.966	0.970	0.980	0.958	0.898	1.073	1.077	1.088	1.063	0.997	1.242	1.248	1.260	1.232	1.154
39	1.011	1.014	1.026	1.001	0.941	1.123	1.126	1.139	1.111	1.044	1.301	1.305	1.320	1.287	1.209
40	1.060	1.062	1.076	1.047	0.987	1.177	1.179	1.195	1.163	1.096	1.364	1.367	1.385	1.347	1.269
41	1.113	1.114	1.130	1.098	1.037	1.236	1.237	1.255	1.219	1.152	1.432	1.434	1.455	1.413	1.334
42	1.171	1.170	1.189	1.153	1.092	1.300	1.300	1.321	1.281	1.213	1.507	1.507	1.531	1.484	1.405
43	1.234	1.232	1.254	1.214	1.153	1.371	1.368	1.393	1.348	1.280	1.589	1.586	1.615	1.562	1.483
44	1.304	1.299	1.325	1.280	1.219	1.448	1.443	1.472	1.421	1.354	1.679	1.673	1.706	1.647	1.569
45	1.380	1.374	1.403	1.353	1.293	1.533	1.526	1.558	1.503	1.436	1.777	1.769	1.807	1.742	1.663
46	1.465	1.456	1.488	1.434	1.375	1.627	1.617	1.654	1.593	1.526	1.887	1.875	1.918	1.847	1.769
47	1.559	1.548	1.584	1.525	1.466	1.732	1.719	1.760	1.694	1.628	2.009	1.994	2.042	1.964	1.887
48	1.665	1.651	1.692	1.626	1.568	1.850	1.834	1.880	1.807	1.742	2.146	2.127	2.181	2.095	2.019
49	1.784	1.767	1.813	1.741	1.684	1.983	1.963	2.014	1.934	1.871	2.300	2.277	2.337	2.243	2.169
50	1.920	1.899	1.950	1.871	1.816	2.134	2.110	2.167	2.079	2.018	2.476	2.448	2.515	2.412	2.340

Comisión por saldo neutral al riesgo, δ_N^*, en porcentaje (%) y anualizada para diferentes edades y combinaciones género/educación (M = mujer, H = hombre, SU = sin universidad y U = universidad) bajo escenario moderado ($\mu_M = 5.3\%$ anual y $\sigma_M = 8.7\%$ anual). El caso de contribuciones iguales (E) también se ha incluido en la tabla. Se ha considerado una edad de jubilación de 65 años, $\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$ (estos tres últimos valores corresponden a comisiones por flujo de 1.49 %, 1.615% y 1.84% del salario bajo una tasa de contribución de 10 %).

TABLA 4

COMISIÓN POR SALDO NEUTRAL AL RIESGO, δ_N^*, EN PORCENTAJE (%)

Edad	$\alpha_{min} = 0.1590$					$\alpha_{pro} = 0.1761$					$\alpha_{max} = 0.2033$				
	W/NC	W/C	M/NC	M/C	EC	W/NC	W/C	M/NC	M/C	EC	W/NC	W/C	M/NC	M/C	EC
20	0.518	0.523	0.520	0.529	0.477	0.575	0.581	0.577	0.587	0.529	0.665	0.672	0.668	0.679	0.611
21	0.532	0.537	0.535	0.543	0.490	0.590	0.596	0.593	0.602	0.544	0.683	0.690	0.686	0.697	0.629
22	0.547	0.552	0.550	0.557	0.504	0.607	0.613	0.610	0.618	0.559	0.702	0.709	0.706	0.715	0.647
23	0.563	0.568	0.566	0.572	0.519	0.624	0.630	0.628	0.635	0.576	0.722	0.729	0.726	0.735	0.666
24	0.579	0.585	0.583	0.588	0.535	0.643	0.649	0.647	0.652	0.594	0.744	0.751	0.749	0.755	0.687
25	0.597	0.602	0.601	0.605	0.552	0.662	0.668	0.667	0.671	0.612	0.766	0.773	0.772	0.777	0.708
26	0.616	0.621	0.620	0.623	0.570	0.683	0.689	0.688	0.691	0.632	0.791	0.798	0.797	0.800	0.731
27	0.636	0.641	0.641	0.642	0.588	0.705	0.711	0.711	0.712	0.653	0.816	0.823	0.823	0.825	0.755
28	0.657	0.662	0.662	0.662	0.608	0.729	0.735	0.735	0.735	0.675	0.844	0.851	0.851	0.851	0.781
29	0.679	0.685	0.685	0.684	0.629	0.754	0.760	0.761	0.759	0.698	0.873	0.880	0.881	0.879	0.808
30	0.703	0.709	0.710	0.707	0.652	0.781	0.787	0.788	0.784	0.723	0.904	0.911	0.912	0.908	0.837
31	0.729	0.734	0.736	0.731	0.676	0.809	0.815	0.817	0.812	0.750	0.937	0.944	0.946	0.940	0.867
32	0.756	0.762	0.764	0.757	0.701	0.839	0.845	0.848	0.840	0.778	0.972	0.979	0.982	0.973	0.900
33	0.785	0.791	0.794	0.785	0.729	0.872	0.878	0.881	0.871	0.808	1.009	1.016	1.021	1.009	0.935
34	0.816	0.822	0.826	0.815	0.758	0.906	0.912	0.917	0.905	0.841	1.050	1.056	1.062	1.048	0.973
35	0.850	0.855	0.860	0.847	0.789	0.943	0.949	0.955	0.940	0.876	1.093	1.099	1.106	1.089	1.013
36	0.886	0.891	0.897	0.881	0.823	0.983	0.989	0.996	0.978	0.913	1.139	1.145	1.154	1.133	1.057
37	0.924	0.929	0.937	0.918	0.859	1.026	1.031	1.040	1.019	0.953	1.189	1.195	1.205	1.181	1.104
38	0.966	0.970	0.980	0.958	0.898	1.073	1.077	1.088	1.063	0.997	1.242	1.248	1.260	1.232	1.154
39	1.011	1.014	1.026	1.001	0.941	1.123	1.126	1.139	1.111	1.044	1.301	1.305	1.320	1.287	1.209
40	1.060	1.062	1.076	1.047	0.987	1.177	1.179	1.195	1.163	1.096	1.364	1.367	1.385	1.347	1.269
41	1.113	1.114	1.130	1.098	1.037	1.236	1.237	1.255	1.219	1.152	1.432	1.434	1.455	1.413	1.334
42	1.171	1.170	1.189	1.153	1.092	1.300	1.300	1.321	1.281	1.213	1.507	1.507	1.531	1.484	1.405
43	1.234	1.232	1.254	1.214	1.153	1.371	1.368	1.393	1.348	1.280	1.589	1.586	1.615	1.562	1.483
44	1.304	1.299	1.325	1.280	1.219	1.448	1.443	1.472	1.421	1.354	1.679	1.673	1.706	1.647	1.569
45	1.380	1.374	1.403	1.353	1.293	1.533	1.526	1.558	1.503	1.436	1.777	1.769	1.807	1.742	1.663
46	1.465	1.456	1.488	1.434	1.375	1.627	1.617	1.654	1.593	1.526	1.887	1.875	1.918	1.847	1.769
47	1.559	1.548	1.584	1.525	1.466	1.732	1.719	1.760	1.694	1.628	2.009	1.994	2.042	1.964	1.887
48	1.665	1.651	1.692	1.626	1.568	1.850	1.834	1.880	1.807	1.742	2.146	2.127	2.181	2.095	2.019
49	1.784	1.767	1.813	1.741	1.684	1.983	1.963	2.014	1.934	1.871	2.300	2.277	2.337	2.243	2.169
50	1.920	1.899	1.950	1.871	1.816	2.134	2.110	2.167	2.079	2.018	2.476	2.448	2.515	2.412	2.340

Comisión por saldo neutral al riesgo, δ_N^*, en porcentaje (%) y anualizada para diferentes edades y combinaciones género/educación (M = mujer, H = hombre, SU = sin universidad y U = universidad) bajo escenario agresivo ($\mu_A = 7.8\%$ anual y $\sigma_A = 14.6\%$ anual). El caso de contribuciones iguales (E) también se ha incluido en la tabla. Se ha considerado una edad de jubilación de 65 años, $\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$ (estos tres últimos valores corresponden a comisiones por flujo de 1.49 %, 1.615% y 1.84% del salario bajo una tasa de contribución de 10 %).

TABLA 5

COMISIÓN POR SALDO NEUTRAL AL RIESGO, δ_N^*, EN PORCENTAJE (%)

Edad	$\alpha_{min} = 0.1590$					$\alpha_{pro} = 0.1761$					$\alpha_{max} = 0.2033$				
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
20	0.749	0.774	0.751	0.791	0.650	0.833	0.861	0.835	0.880	0.722	0.966	1.000	0.970	1.022	0.837
21	0.765	0.790	0.768	0.805	0.666	0.850	0.878	0.854	0.896	0.740	0.987	1.020	0.991	1.040	0.858
22	0.782	0.806	0.786	0.820	0.683	0.870	0.896	0.874	0.912	0.759	1.009	1.041	1.015	1.059	0.880
23	0.800	0.824	0.805	0.836	0.701	0.890	0.916	0.895	0.930	0.779	1.033	1.064	1.039	1.080	0.903
24	0.819	0.842	0.825	0.853	0.720	0.911	0.937	0.917	0.948	0.800	1.058	1.088	1.065	1.102	0.928
25	0.840	0.862	0.846	0.871	0.740	0.934	0.958	0.941	0.968	0.822	1.084	1.113	1.092	1.125	0.953
26	0.861	0.883	0.868	0.890	0.761	0.957	0.982	0.965	0.989	0.845	1.111	1.140	1.121	1.149	0.980
27	0.884	0.905	0.892	0.910	0.783	0.983	1.006	0.992	1.012	0.869	1.141	1.168	1.151	1.175	1.008
28	0.908	0.928	0.917	0.931	0.806	1.009	1.032	1.020	1.035	0.895	1.172	1.199	1.184	1.202	1.038
29	0.933	0.953	0.944	0.954	0.830	1.038	1.060	1.049	1.061	0.922	1.205	1.231	1.218	1.232	1.070
30	0.960	0.979	0.972	0.978	0.856	1.068	1.089	1.080	1.087	0.951	1.240	1.264	1.254	1.263	1.103
31	0.989	1.007	1.001	1.003	0.883	1.100	1.120	1.113	1.116	0.981	1.277	1.300	1.293	1.296	1.138
32	1.020	1.036	1.033	1.031	0.912	1.134	1.152	1.149	1.146	1.014	1.316	1.338	1.334	1.331	1.176
33	1.052	1.068	1.067	1.060	0.943	1.170	1.187	1.186	1.179	1.048	1.358	1.379	1.377	1.369	1.216
34	1.086	1.101	1.103	1.091	0.976	1.208	1.224	1.226	1.213	1.084	1.403	1.422	1.424	1.409	1.258
35	1.123	1.137	1.141	1.125	1.011	1.249	1.264	1.269	1.250	1.123	1.450	1.468	1.473	1.452	1.303
36	1.163	1.174	1.182	1.160	1.048	1.293	1.306	1.314	1.290	1.165	1.501	1.517	1.526	1.498	1.352
37	1.205	1.215	1.226	1.199	1.089	1.340	1.351	1.363	1.333	1.210	1.556	1.569	1.583	1.548	1.404
38	1.250	1.258	1.272	1.240	1.132	1.390	1.399	1.415	1.379	1.258	1.615	1.625	1.644	1.601	1.459
39	1.299	1.305	1.323	1.284	1.178	1.444	1.451	1.471	1.428	1.310	1.678	1.686	1.709	1.659	1.520
40	1.352	1.355	1.377	1.333	1.228	1.503	1.507	1.532	1.482	1.365	1.746	1.750	1.780	1.721	1.585
41	1.408	1.409	1.436	1.385	1.283	1.566	1.567	1.597	1.540	1.426	1.819	1.820	1.855	1.788	1.655
42	1.470	1.468	1.499	1.442	1.342	1.635	1.633	1.668	1.603	1.492	1.899	1.896	1.938	1.862	1.732
43	1.537	1.532	1.568	1.504	1.407	1.709	1.704	1.744	1.672	1.564	1.986	1.979	2.026	1.942	1.815
44	1.610	1.601	1.642	1.572	1.478	1.791	1.781	1.827	1.748	1.643	2.080	2.069	2.123	2.030	1.907
45	1.690	1.678	1.723	1.647	1.556	1.879	1.866	1.917	1.832	1.729	2.183	2.168	2.228	2.127	2.008
46	1.777	1.762	1.812	1.730	1.642	1.977	1.960	2.016	1.924	1.825	2.297	2.277	2.343	2.235	2.119
47	1.875	1.856	1.911	1.823	1.738	2.086	2.065	2.126	2.027	1.932	2.423	2.399	2.471	2.355	2.243
48	1.984	1.962	2.022	1.927	1.845	2.207	2.182	2.249	2.143	2.051	2.565	2.535	2.615	2.489	2.382
49	2.107	2.081	2.146	2.044	1.965	2.344	2.314	2.388	2.273	2.186	2.724	2.689	2.776	2.641	2.538
50	2.247	2.216	2.287	2.176	2.102	2.499	2.465	2.545	2.421	2.338	2.905	2.864	2.959	2.812	2.715

Comisión por saldo neutral al riesgo, δ_N^*, en porcentaje (%) y anualizada para diferentes edades y combinaciones género/educación (*M* = mujer, *H* = hombre, *SU* = sin universidad y *U* = universidad) bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$ y una tasa libre de riesgo igual a 1.52% anual en tiempo continuo. El caso de contribuciones iguales (*E*) también se ha incluido en la tabla. Se ha considerado una edad de jubilación de 65 años, $\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$ (estos tres últimos valores corresponden a comisiones por flujo de 1.49 %, 1.615% y 1.84% del salario bajo una tasa de contribución de 10 %).

TABLA 6

COMISIÓN POR SALDO AVERSA AL RIESGO MENOS COMISIÓN POR SALDO NEUTRAL AL RIESGO, $\delta_{\mathrm{A}}^{*} - \delta_{\mathrm{N}}^{*}$, EN PORCENTAJE (%)

Edad	$\alpha_{min} = 0.1590$					$\alpha_{pro} = 0.1761$					$\alpha_{max} = 0.2033$				
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
20	0.021	0.022	0.020	0.022	0.017	0.023	0.024	0.023	0.025	0.019	0.027	0.028	0.027	0.029	0.022
21	0.021	0.022	0.020	0.022	0.017	0.023	0.024	0.023	0.025	0.019	0.027	0.028	0.027	0.029	0.023
22	0.021	0.022	0.021	0.022	0.017	0.023	0.024	0.023	0.025	0.019	0.027	0.028	0.027	0.029	0.023
23	0.021	0.022	0.021	0.022	0.018	0.023	0.024	0.023	0.025	0.019	0.027	0.028	0.027	0.029	0.023
24	0.021	0.022	0.021	0.022	0.018	0.023	0.024	0.023	0.025	0.020	0.027	0.028	0.027	0.029	0.023
25	0.021	0.022	0.021	0.022	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.023
26	0.021	0.022	0.021	0.022	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.023
27	0.021	0.021	0.021	0.022	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.023
28	0.021	0.021	0.021	0.022	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.023
29	0.021	0.021	0.021	0.022	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.023
30	0.021	0.021	0.021	0.021	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.023
31	0.021	0.021	0.021	0.021	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.023
32	0.021	0.021	0.021	0.021	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.024
33	0.021	0.021	0.021	0.021	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.024
34	0.021	0.021	0.021	0.021	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.020	0.027	0.028	0.027	0.028	0.024
35	0.021	0.021	0.021	0.021	0.018	0.023	0.024	0.023	0.024	0.021	0.027	0.028	0.027	0.027	0.024
36	0.021	0.021	0.021	0.021	0.018	0.023	0.024	0.024	0.023	0.021	0.027	0.028	0.027	0.027	0.024
37	0.021	0.021	0.021	0.021	0.019	0.023	0.024	0.024	0.023	0.021	0.027	0.028	0.028	0.027	0.024
38	0.021	0.021	0.021	0.021	0.019	0.023	0.024	0.024	0.023	0.021	0.027	0.028	0.028	0.027	0.024
39	0.021	0.021	0.021	0.021	0.019	0.023	0.024	0.024	0.023	0.021	0.027	0.027	0.028	0.027	0.024
40	0.021	0.021	0.021	0.021	0.019	0.024	0.024	0.024	0.023	0.021	0.027	0.027	0.028	0.027	0.025
41	0.021	0.021	0.022	0.021	0.019	0.024	0.024	0.024	0.023	0.021	0.028	0.027	0.028	0.027	0.025
42	0.021	0.021	0.022	0.021	0.019	0.024	0.024	0.024	0.023	0.021	0.028	0.027	0.028	0.027	0.025
43	0.021	0.021	0.022	0.021	0.019	0.024	0.024	0.024	0.023	0.021	0.028	0.027	0.028	0.027	0.025
44	0.021	0.021	0.022	0.021	0.019	0.024	0.024	0.024	0.023	0.021	0.028	0.027	0.028	0.027	0.025
45	0.021	0.021	0.022	0.021	0.019	0.024	0.024	0.024	0.023	0.022	0.028	0.027	0.028	0.027	0.025
46	0.021	0.021	0.022	0.021	0.019	0.024	0.023	0.024	0.023	0.022	0.028	0.027	0.028	0.027	0.025
47	0.021	0.021	0.022	0.021	0.020	0.024	0.023	0.024	0.023	0.022	0.028	0.027	0.028	0.027	0.025
48	0.021	0.021	0.022	0.021	0.020	0.024	0.023	0.024	0.023	0.022	0.028	0.027	0.028	0.027	0.026
49	0.021	0.021	0.022	0.021	0.020	0.024	0.024	0.024	0.023	0.022	0.028	0.027	0.029	0.027	0.026
50	0.021	0.021	0.022	0.021	0.020	0.024	0.024	0.024	0.023	0.022	0.028	0.028	0.029	0.027	0.026

Comisión por saldo aversa al riesgo menos comisión por saldo neutral al riesgo, $\delta_{\mathrm{A}}^{*} - \delta_{\mathrm{N}}^{*}$, en porcentaje (%) y anualizada para diferentes edades y combinaciones género/educación (M = mujer, H = hombre, SU = sin universidad y U = universidad) bajo escenario moderado ($\mu_M = 5.3\%$ anual y $\sigma_M = 8.7\%$ anual). El caso de contribuciones iguales (E) también se ha incluido en la tabla. Se ha considerado una edad de jubilación de 65 años, $b \to \infty$, $p = 1$ (sin interrupciones), $\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$ (estos tres últimos valores corresponden a comisiones por flujo de 1.49 %, 1.615% y 1.84% del salario bajo una tasa de contribución de 10%).

TABLA 7

COMISIÓN POR SALDO AVERSA AL RIESGO MENOS COMISIÓN POR SALDO NEUTRAL AL RIESGO, $\delta^*_A - \delta^*_N$, EN PORCENTAJE (%)

Edad	$\alpha_{min} = 0.1590$					$\alpha_{pro} = 0.1761$					$\alpha_{max} = 0.2033$				
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
20	0.259	0.260	0.251	0.253	0.508	0.286	0.287	0.277	0.279	0.553	0.328	0.329	0.318	0.320	0.622
21	0.224	0.227	0.218	0.224	0.353	0.248	0.251	0.241	0.247	0.388	0.285	0.290	0.278	0.285	0.442
22	0.198	0.202	0.194	0.201	0.271	0.220	0.224	0.214	0.222	0.299	0.253	0.259	0.247	0.256	0.343
23	0.178	0.183	0.174	0.182	0.221	0.197	0.202	0.193	0.202	0.245	0.228	0.234	0.223	0.233	0.282
24	0.162	0.167	0.159	0.167	0.188	0.180	0.185	0.177	0.185	0.208	0.208	0.214	0.204	0.214	0.240
25	0.149	0.154	0.147	0.154	0.165	0.165	0.170	0.163	0.171	0.182	0.191	0.197	0.189	0.198	0.211
26	0.138	0.143	0.137	0.144	0.147	0.154	0.158	0.152	0.160	0.163	0.178	0.184	0.176	0.185	0.189
27	0.129	0.134	0.128	0.135	0.133	0.144	0.148	0.142	0.149	0.148	0.167	0.172	0.165	0.173	0.172
28	0.122	0.126	0.121	0.127	0.123	0.135	0.140	0.134	0.141	0.136	0.157	0.162	0.156	0.163	0.158
29	0.115	0.119	0.115	0.120	0.114	0.128	0.132	0.128	0.133	0.127	0.149	0.153	0.148	0.155	0.147
30	0.110	0.113	0.109	0.114	0.107	0.122	0.126	0.122	0.127	0.119	0.142	0.146	0.141	0.147	0.138
31	0.105	0.108	0.105	0.109	0.101	0.117	0.120	0.117	0.121	0.112	0.136	0.139	0.135	0.140	0.130
32	0.101	0.103	0.101	0.104	0.096	0.112	0.115	0.112	0.115	0.107	0.130	0.133	0.130	0.134	0.124
33	0.097	0.099	0.097	0.100	0.092	0.108	0.110	0.108	0.111	0.102	0.125	0.128	0.126	0.129	0.118
34	0.094	0.096	0.094	0.096	0.088	0.104	0.106	0.105	0.107	0.098	0.121	0.124	0.122	0.124	0.114
35	0.091	0.092	0.091	0.092	0.085	0.101	0.103	0.102	0.103	0.094	0.117	0.119	0.118	0.120	0.110
36	0.088	0.089	0.089	0.089	0.082	0.098	0.100	0.099	0.099	0.091	0.114	0.116	0.115	0.116	0.106
37	0.086	0.087	0.087	0.087	0.079	0.096	0.097	0.096	0.096	0.088	0.111	0.112	0.112	0.112	0.103
38	0.084	0.084	0.085	0.084	0.077	0.093	0.094	0.094	0.094	0.086	0.109	0.109	0.110	0.109	0.100
39	0.082	0.082	0.083	0.082	0.075	0.091	0.092	0.092	0.091	0.084	0.106	0.107	0.107	0.106	0.098
40	0.080	0.080	0.081	0.080	0.074	0.089	0.089	0.090	0.089	0.082	0.104	0.104	0.105	0.103	0.095
41	0.079	0.078	0.080	0.078	0.072	0.088	0.087	0.089	0.087	0.080	0.102	0.102	0.103	0.101	0.094
42	0.077	0.077	0.078	0.076	0.071	0.086	0.086	0.087	0.085	0.079	0.100	0.100	0.102	0.099	0.092
43	0.076	0.075	0.077	0.074	0.070	0.085	0.084	0.086	0.083	0.077	0.099	0.098	0.100	0.096	0.090
44	0.075	0.074	0.076	0.073	0.068	0.083	0.082	0.085	0.081	0.076	0.097	0.096	0.099	0.095	0.089
45	0.073	0.073	0.075	0.071	0.067	0.082	0.081	0.083	0.080	0.075	0.096	0.094	0.097	0.093	0.088
46	0.072	0.071	0.074	0.070	0.067	0.081	0.080	0.082	0.078	0.074	0.094	0.093	0.096	0.091	0.087
47	0.071	0.070	0.073	0.069	0.066	0.080	0.078	0.081	0.077	0.073	0.093	0.091	0.094	0.090	0.086
48	0.070	0.069	0.072	0.068	0.065	0.079	0.077	0.080	0.076	0.073	0.092	0.090	0.093	0.089	0.085
49	0.070	0.068	0.071	0.067	0.065	0.078	0.076	0.079	0.075	0.072	0.091	0.089	0.092	0.087	0.084
50	0.069	0.068	0.070	0.066	0.064	0.077	0.075	0.078	0.074	0.071	0.090	0.088	0.091	0.086	0.083

Comisión por saldo aversa al riesgo menos comisión por saldo neutral al riesgo, $\delta^*_A - \delta^*_N$, en porcentaje (%) y anualizada para diferentes edades y combinaciones género/educación (M = mujer, H = hombre, SU = sin universidad y U = universidad) bajo escenario agresivo ($\mu_A = 7.8\%$ anual y $\sigma_A = 14.6\%$ anual). El caso de contribuciones iguales (E) también se ha incluido en la tabla. Se ha considerado una edad de jubilación de 65 años, $b \to \infty, p = 1$ (sin interrupciones), $\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$ (estos tres últimos valores corresponden a comisiones por flujo de 1.49 %, 1.615% y 1.84% del salario bajo una tasa de contribución de 10%).

TABLA 8

VALORES ESTIMADOS DE $\Delta CE_{sf} = CE\left[\widehat{W}_s(T)\right] / CE\left[\widehat{W}_f(T)\right] - 1$ EN PORCENTAJE (%)

Edad	Moderado						Agresivo					
	γ=1		γ=4		γ=8		γ=1		γ=4		γ=8	
	p=1	p=0.458	p=1	p=0.458	p=1	p=0.458	p=1	p=0.458	p=1	p=0.458	p=1	p=0.458
20	–7.76	–7.76	–6.04	–6.02	–3.93	–3.98	–10.12	–10.12	–5.66	–5.65	–1.40	–1.58
21	–7.20	–7.20	–5.53	–5.53	–3.51	–3.58	–9.48	–9.48	–5.16	–5.19	–0.99	–1.17
22	–6.63	–6.63	–5.03	–5.03	–3.15	–3.14	–8.85	–8.83	–4.72	–4.69	–0.58	–0.75
23	–6.07	–6.05	–4.52	–4.50	–2.64	–2.74	–8.20	–8.18	–4.21	–4.19	–0.17	–0.34
24	–5.48	–5.47	–4.01	–3.99	–2.20	–2.19	–7.54	–7.53	–3.70	–3.64	0.24	0.08
25	–4.89	–4.89	–3.47	–3.47	–1.74	–1.79	–6.88	–6.87	–3.18	–3.18	0.65	0.50
26	–4.30	–4.29	–2.95	–2.93	–1.29	–1.29	–6.21	–6.21	–2.67	–2.67	1.07	0.91
27	–3.70	–3.70	–2.40	–2.40	–0.84	–0.89	–5.54	–5.53	–2.16	–2.16	1.48	1.33
28	–3.10	–3.10	–1.87	–1.86	–0.39	–0.39	–4.87	–4.86	–1.62	–1.62	1.89	1.74
29	–2.50	–2.49	–1.32	–1.32	0.10	0.10	–4.19	–4.18	–1.08	–1.09	2.30	2.16
30	–1.89	–1.89	–0.77	–0.77	0.63	0.57	–3.52	–3.50	–0.56	–0.55	2.71	2.57
31	–1.29	–1.28	–0.22	–0.22	1.09	1.05	–2.83	–2.82	–0.01	–0.02	3.12	2.99
32	–0.68	–0.67	0.32	0.34	1.59	1.56	–2.15	–2.15	0.52	0.53	3.53	3.41
33	–0.07	–0.07	0.89	0.89	2.05	2.06	–1.47	–1.46	1.07	1.07	3.94	3.82
34	0.54	0.54	1.44	1.44	2.54	2.53	–0.79	–0.77	1.58	1.61	4.35	4.24
35	1.15	1.15	1.99	2.00	3.04	3.04	–0.11	–0.11	2.15	2.16	4.76	4.65
36	1.75	1.76	2.55	2.55	3.51	3.53	0.57	0.57	2.70	2.71	5.17	5.07
37	2.36	2.36	3.10	3.11	4.01	4.02	1.24	1.25	3.23	3.25	5.58	5.49
38	2.96	2.97	3.66	3.67	4.53	4.51	1.91	1.92	3.78	3.80	5.99	5.90
39	3.56	3.57	4.21	4.22	5.02	5.01	2.58	2.58	4.32	4.34	6.40	6.32
40	4.17	4.17	4.77	4.78	5.53	5.52	3.25	3.25	4.88	4.88	6.82	6.73
41	4.77	4.77	5.33	5.34	6.04	6.03	3.91	3.91	5.43	5.44	7.23	7.15
42	5.36	5.37	5.89	5.89	6.53	6.55	4.57	4.57	5.98	5.98	7.64	7.56
43	5.96	5.97	6.44	6.45	7.03	7.04	5.23	5.23	6.54	6.54	8.05	7.98
44	6.56	6.56	7.00	7.00	7.55	7.54	5.88	5.89	7.08	7.08	8.46	8.40
45	7.15	7.16	7.56	7.56	8.06	8.05	6.54	6.54	7.63	7.63	8.87	8.81
46	7.75	7.75	8.12	8.12	8.58	8.57	7.19	7.19	8.19	8.19	9.28	9.23
47	8.35	8.35	8.68	8.68	9.09	9.09	7.84	7.85	8.74	8.74	9.69	9.64
48	8.95	8.95	9.25	9.25	9.62	9.62	8.49	8.49	9.30	9.30	10.10	10.06
49	9.55	9.55	9.81	9.82	10.15	10.14	9.14	9.14	9.87	9.87	10.51	10.48
50	10.15	10.16	10.39	10.39	10.69	10.68	9.79	9.79	10.43	10.44	10.92	10.89

Valores estimados de $\Delta CE_{sf} = CE\left[\widehat{W}_s(T)\right] / CE\left[\widehat{W}_f(T)\right] - 1$ en porcentaje (%) para diferentes edades, valores del coeficiente de aversión al riesgo (γ = 1, 4, 8) y densidades de cotización (p = 1.00 y p = 0.458) escenarios moderado (μ_M = 5.3% anual y σ_M = 8.7% anual) y agresivo (μ_A = 7.8% anual y σ_A = 14.6% anual) y perfil de contribución *M/SU* según Tabla 2. Se ha asumido δ = 1% anual, α = 0.1761% (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.615% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último) y una edad de jubilación de 65 años.

TABLA 9
EVOLUCIÓN DE LA COMISIÓN POR SALDO EQUIVALENTE PARA LA AFP, δ_{AFP}, EN PORCENTAJE (%)

Tiempo (años)	r (%)	$\alpha_{min} = 0.1590$					$\alpha_{pro} = 0.1761$					$\alpha_{max} = 0.2033$				
		0.50	1.00	1.50	2.00	3.00	0.50	1.00	1.50	2.00	3.00	0.50	1.00	1.50	2.00	3.00
0		1.227	1.190	1.154	1.122	1.063	1.367	1.325	1.286	1.249	1.184	1.593	1.544	1.497	1.454	1.377
2		1.167	1.126	1.088	1.051	0.985	1.300	1.254	1.211	1.170	1.096	1.514	1.460	1.409	1.361	1.274
4		1.119	1.075	1.033	0.994	0.922	1.246	1.196	1.150	1.106	1.025	1.450	1.392	1.337	1.285	1.191
6		1.079	1.032	0.988	0.946	0.870	1.201	1.149	1.099	1.053	0.967	1.397	1.336	1.278	1.223	1.122
8		1.045	0.996	0.950	0.907	0.826	1.163	1.109	1.057	1.008	0.918	1.353	1.289	1.228	1.171	1.065
10		1.017	0.966	0.919	0.873	0.789	1.132	1.075	1.022	0.971	0.877	1.316	1.250	1.187	1.127	1.017
12		0.993	0.941	0.892	0.844	0.758	1.105	1.047	0.991	0.939	0.841	1.285	1.216	1.151	1.090	0.975
14		0.973	0.919	0.868	0.820	0.730	1.082	1.023	0.966	0.911	0.811	1.258	1.188	1.121	1.058	0.940
16		0.955	0.901	0.849	0.799	0.707	1.063	1.002	0.943	0.888	0.785	1.236	1.164	1.096	1.030	0.910
18		0.941	0.885	0.832	0.781	0.687	1.047	0.984	0.925	0.868	0.763	1.217	1.144	1.073	1.007	0.883
20		0.928	0.871	0.817	0.765	0.669	1.033	0.969	0.908	0.850	0.743	1.201	1.126	1.055	0.987	0.861
22		0.918	0.860	0.805	0.752	0.654	1.021	0.956	0.894	0.836	0.726	1.187	1.111	1.039	0.969	0.841
24		0.909	0.850	0.794	0.740	0.641	1.011	0.946	0.883	0.823	0.712	1.176	1.099	1.025	0.955	0.825
26		0.901	0.842	0.785	0.731	0.630	1.003	0.937	0.873	0.812	0.700	1.167	1.088	1.014	0.942	0.811
28		0.895	0.835	0.778	0.723	0.621	0.996	0.929	0.865	0.803	0.689	1.159	1.080	1.004	0.932	0.799
30		0.891	0.830	0.772	0.716	0.613	0.991	0.923	0.858	0.796	0.681	1.153	1.073	0.997	0.924	0.789
32		0.887	0.826	0.767	0.711	0.607	0.987	0.919	0.853	0.790	0.674	1.148	1.068	0.991	0.917	0.781
34		0.884	0.823	0.764	0.707	0.603	0.984	0.915	0.849	0.786	0.669	1.144	1.063	0.986	0.912	0.775
36		0.882	0.820	0.761	0.704	0.599	0.982	0.912	0.846	0.783	0.665	1.142	1.060	0.983	0.908	0.770
38		0.881	0.819	0.759	0.702	0.597	0.980	0.911	0.844	0.781	0.662	1.140	1.059	0.981	0.906	0.767
40		0.880	0.818	0.758	0.701	0.595	0.979	0.910	0.843	0.779	0.661	1.139	1.057	0.979	0.904	0.765
42		0.879	0.817	0.758	0.701	0.594	0.979	0.909	0.843	0.779	0.660	1.138	1.057	0.979	0.904	0.765
44		0.879	0.817	0.758	0.701	0.594	0.979	0.909	0.842	0.779	0.660	1.138	1.057	0.978	0.903	0.764

Evolución de la comisión por saldo equivalente para la AFP, δ_{AFP}, en porcentaje (%) y anualizada. Se calcula dicha comisión para $\alpha_{min} = 0.1590$, $\alpha_{pro} = 0.1761$ y $\alpha_{max} = 0.2033$ (estos tres valores corresponden a comisiones por flujo de 1.49%, 1.615% y 1.84% del salario bajo una tasa de contribución de 10%), y cinco escenarios de la tasa libre de riesgo iguales a: 0.50%, 1.00%, 1.50%, 2.00% y 3.00% anual. Se ha considerado una edad de jubilación de 65 años, una edad mínima de ingreso al sistema de 20 años, un horizonte de análisis $T_{AFP} = 45$ años, una tasa de crecimiento del salario $\beta = 3\%$ anual, una contribución inicial común $W_0 > 0$ y una distribución de la población tal que $x^N = x^0$.

TABLA 10
COMISIÓN POR SALDO EQUIVALENTE DE LARGO PLAZO PARA LA AFP, δ_{AFP}, EN PORCENTAJE (%)

Comisión por flujo		Crecimiento anual del salario (β)					
f	α	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%
1.00%	0.105	0.372	0.407	0.448	0.495	0.548	0.609
1.10%	0.117	0.412	0.451	0.496	0.549	0.608	0.676
1.20%	0.128	0.452	0.495	0.545	0.603	0.669	0.744
1.30%	0.139	0.493	0.540	0.595	0.659	0.731	0.813
1.40%	0.151	0.535	0.586	0.646	0.715	0.794	0.883
1.50%	0.163	0.577	0.633	0.698	0.773	0.858	0.955
1.60%	0.174	0.620	0.680	0.750	0.831	0.924	1.028
1.70%	0.186	0.663	0.728	0.803	0.890	0.990	1.103
1.80%	0.198	0.708	0.777	0.857	0.951	1.058	1.179
1.90%	0.211	0.752	0.826	0.912	1.012	1.127	1.257
2.00%	0.223	0.798	0.876	0.968	1.075	1.197	1.336

Comisión por saldo equivalente de largo plazo para la AFP, δ_{AFP}, en porcentaje (%) y anualizada bajo una tasa libre de riesgo igual a 1.52% anual en tiempo continuo. Se calcula dicha comisión para diferentes valores de la tasa de crecimiento anual del salario, β, y valores de la comisión por flujo. Esta última se expresa como porcentaje del salario, f, y a través de α (asumiendo un aporte igual a 10% del salario). Se ha considerado una edad de jubilación de 65 años, una edad mínima de ingreso al sistema de 20 años, un horizonte de análisis $T_{AFP} = 45$ años, una contribución inicial común $W_0 > 0$ y una distribución de la población tal que $x^N = x^0$.

Referencias

Arenas de Mesa, A. y Mesa-Lago, C. (2006). "The structural pension reform in Chile: Effects, comparisons with other Latin American reforms, and lessons", *Oxford Review of Economic Policy*, 22(1):149-167.

Arenas de Mesa, A., Behrman, J. y Bravo, D. (2004). "Characteristics of and determinants of the density of contributions in a private social security system", Working paper WP 2004-077, Michigan Retirement Research Center.

Arrau, P., Valdés-Prieto, S. y Schmidt-Hebbel, K. (1993). "Privately managed pension systems: Design issues and the Chilean experience", Technical report, World Bank, Washington DC (mimeo).

Ashenfelter, O. (2012). "Comparing real wage rates", *The American Economic Review*, 102(2):617-642.

Banco Mundial (1994). "Averting the old age crisis", Policy Research Report, Oxford University Press, New York.

Battocchio, P. y Menoncin, F. (2004). "Optimal pension management in a stochastic framework", *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(1):79- 95.

Battocchio, P., Menoncin, F. y Scaillet, O. (2007). "Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases", *Annals of Operations Research*, 152(1):141-165.

Bielecki, T.R., Jin, H., Pliska, S.R. y Zhou, X.Y. (2005). " Continuous-time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition", *Mathematical Finance*, 5(2):213-244.

Blake, D. y Board, J. (2000). "Measuring value added in the pensions industry", Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice, 25(4):539-567.

Blake, D., Cairns, A.J.G. y Dowd, K. (2003). " Pensionmetrics 2: Stochastic pension plan design during the distribution phase", *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(1):29-47.

Carriere, J.F. y Shand, K.J. (1998). "New salary functions for pension valuations", *North American Actuarial Journal*, 2(3):18-26

Castro, J.F. y Yamada, G. (2010). "Las diferencias étnicas y de género en el acceso a la educación básica y superior en el Perú", Technical report, Centro de Investigación y Departamento de Economía de la Universidad del Pacífico, Lima.

Corvera, F.J., Lartigue, J.M. y Madero, D. (2006). "Análisis comparativo de las comisiones por administración de los fondos de pensiones en los países de América Latina", Mimeo. Ciudad de México.

Devesa-Carpio, J. y Vidal-Meliá, C. (1997). "Estrategias individuales de ahorro-pensión y perfiles de ingresos", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXVI (90):167-195.

Devesa-Carpio, J., Rodríguez-Barrera, R. y Vidal-Melía, C. (2003). "Medición y comparación internacional de los costes de administración para el afiliado en las cuentas individuales de capitalización", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXXII (116):95-144.

Devolder, P., Bosch Princep, M. y Domínguez Fabián, I. (2003). "Stochastic optimal control of annuity contracts", *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2):227-238.

Diamond, P. (2000). "Administrative costs and equilibrium charges with individual accounts". En Shoven, J.B. (ed), Administrative Aspects of Investment-Based Social Security Reform, 137-172. University of Chicago Press.

Diamond, P. y Valdés-Prieto, S. (1994). Social security reforms. En Bosworth, B., Dornbusch, R. and Laban, R. (eds), The Chilean economy: Policy lessons and challenges, 257-328. Washington DC: Brookings Institution.

Durán, F. y Pena, H. (2011). "Determinantes de las tasas de reemplazo de pensiones de capitalización individual: Escenarios latinoamericanos comparados", Serie seminarios y conferencias Nº 64, CEPAL.

Edwards, S. (1998). The Chilean pension reform: A pioneering program. En Feldstein, M. (ed), Privatizing social security, pages 33-62. University of Chicago Press.

Escrivá J.L., Fuentes, E. y García-Herrero, A. (2010). "Balance de las reformas de pensiones en Latinoamérica", Las Reformas de los Sistemas de Pensiones en Latinoamérica: Avances y Temas Pendientes. Madrid, España: BBVA, 11-39.

Gerrard, R., Haberman, S. y Vigna, E. (2004). "Optimal investment choices post-retirement in a defined contribution pension scheme", *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(2):321-342.

Gerrard, R., Haberman, S. y Vigna, E. (2006). "The management of decumulation risks in a defined contribution pension plan". *North American Actuarial Journal*, 10(1):84-110.

Gómez-Hernández, D. y Stewart, F. (2008). "Comparison of costs and fees in countries with private defined contribution pension systems", Working Paper N° 6, Paris: International Organisation of Pension Supervisors.

Haberman, S. y Vigna, E. (2002). "Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes", *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(1):35-69.

Han, N. y Hung, M. (2012). "Optimal allocation for DC pension plans under inflation", *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1):172-181.

Horneff, W.J., Maurer, R., Mitchell, O.S. y Dus, I. (2008). "Following the rules: integrating asset allocation and annuitization in retirement portfolios", *Insurance: Mathematics and Economics,* 42(1):396-408.

James, E., Smalhout, J. y Vittas, D. (2001). "Administrative charges for funded pensions: comparison and assessment". En Yermo, J. y Yunus, A. (eds), Private Pension Systems: Administrative Costs and Reforms, 17-83. OECD: Paris.

Kay, S.J. y Kritzer, B.E. (2001). "Social security in Latin America: Recent reforms and challenges", *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, 86(1):41-52.

Kelton, W.D. y A.M. Law (2000). Simulation modeling and analysis. McGraw Hill Boston, MA.

Kritzer, B.E., Kay, S.J., y Sinha, T. (2011). "Next generation of individual account pension reforms in Latin America", *Social Security Bulletin*, 71(1):35-76.

Marthans, J. y Stok, J. (2013). "Una propuesta para reformar los sistemas privados de pensiones: el caso peruano". Documento de trabajo, Universidad de Piura.

Martínez, O., y Murcia, A. (2008). "Sistema de Comisiones de las Administradoras de Fondos de Pensiones en Colombia", Reporte técnico, Banco de la República de Colombia.

Masías, L., y Sánchez, E. (2007). "Competencia y Reducción de Comisiones en el Sistema Privado de Pensiones: El Caso Peruano", SBS Documentos de Trabajo. Superintendencia de Banca, Seguros y Administradoras de Fondos de Pensiones.

McGillivray, W. (2001). "Contribution evasion: Implications for social security pension schemes", *International Social Security Review*, 54(4):3-22.

Medina Giacomozzi, A., Gallegos Muñoz, C., Vivallo Ruiz, C. Cea reyes, Y. y Alarcón Torres, A. (2013). "Efecto sobre la rentabilidad que tiene para el afiliado la comisión cobrada por las administradoras de fondos de pensiones", *Journal of Economics Finance and Administrative Science*, 18(34):24-33.

Merton, R.C. (1969). "Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case", *The Review of Economics and Statistics*, 247-257.

Mesa-Lago, C. (2004). "Evaluación de un cuarto de siglo de reformas estructurales de pensiones en América Latina", *Revista de la CEPAL.*

Mesa-Lago, C. (2006). "Private and public pension systems compared: An evaluation of the Latin American experience", *Review of Political Economy*, 18(3):317-334.

Mincer, J.A. (1974). "Schooling and earnings". En Mincer, J.A. (ed), Schooling, experience, and earnings, 41-63. NBER.

Mitchell, O.S. (1998). "Administrative costs in public and private retirement systems". En Feldstein, M. (ed), Privatizing social security, pages 403-456. University of Chicago Press.

Murthi, M., Orszag, J.M. y Orszag, P.R. (1999). "Administrative costs under a decentralized approach to individual accounts: Lessons from the United Kingdom". En Holzmann, R. y Stiglitz, J. (eds), New Ideas about Old Age Security, 308-335. The World Bank, Washington D.C.

Poterba, J., Rauh, J., Venti, S. y Wise, D.A. (2005). "Utility evaluation of risk in retirement saving accounts". En Wise, D.A. (ed), Analyses in the Economics of Aging, 13-58. University of Chicago Press.

Queisser, M. (1998). "Regulation and supervision of pension funds: Principles and practices", *International Social Security Review*, 51(2):39-55.

SBS (2013). "Anexo Técnico 1: Metodología aplicable a los cálculos del aplicativo de comparación de comisiones", Reporte técnico, Superintendencia de Banca, Seguros y AFP, República del Perú.

Shah, H. (1997). "Towards better regulation of private pension funds", World Bank Policy Research Working Paper 1791.

Sinha,T. (2000). "Pension reform in Latin America and its Lessons for international policymakers", Volume 23 Kluwer Academic Pub.

Sinha,T. (2001). "Analyzing management fees of pension funds: A case study of Mexico", *Journal of Actuarial Practice*, 9:5-43.

Tapia, W. y Yermo, J. (2008). "Fees in individual account pension systems: A cross-country comparison", OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions No. 27, OECD Publishing.

Valdés-Prieto, S. (2008). "A theory of contribution density and implications for pension design", Social Protection & Labor Discussion Paper No. 0828, World Bank.

Vigna, E. (2014). "On efficiency of mean-variance based portfolio selection in defined contribution pension schemes", *Quantitative Finance*, 14(2):237-258.

Whitehouse, E. (2001). "Administrative charges for funded pensions: comparison and assessment of 13 countries". En Yermo, J. y Yunus, A. (eds), Private Pension Systems: Administrative Costs and Reforms, 85-154. OECD: Paris.

Yang, S. y Huang, H. (2009). "The impact of longevity risk on the optimal contribution rate and asset allocation for defined contribution pension plans", The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice, 34(4):660-681.

Zhou, X.Y. y Li, D.(2000). "Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework", Applied Mathematics and Optimization, 42(1):19-33.

Apéndices

A. Demostración de la Proposición 2.1

A partir de la definición de Υ dada por (48), tenemos

$$\partial_\delta \Upsilon(b,\delta) = \partial_\delta \mathbb{E}[W_s(T)] + b \times \partial_\delta \left(2\mathbb{E}[W_s(T)]^2 - \mathbb{E}[W_s(T)^2] \right). \tag{A1}$$

Como $\partial_\delta \mathbb{E}[W_s(T)] < 0$ para el escenario **A** y se asume $b > 0$, solo debemos establecer las condiciones para que

$$\partial_\delta \left(2\mathbb{E}[W_s(T)]^2 - \mathbb{E}[W_s(T)^2] \right) \leq 0. \tag{A2}$$

Utilizando las expresiones para $\mathbb{E}[W_s(T)]^2$ y $\mathbb{E}[W_s(T)^2]$ se verifica que

$$\partial_\delta \mathbb{E}[W_s(T)]^2 = -\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} (2T - i - j) W_i W_j e^{(\mu-\delta)(2T-i-j)} \tag{A3}$$

$$\partial_\delta \mathbb{E}[W_s(T)^2] = -\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} (2T - i - j) W_i W_j e^{(\mu-\delta)(2T-i-j)+\sigma^2(T-\max\{i,j\})}. \tag{A4}$$

A partir de los resultados previos y después de algunas simpificaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_\delta (2\mathbb{E}[W_s(T)]^2 - \mathbb{E}[W_s(T)^2]) &= -2\sum_{i=0}^{T-1} (T-i) W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(2 - e^{\sigma^2(T-i)} \right) \\ &\quad - \sum_{i=0, i\neq j}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} (2T - i - j) W_i W_j e^{(\mu-\delta)(2T-i-j)} \left(2 - e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} \right). \end{aligned} \tag{A5}$$

Finalmente, (A5) será menor o igual a cero si $2 - e^{\sigma^2(T-i)} \geq 0$ para todo i, lo cual se cumple cuando $2 - e^{\sigma^2 T} \geq 0$.

B. Demostración de la Proposición 2.2

Si δ se fija en el nivel dado por δ_N^* y utilizamos el hecho que $H_s > H_f$, entonces $\mathbb{E}[W_f(T)] = \mathbb{E}[W_s(T)]$, $\mathbb{E}[W_f(T)^2] > E[W_s(T)^2]$ y

$$\Upsilon(b,\delta_N^*) = \mathbb{E}[U(W_s(T))] - \mathbb{E}[U(W_f(T))] = b\left(\mathbb{E}[W_f(T)^2] - \mathbb{E}[W_s(T)^2] \right) > 0. \tag{B1}$$

Como el lado derecho de (B1) es positivo y creciente en b, tenemos $\Upsilon(b,\delta_N^*) > 0$ y además $\partial_b \Upsilon(b,\delta_N^*) > 0$.

Para $\delta > 0$, definimos la función $\Lambda(\delta)$ como

$$\Lambda(\delta) = 2\mathbb{E}[W_s(T)]^2 - \mathbb{E}[W_s(T)^2] - (2\mathbb{E}[W_f(T)]^2 - \mathbb{E}[W_f(T)^2]). \tag{B2}$$

A partir de la demostración de la Proposición 2.1, sabemos que si $\sigma^2 \leq \frac{1}{T}\ln(2)$, entonces $\partial_\delta \Lambda(\delta) < 0$. Más aún, va a existir $\delta^*_\infty > \delta^*_N$ tal que $\Lambda(\delta^*_\infty) = 0$. Para cualquier $b > 0$, se tiene

$$\Upsilon(b, \delta^*_\infty) = \mathbb{E}[W_s(T)] - \mathbb{E}[W_f(T)] = K. \tag{B3}$$

Notar que $K < 0$ y es independiente de b. Si tomamos dos valores arbitrarios del coeficiente de aversión al riesgo $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ tales que $b_1 > b_2$, y $\delta \in (\delta^*_N, \delta^*_\infty)$, entonces podemos afirmar que $\Upsilon(b_1, \delta) > \Upsilon(b_2, \delta)$ con δ dentro del intervalo previamente establecido, y además $\delta^*_A(b_1) > \delta^*_A(b_2)$. Notar que ambos $\delta^*_A(b_1)$ y $\delta^*_A(b_2)$ existen porque $\Upsilon(b, \delta^*_N) > 0$, $\Upsilon(b, \delta^*_\infty) < 0$ y $\partial_\delta \Upsilon(b, \delta) < 0$ para cualquier $b > 0$.

C. Demostración de la Proposición 3.1

Solo vamos a mostrar el resultado correspondiente a $Var(\widehat{W_s}(T))$, debido a que $Var(\widehat{W_f}(T))$ se puede obtener asumiendo $\delta = 0$ y multiplicando la expresión resultante por $e^{-2\alpha}$.

Primero trabajamos con $Var(Z_i W^i_s(T))$. Es claro que

$$\mathbb{E}[W^i_s(T)^2] = Var(W^i_s(T)) + \mathbb{E}[W^i_s(T)]^2 = W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} e^{\sigma^2(T-i)} \tag{C1}$$

porque

$$\mathbb{E}[W^i_s(T)] = W_i e^{(\mu-\delta)(T-i)}, \tag{C2}$$

y

$$Var(W^i_s(T)) = W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - 1 \right). \tag{C3}$$

Entonces,

$$Var(Z_i W^i_s(T)) = \mathbb{E}[Z_i^2 W^i_s(T)^2] - \mathbb{E}[Z_i W^i_s(T)]^2 \tag{C4}$$

$$= \mathbb{E}[Z_i^2]\mathbb{E}[W^i_s(T)^2] - \mathbb{E}[Z_i]^2 \mathbb{E}[W^i_s(T)]^2 \tag{C5}$$

$$= p_i \mathbb{E}[W^i_s(T)^2] - p_i^2 \mathbb{E}[W^i_s(T)]^2 \tag{C6}$$

$$= p_i W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} e^{\sigma^2(T-i)} - p_i^2 W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \tag{C7}$$

$$= p_i W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - p_i \right). \tag{C8}$$

Para obtener (C5), utilizamos el hecho que $W^i_s(T)$ y Z_i son independientes. La expresión (C6) se justifica porque Z_i~Bernoulli (p_i) y $\mathbb{E}[Z_i^2] = \mathbb{E}[Z_i] = p_i$. Para obtener (C7), se han utilizado (C2) y (C1). A continuación, se va a

verificar que $\mathrm{Cov}(W_s^i(T), W_s^j(T)) = \phi_{ij}(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1)$ para $i \neq j$ donde $\phi_{ij} = W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)}$. Asumiendo $j > i$, definiendo

(C9) $$\upsilon_{ij} = W_i W_j e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})(T-i+T-j)}$$

y utilizando las propiedades de W_s^i, tenemos

(C10) $$Cov(W_s^i(T), W_s^j(T)) = \upsilon_{ij}\ Cov\left(e^{\sigma(B(T)-B(i))}, e^{\sigma(B(T)-B(j))}\right)$$

(C11) $$= \upsilon_{ij}\ Cov\left(e^{\sigma(B(T)-B(j)+B(j)-B(i))}, e^{\sigma(B(T)-B(j))}\right)$$

(C12) $$= \upsilon_{ij}\mathbb{E}\left[e^{\sigma(B(j)-B(i))}\right] Var\left(e^{\sigma(B(T)-B(j))}\right)$$

(C13) $$= \upsilon_{ij} e^{\frac{\sigma^2}{2}(j-i)} e^{\sigma^2(T-j)}\left(e^{\sigma^2(T-j)} - 1\right)$$

(C14) $$= \phi_{ij}\left(e^{\sigma^2(T-j)} - 1\right).$$

Para obtener (C12) hemos utililizado el hecho que $B(T)-B(j)$ es independiente de $B(j)-B(i)$. La expresión (C13) se verifica porque ambas $e^{\sigma(B(j)-B(i))}$ y $e^{\sigma(B(T)-B(j))}$ son variables aleatorias con distribución log-normal. Si se asume $i>j$, entonces en vez de (C14) se obtiene $Cov(W_s^i(T), W_s^j(T)) = \phi_{ij}(e^{\sigma^2(T-i)} - 1)$. Consecuentemente, hemos demostrado que $Cov(W_s^i(T), W_s^j(T)) = \phi_{ij}(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1)$. También es importante calcular la covarianza de $Z_i W_s^i(T)$ y $Z_j W_s^j(T)$ con $i \neq j$. Entonces,

(C15) $$\begin{aligned} &Cov(Z_i W_s^i(T), Z_j W_s^j(T)) \\ &= \mathbb{E}[Z_i W_s^i(T) Z_j W_s^j(T)] - \mathbb{E}[Z_i W_s^i(T)]\mathbb{E}[Z_j W_s^j(T)] \end{aligned}$$

(C16) $$= \mathbb{E}[Z_i Z_j]\mathbb{E}[W_s^i(T) W_s^j(T)] - \mathbb{E}[Z_i]\mathbb{E}[Z_j]\mathbb{E}[W_s^i(T)]\mathbb{E}[W_s^j(T)]$$

(C17) $$= p_i p_j\left(\mathbb{E}[W_s^i(T) W_s^j(T)] - \mathbb{E}[W_s^i(T)]\mathbb{E}[W_s^j(T)]\right)$$

(C18) $$= p_i p_j\ Cov(W_s^i(T), W_s^j(T))$$

(C19) $$= p_i p_j W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)}(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1).$$

En (C16) hemos utilizado el hecho que B y Z son procesos independientes. Además, (C17) se justifica debido a que $\{Z_i\}$ es una secuencia independiente y $\mathbb{E}[Z_i] = p_i$ para todo i. De esta forma, $Var(\widehat{W_s}(T))$ se puede expresar como

(C20) $$\begin{aligned} &Var(\widehat{W_s}(T)) = \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0, j\neq i}^{T-1} Cov(Z_i W_s^i(T), Z_j W_s^j(T)) + \sum_{i=0}^{T-1} Var(Z_i W_s^i(T)) \\ &= \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0, j\neq i}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)}\left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0, j\neq i}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2 (T-\max\{i,j\})} - 1 \right) \\
&+ \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2 (T-i)} - p_i \right).
\end{aligned} \tag{C21}
$$

Para obtener (C21) se han utilizado las expresiones de $Cov(Z_i W_s^i(T), Z_j W_s^j(T))$ y $Var(Z_i W_s^i(T))$. Finalmente, después de algunas manipulaciones algebraicas obtenemos $Var(\widehat{W}_s(T))$ la cual coincide con la expresión dada en (61).

D. Demostración de la Proposición 3.2

Empezaremos demostrando la parte (1). Para lo cual definimos

$$v(x) = \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-ix}, \tag{D1}$$

$$z(x) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0, j\neq i}^{T-1} W_i W_j e^{-(i+j)x} e^{\sigma^2 (T-\max\{i,j\})}, \tag{D2}$$

$$u(x) = \sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 e^{-2ix+\sigma^2 (T-i)}, \tag{D3}$$

$$w(x,p) = \frac{v(x)^2}{\frac{1}{p} u(x) + z(x) - v(x)^2}, \tag{D4}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $T > 1$, $0 < p < 1$. La función $w(x, p)$ corresponde a $H_f(p)^2$ cuando $\mu = x$, o a $H_s(p)^2$ cuando $\mu - \delta = x$, y $\lim_{p\to 0} w(x,p) = 0$. Además, calculamos la derivada parcial de w con respecto a p

$$\frac{\partial w(x,p)}{\partial p} = \frac{u(x) v(x)^2}{p^2 \left(\frac{u(x)}{p} + z(x) - v(x)^2 \right)^2}, \tag{D5}$$

y definimos,

$$\widehat{w}(x) = \lim_{p\to 0} \frac{\partial w(x,p)}{\partial p} = \frac{v(x)^2}{u(x)} = \frac{1}{e^{\sigma^2 T}} \frac{\left(\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-ix} \right)^2}{\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-2ix-\sigma^2 i}}. \tag{D6}$$

La probabilidad p^* existirá si se verifica que $\hat{w}(\mu) > \hat{w}(\mu - \delta)$ porque $u(x) > 0$ para todo x, $\delta > 0$, y la expresión (40) implica que

$$H_s(1)^2 = w(\mu - \delta, 1) > w(\mu, 1) = H_f(1)^2 \tag{D7}$$

para todo μ. La prueba se basa en que $H_s(p)$ y $H_f(p)$ se intersecan en algún p si la derivada de $H_f^2(p)$ en cero es mayor que la derivada de $H_s^2(p)$ en cero. Entonces, solo se debe verificar que

(D8) $$\frac{\partial \widehat{w}(x)}{\partial x} > 0.$$

Derivando la función $\widehat{w}(x)$ en (122) respecto de x, obtenemos

(D9) $$\frac{\partial \widehat{w}(x)}{\partial x} = \frac{1}{e^{\sigma^2 T}} \frac{2\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-ix}}{\left(\sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 e^{-2ix-\sigma^2 i}\right)^2} \times \Psi(T),$$

(D10) $$\Psi(T) = -\sum_{i=0}^{T-1} W_i i e^{-ix} \sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 e^{-2ix-\sigma^2 i} + \sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 i e^{-2ix-\sigma^2 i} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-ix}.$$

Consecuentemente, necesitamos encontrar condiciones bajo las cuales $\Psi(T) > 0$ para todo $T > 1$. Utilizaremos inducción para determinar tales condiciones. Cuando $T = 2$, tenemos

(D11) $$\Psi(2) = (W_0 + W_1 e^{-x})(W_1^2 e^{-(2x+\sigma^2)}) - (W_1 e^{-x})(W_0^2 + W_1^2 e^{-(2x+\sigma^2)})$$

(D12) $$= W_0 W_1^2 e^{-(2x+\sigma^2)} - W_0^2 W_1 e^{-x}$$

(D13) $$= W_0 W_1 e^{-x}(W_1 e^{-(x+\sigma^2)} - W_0),$$

y al tener $x + \sigma^2 < 0$ y $W_1 \geq W_0$ implica que $\Psi(2) > 0$. . A continuación determinamos en que casos $\Psi(T+1) > 0$ dado que $\Psi(T) > 0$. Entonces,

(D14) $$\Psi(T+1) = \left(\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-ix} + W_T e^{-xT}\right)\left(\sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 i e^{-(2x+\sigma^2)i} + W_T^2 T e^{-(2x+\sigma^2)T}\right)$$
$$-\left(\sum_{i=0}^{T-1} W_i i e^{-ix} + W_T T e^{-xT}\right)\left(\sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 e^{-(2x+\sigma^2)i} + W_T^2 e^{-(2x+\sigma^2)T}\right)$$

(D15) $$= \Psi(T) + W_T e^{-xT} \sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 i e^{-(2x+\sigma^2)i} + W_T^2 T e^{-(2x+\sigma^2)T} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-ix}$$
$$-W_T T e^{-xT} \sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 e^{-(2x+\sigma^2)i} - W_T^2 e^{-(2x+\sigma^2)T} \sum_{i=0}^{T-1} W_i i e^{-ix}$$

(D16) $$= \Psi(T) + W_T e^{-xT} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-ix}(T-1)(W_T e^{-(x+\sigma^2)T} - W_i e^{-(x+\sigma^2)i}).$$

Como asumimos $\Psi(T) > 0$, $\Psi(T+1)$ en (D16) será mayor que cero cuando $W_{i+1} \geq W_i$ para todo $i = 0,...,T-1$, y $x + \sigma^2 < 0$. Entonces, se verifica la parte (1) al hacer $x = \mu$.

Para demostrar la parte (2), determinaremos condiciones bajo las cuales $\frac{\partial \hat{w}(x)}{\partial x} < 0$. Es fácil inferir que si $\Psi(T) < 0$ para $T > 1$, entonces $\frac{\partial \hat{w}(x)}{\partial x} < 0$. El supuesto necesario para obtener $\Psi(T) < 0$ se encontrará utilizando inducción. Empezando con (D16), si $W_{i+1} \le W_i$ para todo $i = 0,...,T-1$, y también $x + \sigma^2 > 0$, entonces $\Psi(T) < 0$ y entonces $\frac{\partial \hat{w}(x)}{\partial x} < 0$. Para todo $\delta > 0$, la última condición implica

(D17) $$\hat{w}(x-\delta) = \frac{v(x-\delta)^2}{u(x-\delta)} > \frac{v(x)^2}{u(x)} = \hat{w}(x).$$

Si $\alpha > 0$, entonces (D17) es equivalente a

(D18) $$\alpha \frac{u(\mu-\delta)}{v(\mu-\delta)^2} < \alpha \frac{u(\mu)}{v(\mu)^2}.$$

Además, (D7) es equivalente a

(D19) $$\frac{u(\mu-\delta)}{v(\mu-\delta)^2} + \frac{z(\mu-\delta) - v(\mu-\delta)^2}{v(\mu-\delta)^2} < \frac{u(\mu)}{v(\mu)^2} + \frac{z(\mu) - v(\mu)^2}{v(\mu)^2}.$$

Las desigualdades (D18) y (D19) implican

(D20) $$\frac{v(\mu-\delta)^2}{(1+\alpha)u(\mu-\delta) + z(\mu-\delta) - v(\mu-\delta)^2} > \frac{v(\mu)^2}{(1+\alpha)u(\mu) + z(\mu) - v(\mu)^2}.$$

Si consideramos $1+\alpha = \frac{1}{p}$ entonces $0 < p < 1$, $\alpha = \frac{1-p}{p}$, y (D20) es equivalente a $\mathrm{H}_s(p) > \mathrm{H}_f(p)$, lo cual completa la prueba de (2) cuando $x = \mu - \delta$.

E. Demostración de la Proposición 3.3

Comenzaremos con la parte (1). Si δ se fija en el nivel dado por δ_{N}^* y utilizamos el postulado (2) de la Proposición 3.2, entonces $\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)] = \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]$, $\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)^2] > \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2]$ y

(E1) $$\mathbb{E}[U(\widehat{W}_s(T))] - \mathbb{E}[U(\widehat{W}_f(T))] = b\left(\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)^2] - \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2]\right) > 0.$$

Como el lado derecho de (E1) es positivo y creciente en b, tenemos $\Upsilon(b,p,\delta_N^*) > 0$ y además $\partial_b \Upsilon(b,p,\delta_N^*) > 0$. A continuación demostraremos la parte (2) de la proposición. Si además de los supuestos de la Proposición 3.2, también consideramos

(E2) $$W_i = W_0 e^{\beta i}, \qquad \beta \in \mathbb{R}, \qquad W_0 > 0, \qquad 0 \le i \le T-1.$$

Asumiendo (E2), tenemos que en la demostración de la Proposición 3.2

(E3) $$\Psi(2) = W_0^3 e^{-(x-\beta)}(e^{-(x-\beta+\sigma^2)} - 1).$$

Además, el lado derecho de (D16) bajo (E2), es dado por

(E4) $$W_0^3 e^{-(x-\beta)T} \sum_{i=0}^{T-1} e^{-i(x-\beta)}(T-1)(e^{-(x-\beta+\sigma^2)T} - e^{-(x-\beta+\sigma^2)i}).$$

Si $x+\sigma^2 < \beta$, entonces $\Psi(2) > 0$ y $\Psi(T+1) > 0$ en la demostración de la Proposición 2.4, y la parte (1) de tal proposición también se cumple bajo (E2). Por otro lado, si $x+\sigma^2 > \beta$, entonces $\Psi(T+1) < 0$ y $\Psi(2) < 0$, lo cual satisface la prueba de la parte (2) de la Proposición 3.2. La demostración concluye al utilizar este último resultado dentro de una lógica similar a la utilizada en la parte (1).

F. Demostración de la Proposición 3.4

Empezaremos demostrando la parte (1). Si la comisión por saldo se fija en un nivel dado por $\delta_N^* = \delta_N^*(\mathbf{N})$, y utilizamos la parte (2) de la Proposición 3.2, entonces $\mathbb{E}[\widehat{W_f}(T)] = \mathbb{E}[\widehat{W_s}(T)]$ y $\mathbb{E}[\widehat{W_f}(T)^2] > E[\widehat{W_s}(T)^2]$ para todo $p \in (0,1]$. También se tiene

(F1) $$\Upsilon(b,p,\delta_N^*) = b\left(\mathbb{E}[\widehat{W_f}(T)^2] - \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2]\right)$$

(F2) $$= b\left(p^2(\mathbb{E}[W_f(T)^2] - \mathbb{E}[W_s(T)^2]) + p(1-p)(X_f - X_s)\right)$$

(F3) $$= b \;\; \Omega(T,p) > 0.$$

donde

(F4) $$X_s = \sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 e^{(2(\mu-\delta_N^*)+\sigma^2)(T-i)} \qquad \text{y} \qquad X_f = \sum_{i=0}^{T-1} W_i^2 e^{-2\alpha+(2\mu+\sigma^2)(T-i)}.$$

Con lo cual, (F3) implica que $\mathbb{E}[W_f(T)^2] > E[W_s(T)^2]$ para todo $p \in (0,1)$, pero $X_f \geq X_s$ y $\mathbb{E}[W_f(T)^2] - \mathbb{E}[W_s(T)^2] > X_f - X_s$ sólo se cumplen cuando $p \in (0, \frac{1}{2})$. Calculando la derivada parcial de $\Omega(T,p)$ con respecto a p, tenemos:

(F5) $$\frac{\partial \Omega(p)}{\partial p} = 2p\left(\mathbb{E}[W_f(T)^2] - \mathbb{E}[W_s(T)^2]\right) + (1-2p)\left(X_f - X_s\right) > 0.$$

Entonces, hemos demostrado que $\frac{\partial \Upsilon(b,p,\delta_N^*)}{\partial p} > 0$ para $p \in (0, \frac{1}{2})$. La prueba de la parte (2) es similar; pero, utilizamos el resultado parcial obtenido en la demostración de la Proposición 3.3.

G. Demostración de la Proposición 3.5

A partir de la definición de Υ dada en (68), se tiene

$$\partial_\delta \Upsilon(b,p,\delta) = \partial_\delta \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)] + b \times \partial_\delta \left(2\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]^2 - \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2] \right). \tag{G6}$$

Debido a que $\partial_\delta \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)] < 0$ para el escenario **N**, solo debemos establecer las condiciones bajo las cuales

$$\partial_\delta \left(2\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]^2 - \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2] \right) \leq 0. \tag{G7}$$

A partir de las expresiones (59) y (61), así como los supuestos de la proposición:

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]^2 = p^2 \mathbb{E}[W_s(T)]^2, \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2] = p^2 \mathbb{E}[W_s(T)^2] + p(1-p)X_s. \tag{G8}$$

Recordar que X_s fue definido en (F4) pero ahora $\delta = \delta_N^*$. Además, utilizando las expresiones adecuadas para $\mathbb{E}[W_s(T)]^2$ y $\mathbb{E}[W_s(T)^2]$ es fácil verificar que

$$\partial_\delta \mathbb{E}[W_s(T)]^2 = -\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} (2T-i-j) W_i W_j e^{(\mu-\delta)(2T-i-j)} \tag{G9}$$

$$\partial_\delta \mathbb{E}[W_s(T)^2] = -\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} (2T-i-j) W_i W_j e^{(\mu-\delta)(2T-i-j)+\sigma^2(T-\max\{i,j\})} \tag{G10}$$

$$\partial_\delta X_s = -2\sum_{i=0}^{T-1} (T-i) W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} e^{\sigma^2(T-i)}. \tag{G11}$$

Utilizando los resultados previos y después de algunas simplificaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\delta (2\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]^2 - \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)^2]) &= -2\sum_{i=0}^{T-1} (T-i) W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(2p - e^{\sigma^2(T-i)} \right) \\ &\quad -p\sum_{i=0,i\neq j}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} (2T-i-j) W_i W_j e^{(\mu-\delta)(2T-i-j)} \left(2 - e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} \right). \end{aligned} \tag{G12}$$

Finalmente, (G12) será menor o igual a cero $2p - e^{\sigma^2(T-i)} \geq 0$ para todo i, lo cual se satisface cuando $2p - e^{\sigma^2 T} \geq 0$.