

Lux, Thomas

**Article — Digitized Version**

## Tâtonnement-Prozeß und Cobweb-Theorem

Wirtschaftswissenschaftliches Studium

**Provided in Cooperation with:**

Kiel Institute for the World Economy – Leibniz Center for Research on Global Economic Challenges

*Suggested Citation:* Lux, Thomas (1991) : Tâtonnement-Prozeß und Cobweb-Theorem, Wirtschaftswissenschaftliches Studium, ISSN 0340-1650, Beck, München, Vol. 20, Iss. 5, pp. 245-248

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/1466>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

# Tâtonnement-Prozeß und Cobweb-Theorem

Dr. Thomas Lux, Würzburg

Eines der grundlegenden Paradigmen der Wirtschaftstheorie ist die Gleichgewichtsanalyse. Gefragt wird dabei nach Zuständen, in denen die Pläne der interagierenden Wirtschaftssubjekte konsistent sind. Im Fall eines Partialmarktes kann ein Gleichgewicht somit charakterisiert werden als diejenige Preis-Mengen-Kombination, bei der Angebot und Nachfrage identisch sind. Neben der Existenz eines solchen Gleichgewichts und seiner Eindeutigkeit interessiert in aller Regel auch dessen Stabilität, d.h. die Frage, ob es Tendenzen gibt, die nach einer Störung des Gleichgewichts wieder zu diesem hinführen oder nicht. Im Gegensatz zu den beiden zuerst genannten Eigenschaften, die im Rahmen einer statischen Betrachtung abgeklärt werden können, erfordert die Stabilitätsanalyse eine explizit dynamische, den Zeithorizont einbeziehende Analyse. Für das elementare Modell des Partialmarktes werden in der Lehrbuchliteratur meist der Tâtonnement- und der Cobweb-Prozeß als Stabilitätsuntersuchungen angeboten (vgl. z.B. Helmstädter, S. 34 ff.). Das Verhältnis, in dem diese Anpassungsmechanismen zueinander stehen, steht im Mittelpunkt der folgenden Ausführungen.

## 1. Tâtonnement-Prozeß

Die Vorstellung des Tâtonnement-Prozesses geht auf den „Vater“ der Gleichgewichtstheorie, Léon Walras, zurück. Ausgangspunkt ist die Annahme, daß nur zu Gleichgewichtspreisen getauscht wird. Liegt bei Eröffnung des Marktes ein nicht markträumender Preis vor, so wird dieser, sofern ein Angebotsmengenüberschuß AMÜ (Nachfragemengenüberschuß NMÜ) besteht, sukzessive solange verringert (erhöht), bis es zu einem Gleichgewichtszustand kommt. Walras verdeutlicht diesen Mechanismus mit der Vorstellung eines Auktionators, der sich an der Differenz der von Anbietern und Nachfragern jeweils geäußerten Transaktionswünsche orientiert.

Wann führt der so beschriebene Prozeß zum Gleichgewicht? *Abb. 1a* zeigt, daß das Marktgleichgewicht auf jeden Fall dann stabil ist, wenn Angebots- und Nachfragekurve „normal“ verlaufen, aber auch in manchen Fällen mit anomalem Verlauf der Marktfunktionen, z.B. wie in *Abb. 1b* bei positiv geneigter Nachfragekurve. Allgemeine Bedingung für Stabilität ist, daß die Steigung der Angebotskurve größer ist als die der Nachfragekurve, da nur dann bei höherem oder niedrigerem Preis als dem Gleichgewichtspreis Angebotsmengenüberschuß (AMÜ) bzw. Nachfragemengenüberschuß (NMÜ) besteht und damit der Preis zum Gleichgewicht hin verändert wird. Ist

die Nachfragekurve elastischer (vgl. *Abb. 1c*), so handelt der Auktionator „falsch“, die Ungleichgewichte verstärken sich im Zeitablauf. Diese intuitive graphische Analyse läßt sich folgendermaßen formalisieren: Wir gehen aus von linearen Angebots- und Nachfragefunktionen:

$$Y_t^d = a - b p_t \quad (1)$$

$$Y_t^s = -c + d p_t \quad (2)$$

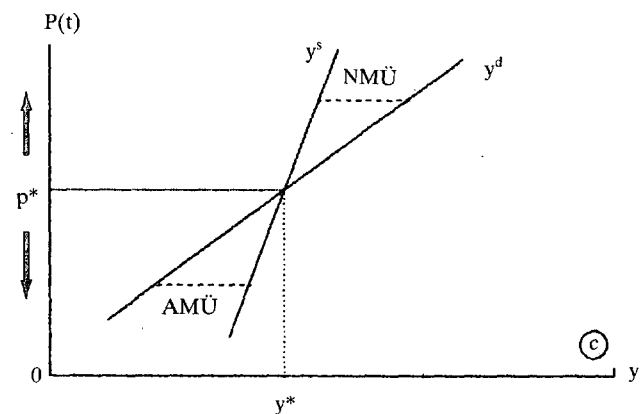
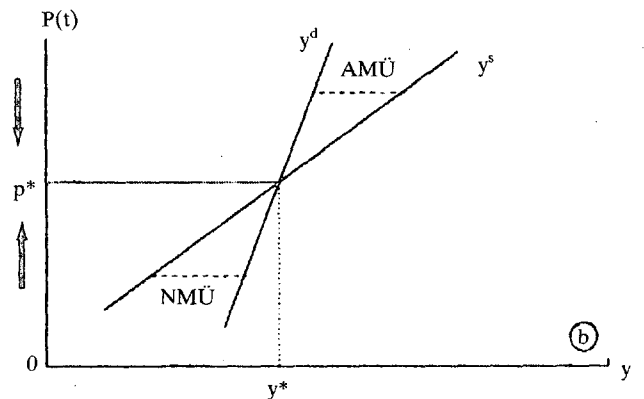
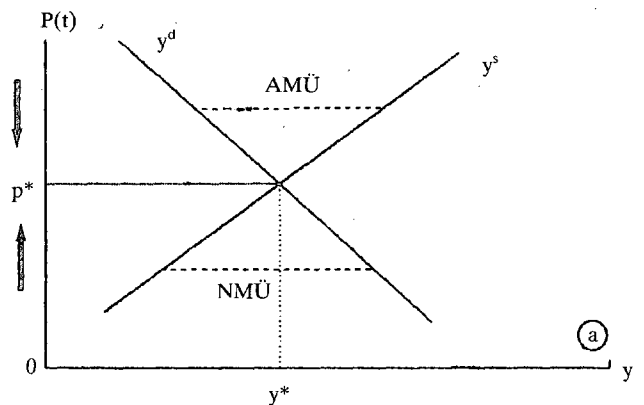


Abb. 1: Tâtonnement auf einem Partialmarkt, (a) und (b) stabiles, (c) instabiles Tâtonnement

wobei  $t$  ein Zeitindex ist und die übrigen Symbole die üblichen Bedeutungen besitzen.

Nach der Auktionator-Vorstellung hängt die Veränderung des Preises in der Zeit ( $dp/dt$ ) ab von der Differenz zwischen Nachfrage und Angebot in jedem Zeitpunkt, also

$$dp/dt = j [(a - bp_t) - (-c + db_t)] \quad (3)$$

bzw.

$$dp/dt + j(b + d)p_t = j(a + c),$$

wobei  $j$  ein (konstanter) Koeffizient für die Geschwindigkeit des Anpassungsprozesses ist.

In der letzten Umformung der Prozeßgleichung (3) haben wir es mit einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung zu tun. Allgemein besitzt eine solche Gleichung (allg.:  $dx/dt + a_1x = a_2$ ) die Lösung  $x(t) = A e^{-a_1t} + a_2/a_1$  (vgl. Gandolfo, 1985, S. 174 ff.), in unserem konkreten Fall also:

$$p(t) = A e^{-j(b+d)t} + (a+c)/(b+d). \quad (4)$$

Hierbei ist  $A$  eine Integrationskonstante, die erst konkretisiert werden kann, wenn ein Anfangswert  $p(t=0)$  des Anpassungsprozesses vorliegt. Die zweite Komponente der rechten Seite von (4) entspricht dem Gleichgewichtspreis  $p^*$  (generell kann diese sog. partikuläre Lösung einer Differential- oder Differenzgleichung in ökonomischen Anwendungen mit einem „Gleichgewicht“ des betrachteten Modells identifiziert werden), die erste Komponente gibt die Abweichung vom Gleichgewichtspreis zu jedem Zeitpunkt  $t$  wieder.

Stabilität impliziert, daß diese Abweichungen im Zeitverlauf kleiner werden. Dies ist genau dann der Fall, falls  $-j(b+d) < 0$  ist, bei sinnvollerweise positivem  $j$  erhält man also die Stabilitätsbedingung  $-b < d$ , womit die oben graphisch abgeleitete Aussage über das Verhältnis der Steigungen von Angebots- und Nachfragekurve bewiesen ist.

## 2. Cobweb-Theorem

Der Cobweb- (dt. Spinnennetz) Anpassungsprozeß geht von etwas anderen Voraussetzungen aus: Die Anbieter erwarten zu jedem Zeitpunkt, daß der Gleichgewichtspreis der Vorperiode auch weiterhin relevant sein wird und orientieren sich in ihren Produktionsentscheidungen daran. Stimmt die derart ermittelte Angebotsmenge nicht mit den Nachfrageplänen der Haushalte überein, so ändert sich natürlich der Marktpreis. Der neue Preis wird nun wiederum den Angebotsplänen der folgenden Periode zugrundegelegt. Die Abb. 2a, b zeigen bereits, daß der resultierende Prozeß bei normal verlaufender Angebots- und Nachfragekurve sowohl stabil als auch instabil sein kann.

Die Graphik suggeriert, daß — im Gegensatz zum Tâtonnement-Prozeß — in der Cobweb-Anpassung Transaktionen zu Ungleichgewichtspreisen durchgeführt werden. Dies ist aber nicht der Fall, da die Abb. 2a, b keine

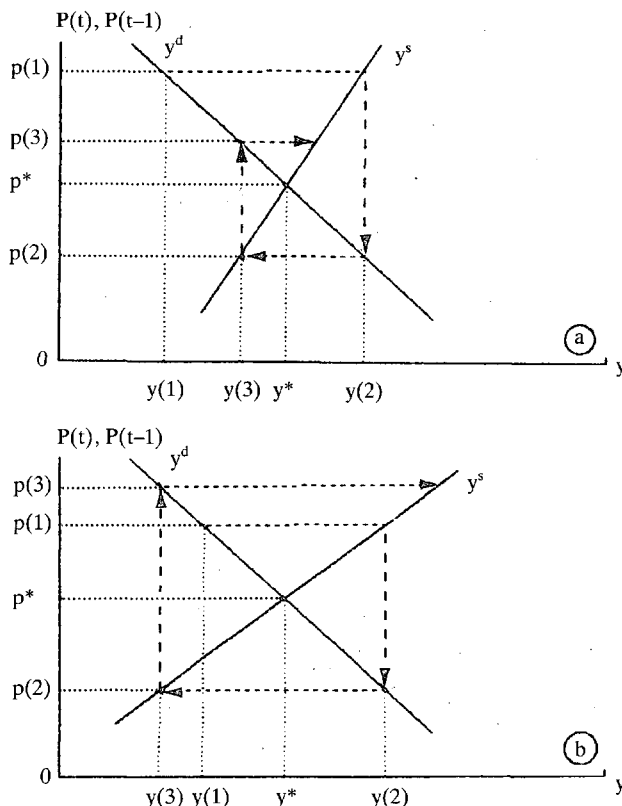


Abb. 2 (a) Stabile, (b) instabile Cobweb-Anpassung

Marktdiagramme wie die Abb. 1a, b, c sind: Angebot und Nachfrage beziehen sich hier auf unterschiedlich dimensionierte Größen, einmal den Preis der Vorperiode ( $p_{t-1}$ ), zum anderen den gegenwärtigen Preis ( $p_t$ ). Wie aber sieht dann ein Marktdiagramm für den Cobweb-Prozeß aus? Im Marktdiagramm tragen wir Angebot und Nachfrage in Abhängigkeit vom aktuellen Preis ab. Die Nachfragefunktion können wir somit aus Abb. 2 übernehmen, sie ist nach wie vor von der Form der Gleichung (1). Das Angebot ist dagegen bestimmt durch eine Gleichung der Form

$$Y_t^s = -c + dp_{t-1} \quad (5)$$

und ist damit ja offensichtlich unabhängig vom Preis der Gegenwart. Bei gegebenem Preis der Vorperiode haben wir stets ein vollkommen (bzgl.  $p_t$ ) preisunelastisches Angebot, das als vertikale Gerade abzutragen wäre. Da sich die Preise im Anpassungsprozeß verändern, verändert sich auch die Angebotsmenge zwischen aufeinanderfolgenden Perioden. Abb. 3a-c zeigt die Marktsituationen der Perioden  $t = 1$  bis  $t = 3$ , deren Ergebnisse auch aus Abb. 2a abgelesen werden können.

Wie läßt sich dieser Prozeß formalisieren? In jeder Periode liegen, wie wir gesehen haben, Gleichgewichtspreise vor, so daß wir Nachfrage (1) und Angebot (5) gleichsetzen können:

$$a - bp_t = -c + dp_{t-1} \quad (6)$$

bzw.

$$p_t + (d/b)p_{t-1} = (c + a)/b.$$

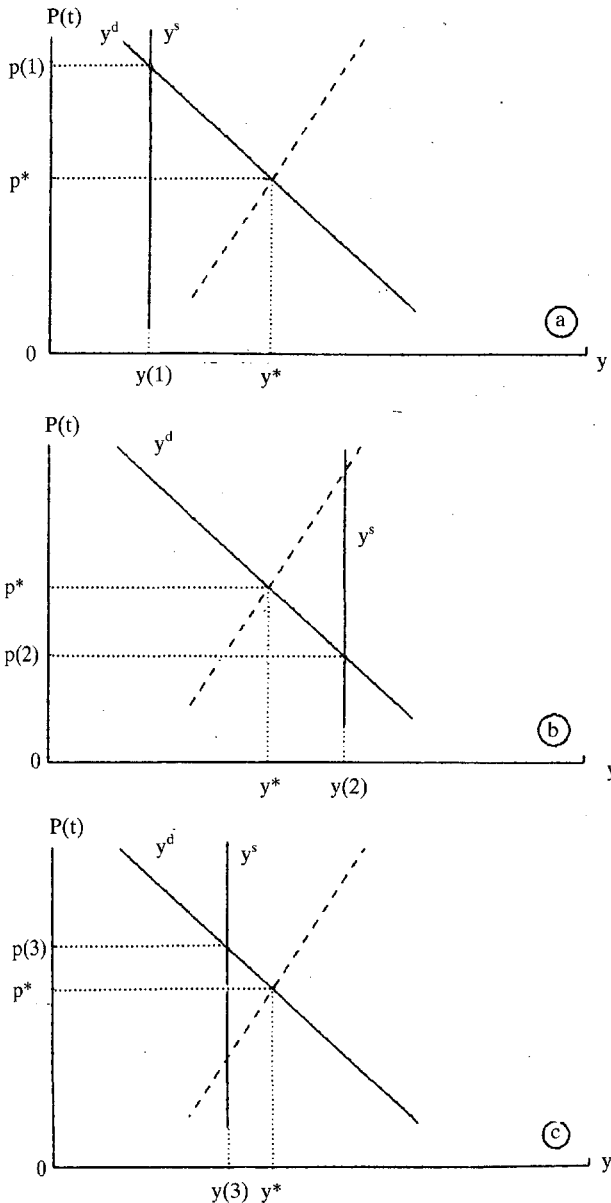


Abb. 3: Marktdiagramme für die Cobweb-Anpassung,  
(a)  $t = 1$ , (b)  $t = 2$ , (c)  $t = 3$

In der Umformung erhalten wir eine lineare Differenzgleichung erster Ordnung, die die Preisentwicklung im Cobweb-Prozeß beschreibt. Eine solche Gleichung (allg.:  $x_t + b_1 x_{t-1} = b_2$ ) besitzt allgemein folgende Lösung:  $x(t) = A(-b_1)^t + b_2 / (1 + b_1)$  (vgl. Gandolfo, 1985, S. 14 ff.), hier also:

$$p(t) = A(-d/b)^t + (c+a)/(b+d). \quad (7)$$

Wieder gibt die zweite Komponente ein Gleichgewicht, die erste die Abweichung davon zu jedem Zeitpunkt an. Die Abweichungen verringern sich im Zeitablauf offensichtlich dann, wenn der Klammerausdruck kleiner als 1 ist, also  $| -d/b | < 1$ , so daß man als Stabilitätskriterium erhält:  $|d| < |b|$ , die Steigung der Angebotskurve muß dem Betrag nach kleiner als die Steigung der Nachfragekurve sein. Die Stabilitätskriterien des Tâtonnement- und des Cobweb-Prozesses sind also vollkommen unterschiedlich. Dies liegt vor allem auch daran, daß sich die zugrundelie-

genden Modellstrukturen wesentlich unterscheiden: Können die Unternehmen im ersten Fall die Produktion ohne Verzug den veränderten Gegebenheiten anpassen, so ist dies im zweiten Fall nicht möglich: Der Output heute hängt von den Dispositionen gestern ab und ist kurzfristig nicht variierbar. Das Angebot ist zwar auch im zweiten Fall vom Marktpreis abhängig, nur vermag es kurzfristig auf dessen Veränderung nicht zu reagieren. Damit haben wir hier auch zwei Arten von Gleichgewichten zu unterscheiden: Das erste ist das Marktgleichgewicht in jeder einzelnen Periode (bei völlig unelastischem Angebot), das zweite das langfristige Gleichgewicht mit dem Gleichgewichtspreis  $(c+a)/(b+d)$ .

Eine abschließende Bemerkung zum Verhältnis von Tâtonnement- und Cobweb-Prozeß: Es wurde bisher überhaupt noch nicht untersucht, wie denn die Preisänderungen zwischen den temporären Gleichgewichten im Cobweb-Zyklus zustande kommen, z.B. vom nicht mehr markträumenden Preis der Vorperiode  $p_0$  zum neuen Gleichgewichtspreis  $p_1$  in Abb. 3a. Offensichtlich hat man sich diese Reaktion der Preisgröße als Auktionator-Prozeß vorzustellen, da ja erst nach Erreichen eines neuen Gleichgewichtspreises Transaktionen erfolgen. Der Cobweb-Mechanismus setzt also voraus, daß in jeder einzelnen Periode ein stabiles Tâtonnement erfolgt. Die Stabilität ist dann garantiert, wenn die Nachfragekurve normalen Verlauf besitzt, da ihre Steigung geringer sein muß als die der Angebotskurve, die im temporären Gleichgewicht (Abb. 3) gleich Null ist. Tâtonnement und Cobweb-Theorem sind demnach keine sich gegenseitig ausschließenden Mechanismen, vielmehr beziehen sich beide Anpassungsprozesse auf unterschiedliche Situationen: Die Realisation des (temporären) Marktgleichgewichts im ersten, den Übergang zwischen zeitlich benachbarten Marktgleichgewichten im zweiten Fall.

### 3. Die Bedeutung der Erwartungen für das Cobweb-Theorem

Die Struktur der Erwartungen der Produzenten bezüglich des sich am Markt bildenden Preises ( $p_t^e$ ) sind im ursprünglichen Cobweb-Ansatz von der einfachst denkbaren Art: Es herrschen sogenannte „naive“ Erwartungen ( $p_t^e = p_{t-1}$ ).

Nun widerlegt jedoch die zeitliche Entwicklung diese Erwartungen ständig (die Preise verändern sich ja), so daß die Beibehaltung dieser Hypothese nicht besonders plausibel ist. Nimmt man an, daß die Anbieter die zukünftige Veränderung des Preises zu antizipieren versuchen, so kann als einfachste Hypothese die einer extrapolativen Schätzung des Preises unterstellt werden (vgl. Goodwin, 1947):

$$p_t^e = p_{t-1} + \beta(p_{t-1} - p_{t-2}). \quad (8)$$

Bei einem positiven Wert des Gewichtungsfaktors  $\beta$  impliziert die Hypothese extrapolativer Erwartungen, daß bei

einem Anstieg (Rückgang) des Marktpreises im Vergleich zur Vorperiode ein Anhalten dieses Trends erwartet wird und damit weiteres Steigen (Sinken) von  $p$ . Bei normalem Kurvenverlauf bleibt der Trend jedoch in keiner Periode erhalten, es erfolgt vielmehr auf einen Anstieg ein Rückgang des Preises etc. Wie *Abb. 4a* verdeutlicht, führt die Hypothese (8) deshalb zu einer tendenziellen Vergrößerung der Differenz zwischen erwartetem und tatsächlichem Preis und damit zu tendenziell stärkerer Instabilität. Umgekehrt führt negatives  $\beta$ , d.h. die Erwartung einer Umkehr des Trends, zu einer tendenziellen Stabilisierung (vgl. *Abb. 4b*, in der wie in *Abb. 4a* der Grenzfall eines bei naiven Erwartungen gleichmäßigen Zyklus zugrundegelegt wurde, d.h.  $|\beta| = |d|$ ). Dies gilt natürlich nur solange, wie der Erwartungsparameter  $\beta$  keine extremen Werte annimmt; die Region, innerhalb derer er zu

größerer Stabilität beiträgt, liegt hier — auch intuitiv einsichtig — bei  $-1 < \beta < 0$ .

Eine Erwartungsbildung der zuletzt genannten Art ( $\beta < 0$ ) wäre wohl auch eher als rational zu bezeichnen, da den Individuen doch nach einigen Perioden die Zyklicität des Marktgeschehens deutlich sein müßte. Wird dies nicht gesehen, so würde ein höherer Grad von „Rationalität“ der Erwartungsbildung auf jeden Fall darin bestehen, daß mehr verfügbare Informationen genutzt werden. Ist die Logik des Geschehens generell unbekannt, so wäre es denkbar, daß die Anbieter den Preis für das Resultat eines stochastischen Prozesses halten. Für ihre Erwartungsbildung würden sie dann sinnvollerweise versuchen, den Erwartungswert der unbekanntem Verteilungsfunktion zugrunde zu legen, der sich als arithmetisches Mittel aller bisher beobachteten Preise ergibt:

$$p_t^e = 1/t \cdot \sum_{v=1}^t p_v \quad (9)$$

Tatsächlich führt eine derartige Erwartungsbildung zu einer erheblichen Vergrößerung des stabilen Bereichs, denn es läßt sich zeigen (vgl. *Carlsson*), daß das Stabilitätskriterium für den derart modifizierten Cobweb-Prozeß identisch ist mit demjenigen für die Stabilität eines Tâtonnements: Die Steigung der Angebotskurve muß größer sein als die der Nachfragekurve. Damit sind hier u.a. alle Fälle mit normalem Kurvenverlauf stabil. Auch dieses Resultat läßt sich anschaulich verdeutlichen: Man gehe aus von einem Markt, der beim Preis  $p_1$  (Menge  $y_1$ ) oberhalb des Gleichgewichtspreises eröffnet wird. Für die Periode  $t = 2$  besitzen die Unternehmen nur die Information dieses ersten Preises, nach (9) werden sie trivialerweise erwarten, daß der Preis konstant bleiben wird. Sie bieten also  $y_2$  an, tatsächlich sinkt der Marktpreis auf  $p_2$ . Der erwartete Preis der folgenden Periode  $p_2^e = 1/2 (p_1 + p_2)$  liegt ersichtlich wesentlich näher am Gleichgewichtspreis als die beiden vorausgegangenen, wobei in der *Abb. 5* ein ursprünglich instabiles Szenario zugrundegelegt wurde. Alle folgenden erwarteten Preisgrößen liegen sukzessive näher am Gleichgewicht.

Literatur

*Carlsson, J.A.*, An invariably stable cobweb model, in: *Review of Economic Studies*, Vol. 35 (1968), S. 360–362.  
*Ezekiel, M.*, The cobweb-theorem, in: *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 52 (1938), S. 255–280.  
*Gandolfo, G.*, *Economic Dynamics: Methods and Models*, Amsterdam 1985.  
*Goodwin, R.M.*, Dynamic coupling with especial reference to markets having production lags, in: *Econometrica*, Vol. 15 (1947), S. 181–204.  
*Hanau, A.*, Der Schweinezyklus, in: *Handwörterbuch der Sozialwissenschaften*, Bd. 9, Tübingen, Göttingen 1956, S. 171–173.  
*Helmstädter, E.*, *Wirtschaftstheorie I: Mikroökonomische Theorie*, 2. Aufl., München 1979.  
*Nerlove, M.*, Adaptive expectations and the cobweb-phenomena, in: *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 73 (1958), S. 227–240.

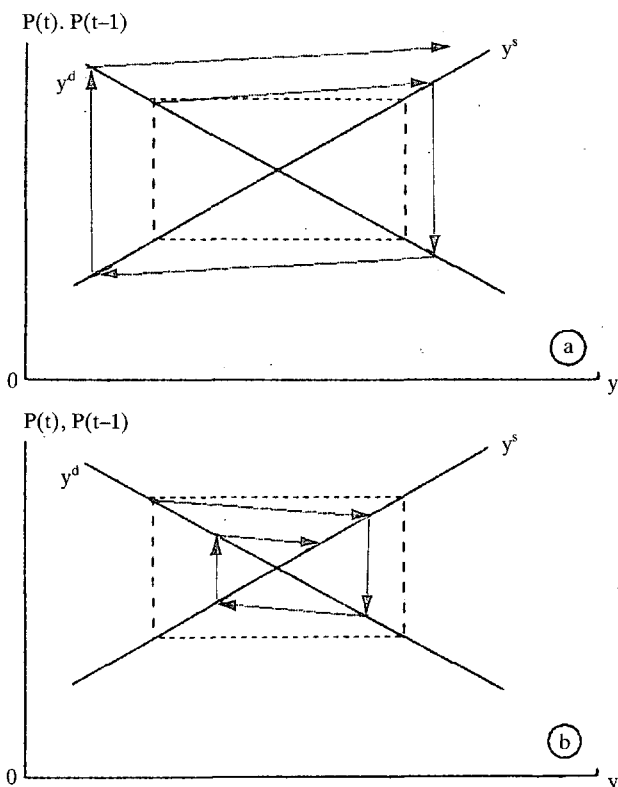


Abb. 4: Cobweb-Anpassung bei adaptiven Erwartungen, (a)  $\beta > 0$ , (b)  $\beta < 0$

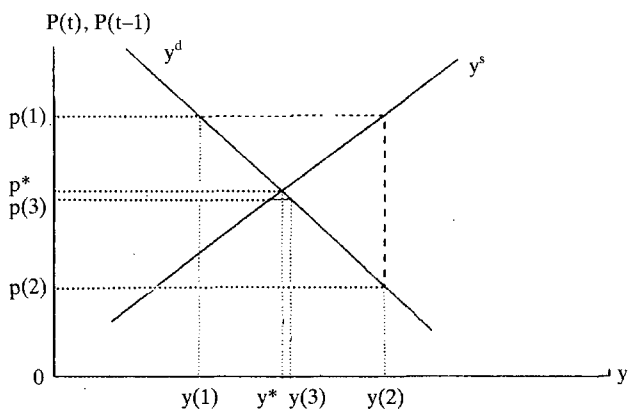


Abb. 5: Anbieter betrachten Preis als Zufallsvariable