

Karrenberg, Rainer

Article — Digitized Version

Die lineare Optimierung

Wirtschaftsdienst

Suggested Citation: Karrenberg, Rainer (1969) : Die lineare Optimierung, Wirtschaftsdienst, ISSN 0043-6275, Verlag Weltarchiv, Hamburg, Vol. 49, Iss. 5, pp. 290-296

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/133974>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WISSENSCHAFT FÜR DIE PRAXIS

Die ständig wachsende Zahl neuer Erkenntnisse und Methoden macht es für Praktiker, Fachwissenschaftler und Studenten gleichermaßen schwierig, mit der Entwicklung der modernen Wirtschaftstheorie und der theoretischen Wirtschaftspolitik Schritt zu halten. In der steigenden Flut von Informationen ist Wichtiges sehr schwer von Unwichtigem, Verständliches kaum von Unverständlichem zu trennen. Der WIRTSCHAFTSDIENST möchte seinen Lesern dieses Informationsproblem erleichtern: In loser Folge sollen künftig wichtige neuere Entwicklungen unseres Fachs behandelt werden. Der folgende Beitrag dient, wie in Heft 3 angekündigt, als Ergänzung zur Einführung in die Unternehmensführung. Er soll die Voraussetzungen, Begriffe und Möglichkeiten der Methode der linearen Optimierung anhand eines Beispiels aufzeigen.

Die Lineare Optimierung

Rainer Karrenberg, Hamburg

Die Methode des linearen Optimierens – landläufig auch als lineares Programmieren oder lineare Programmierung bezeichnet – erweist sich immer mehr als wirksames Instrument zur theoretischen und praktischen Lösung wirtschaftlicher Probleme. Fast jeder Hersteller elektronischer Rechenanlagen bietet seinen Kunden heute die Möglichkeit, auch größere Planungsprobleme auf diese Weise zu lösen. Insofern ist die reine Technik (d. h. die mathematische Behandlung) für denjenigen, der wirtschaftliche Aufgaben zu lösen hat, eher von untergeordneter Bedeutung. Wichtiger ist, daß die zur Verfügung stehenden Mittel auf ihre Anwendbarkeit bei speziellen Problemen geprüft werden können. Dazu ist allerdings eine gewisse Vertrautheit mit den Voraussetzungen, Begriffen und Möglichkeiten dieser Methode nötig.

Variable und Programme

Obwohl die folgenden Darlegungen bewußt unabhängig von einem speziellen Problem erfolgen, wird zur Verdeutlichung der zu erklärenden Begriffe ein typisches Beispiel herangezogen. Wegen der relativ leichten Überschaubarkeit wird hier ein Fall aus dem Bereich der betrieblichen Planung gewählt:

Eine Möbelfabrik plant das Produktionsprogramm für die nächste Periode. Es soll auf den vorhandenen betrieblichen Anlagen gefertigt werden. Von Investitionen sei deshalb abgesehen. Die Aufgabe der Unternehmensleitung beruht insofern nur darin zu bestimmen, in welcher Menge die einzelnen Typen des Sortiments (Tische, Stühle, Wohnzimmer-, Schlafzimmerschränke usw.) hergestellt werden sollen. (Gleichzeitig könnte natürlich noch über die Einzelheiten der Produktion entschieden werden, doch soll das hier aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt werden.)

Die verschiedenen Typen des Sortiments werden von 1 bis zu der letzten Zahl n durchnummeriert. Sie sollen in bestimmten Mengen x_1, x_2, \dots, x_n produziert werden (x_1 gibt z. B. die Menge der herzustellenden Tische an, wenn Tische die Sortimentsnummer 1 erhalten). Die Aufgabe besteht nun darin, den Größen x_1, x_2, \dots, x_n diejenigen Zahlen zuzuordnen, durch die den betrieblichen Zielsetzungen (Gewinnmaximierung, Rentabilitätsmaximierung o. ä.) optimal Rechnung getragen wird. Da man höchstens auf die Produktion eines Artikels im Sortiment verzichten will (die

Menge $x = 0$), im übrigen aber sonst nur mehr als null Einheiten produzieren wird, gilt:

$$(1) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

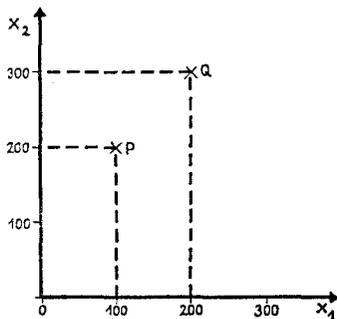
(\geq gleich oder größer als).

Die Größen x_1, x_2, \dots, x_n heißen Variable. Jede Zuordnung nicht-negativer Zahlen zu diesen Variablen bildet ein Programm.

Ist $n = 2$, d. h. werden nur zwei verschiedene Produkte (in den Mengen x_1 und x_2) hergestellt, so lassen sich alle Programme in einem einfachen Koordinatensystem darstellen.

Abbildung 1

Programmbereich ohne Restriktionen



Jeder Punkt oberhalb der x_1 -Achse und rechts von der x_2 -Achse stellt ein mögliches Programm dar. Im Punkt P werden 100 Einheiten von Produkt 1 und 200 von Produkt 2 hergestellt; im Punkt Q produziert das Unternehmen 200 Einheiten von Gut 1 bzw. 300 Einheiten von Gut 2.

Berücksichtigung von Restriktionen

Selbstverständlich kann die betrachtete Fabrik aber nicht jedes Programm realisieren. Denn zur Verwirklichung eines Programms sind Rohstoffe, Arbeitskräfte, Maschinenkapazitäten notwendig. Alle diese Faktoren sind nur beschränkt vorhanden. Ebenso sind Finanzmittel erforderlich, die naturgemäß nicht in jeder Höhe verfügbar sind. Auch durch Absatzgrenzen und beschränkte Lagerkapazitäten wird die Produktion der einzelnen Güter eingeschränkt. Allen diesen Restriktionen ist gemeinsam, daß gewisse Höchstgrenzen durch das Programm nicht überschritten werden dürfen. Diese Beschränkungen werden zunächst von 1 bis m_a durchnummeriert.

Wir betrachten jetzt eine beliebige, z. B. eine Rohstoffbedingung, die durch i gekennzeichnet wird. Die Menge, die im Programm nicht überschritten werden kann, betrage insgesamt A_i . Zur Herstellung von einer Einheit des 1. Produkts werden a_{i1} Mengeneinheiten davon benötigt. Bei Herstellung von x_1 Mengeneinheiten des Produkts 1

würden also $a_{i1} \cdot x_1$ Einheiten des Rohstoffes i gebunden. Beim Produkt 2 betrage der Verbrauch je Stück a_{i2} . Der Gesamtbedarf für diese Produktion ist dann $a_{i2} \cdot x_2$, usw. Insgesamt würden durch das Programm ohne Restriktion im Rohstoffbereich also

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

Mengeneinheiten verbraucht. Die Begrenzung besteht darin, daß insgesamt die zur Verfügung stehende Menge A_i nicht überschritten werden darf. Es ergibt sich demnach folgende Beschränkung:

$$(2a) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq A_i$$

(für $i = 1, 2, \dots, m_a$)

(\leq gleich oder kleiner als).

Dabei können die sog. Produktionskoeffizienten a_{i1}, a_{i2} , usw. auch den Wert Null annehmen. Das ist dann der Fall, wenn die entsprechenden Produkte von dem jeweiligen Faktor nichts verzehren.

Andere Nebenbedingungen

Gehen wir z. B. davon aus, daß die Holzlager der Möbelfabrik in der nächsten Periode aus technischen Gründen ganz oder doch teilweise abgebaut werden müssen, so erhalten wir als Beschränkung einen Mindestverbrauch, der durch das Programm nicht unterschritten werden darf. Ebenso mag aufgrund von Lieferverträgen oder der Sortimentspolitik des Unternehmens bei einigen Typen eine Mindestproduktion erforderlich sein.

Numeriert man auch diese Bedingungen durch $(1, 2, \dots, m_b)$, so erhält man diesmal

$$(2b) \quad b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \dots + b_{jn}x_n \geq B_j$$

(für $j = 1, 2, \dots, m_b$).

Dabei sind $b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn}$ die Produktionskoeffizienten bei der Beschränkung j . B_j ist die durch das Programm zu gewährleistende Mindestmenge.

Schließlich kann es notwendig sein, gewisse Bedingungen exakt zu erfüllen. Bezeichnet x_1 etwa die Menge von Tischplatten, die zu produzieren sind, und x_2 und x_3 Tischgestelle unterschiedlicher Typen für diese Platten, so muß gelten

$$x_1 = x_2 + x_3 \text{ bzw. } x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Ganz allgemein führt das zu der Bedingung

$$(2c) \quad c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n = C_k$$

(für alle $k = 1, 2, \dots, m_c$).

Dabei sind $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kn}$ wiederum Produktionskoeffizienten und C_k die durch das Programm zwingend zu realisierenden Werte.

Die Bedingungen (2a) heißen „Kleingleichungen“ und (2b) „Größergleichungen“. Zusammen

mit den Gleichungen (2c) heißen sie Nebenbedingungen oder Restriktionen. Nur die Programme, die alle Nebenbedingungen erfüllen, kommen für die Entscheidung in Frage. Nur sie sind realisierbar. Sie sind zulässig und bilden zusammen den zulässigen Bereich (ZB). Der Begriff des ZB ist im Rahmen der linearen Programmierung so wichtig, daß es notwendig ist, ihn zu veranschaulichen.

Grafische Darstellung des zulässigen Bereichs (ZB)

Wir gehen wieder von einer Zweiproduktunternehmung aus. Ihr stehe eine Maschine zur Verfügung. Im Jahr kann dieses Aggregat insgesamt 2400 Std. lang genutzt werden. Zur Herstellung einer Einheit vom 1. Produkt werden 8 Stunden benötigt, für das 2. Produkt 6 Stunden. Wir erhalten also eine Kleinergleichung.

(3) $8x_1 + 6x_2 \leq 2400$

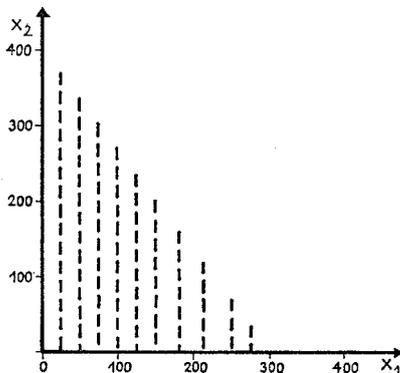
Nehmen wir an, die Menge für x_1 werde mit 150 festgesetzt. Dann verbleiben für x_2 noch $2400 - 8 \cdot 150 = 1200$. Bei einem Zeitbedarf von 6 Stunden pro Einheit können dann höchstens 200 Stück von Produkt 2 hergestellt werden.

Für $x_1 = 150$ muß also gelten $x_2 \leq \frac{1}{6}(2400 - 8 \cdot 150) = 200$. Diese Berechnung läßt sich für verschiedene x_1 -Werte durchführen. Für $x_1 = 210$ erhielte man dann $x_2 \leq \frac{1}{6}(2400 - 8 \cdot 210) = 120$.

In Abb. 2 sind diese Überlegungen für mehrere x_1 -Werte durchgeführt. Die jeweils zulässigen x_2 -Werte sind gestrichelt gezeichnet.

Abbildung 2

Bestimmung der Menge x_2 in Abhängigkeit von x_1



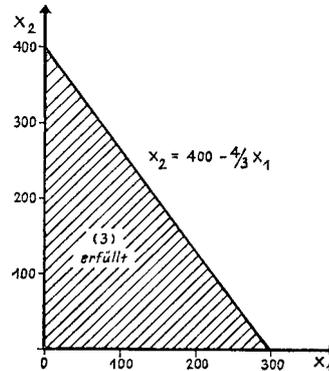
Man sieht, daß jeder fixierte x_1 -Wert einen bestimmten Höchstwert für x_2 festlegt. Alle diese Höchstmengen liegen auf einer Geraden, die durch (4) analytisch dargestellt ist.

(4) $x_2 = \frac{1}{6}(2400 - 8x_1)$ oder $x_2 = 400 - \frac{4}{3}x_1$

Zulässig sind nur noch die x_1 - x_2 -Kombinationen, die im schraffiert gezeichneten Gebiet der Abb. 3 liegen:

Abbildung 3

Zulässiger Bereich bei einer Nebenbedingung



Lautet eine weitere Beschränkung – z. B. eine Rohstoffbedingung –:

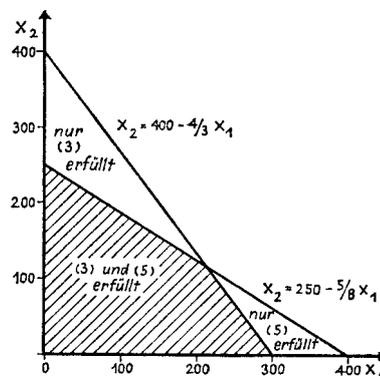
(5) $5x_1 + 8x_2 \leq 2000$ (dabei ist 2000 der vorhandene Rohstoffbestand A_i , 5 der Rohstoffverbrauch pro Einheit des Gutes 1 (a_{i1}), 8 der Verbrauch je Einheit des Gutes 2), so werden hier die gerade noch zulässigen Kombinationen (analog der vorhergehenden Überlegungen*) durch

$x_2 = 250 - \frac{5}{8}x_1$

dargestellt. Nur solche Programme, die zugleich die nunmehr mathematisch formulierten Nebenbedingungen (3) und (5) erfüllen, können zulässig sein. In Abb. 4 ist der entsprechende Bereich angegeben.

Abbildung 4

Zulässiger Bereich bei zwei Nebenbedingungen



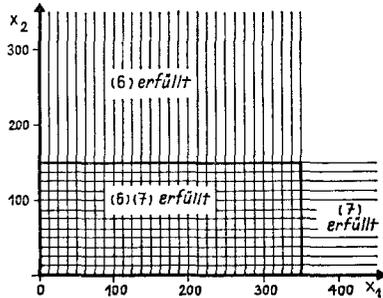
Das Modell läßt sich dadurch erweitern, daß auch die Absatzgrenzen für die beiden Produkte berücksichtigt werden. Sie sollen lauten

- (6) $x_1 \leq 350$
- (7) $x_2 \leq 150$

*) Setzt man nämlich x_1 wiederum gleich 150, so ergibt sich $x_2 \leq \frac{2000}{8} - \frac{5}{8} \cdot 150$ oder allgemein die oben angeführte Gleichung.

Beide Restriktionen bringen keine Interdependenzen zwischen beiden Produkten zum Ausdruck, sondern unabhängig von x_2 darf x_1 den Wert 350 nicht übersteigen. Die Bedingungen (6) und (7) sind in Abb. 5 veranschaulicht.

Abbildung 5
Einbeziehung von Absatzgrenzen



Im senkrecht schraffierten Bereich liegen alle Kombinationen, die der Bedingung $x_1 \leq 350$ genügen. Waagrecht schraffiert ist das Gebiet, für das $x_2 \leq 150$ erfüllt ist. In einem bestimmten Bereich sind beide Bedingungen erfüllt.

Als nächstes werden Größergleichungen der Gestalt (2b) untersucht:

Es möge gelten:

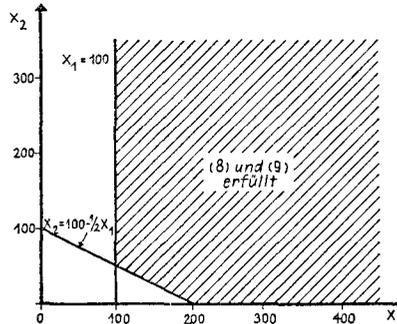
(8) $x_1 \geq 100$ (Mindestproduktion)

(9) $x_1 + 2x_2 \geq 200$ (Mindestverbrauch eines Rohstoffes, um ein Lager zu räumen)

In diesem Falle liegt der zulässige Bereich oberhalb der begrenzenden Geraden:

$x_1 = 100, x_2 = 100 - \frac{1}{2}x_1$ (vgl. Abb. 6).

Abbildung 6
Berücksichtigung von Mindestbedingungen



VERÖFFENTLICHUNGEN DES HAMBURGISCHEN WELT-WIRTSCHAFTS - ARCHIVS
UND DER AKADEMIE FÜR WIRTSCHAFT UND POLITIK

HAMBURGER HEFTE

für Wirtschafts- und Gesellschaftspolitik

Herausgegeben von Heinz-Dietrich Ortlieb

Heft 2/3 Heinz-Dietrich Ortlieb

Die mißverständene Revolte

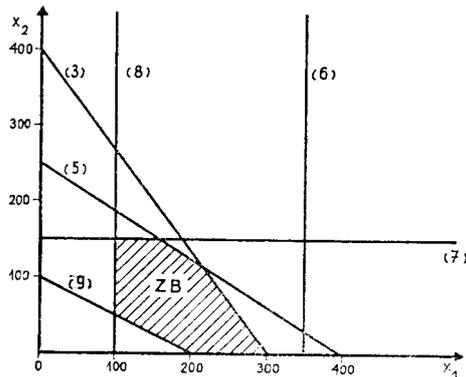
Gesellschaftsreform, Hochschulreform und Studentenrevolte

90 Seiten, 1968, Großoktav, Preis brosch. DM 9,80

VERLAG WELTARCHIV GMBH - HAMBURG

Zur Festlegung des optimalen Lösungsbereiches kommt es in der graphischen Darstellung darauf an, das Gebiet darzustellen, in dem die Bedingungen (3) und (5)–(9) alle gleichermaßen erfüllt sind. Dazu werden die Abb. 4, 5 und 6 übereinandergelegt. Der Bereich, der in allen Abbildungen schraffiert ist, stellt den für alle Bedingungen zulässigen Bereich dar (Abb. 7). Alle x_1 - x_2 -Kombinationen, die nicht in diesen ZB fallen, scheiden von allen weiteren Überlegungen aus.

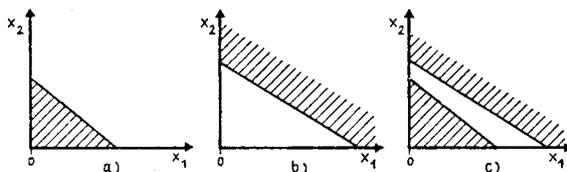
Abbildung 7
Zulässiger Bereich bei mehreren Nebenbedingungen



Die Gestalt des ZB

Der ZB kann nicht jede beliebige Gestalt annehmen. Es ist sogar möglich, daß er sich überhaupt nicht ermitteln läßt. Das ist dann der Fall, wenn sich die einzelnen Teilbereiche in keinem Punkt überdecken, wie etwa in Abb. 8a–8c dargestellt. Dabei veranschaulichen die Abb. 8a und 8b zwei einzelne Beschränkungen, die in Abb. 8c zusammengefügt sind.

Abbildung 8
Nicht realisierbares Programm



Die Nebenbedingungen lassen hier kein realisierbares Programm zu. Sie schließen sich gegenseitig aus. Der ZB ist in solchem Fall leer.

Aber auch dann, wenn es zulässige Programme gibt, hat der ZB immer eine bestimmte Gestalt. Er wird einmal – wegen der speziellen (linearen) Art der Nebenbedingungen – immer durch Geradenstücke begrenzt. Zum anderen bildet er eine Einheit, d. h. er kann nie aus mehreren getrennten

Bereichen bestehen. Schließlich ist er – mit dem Fachausdruck gesagt – konvex, d. h. die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des ZB führt nicht aus ihm heraus.

Es ist jedoch möglich, daß der ZB nicht nach allen Seiten hin abgeschlossen ist (vgl. dazu Abb. 6). Die jeweilige Gestalt hängt allein von den Restriktionen ab. Dazu sind oft nicht alle Nebenbedingungen erforderlich. Denn es gibt Restriktionen, die bereits erfüllt sind, wenn eine oder mehrere andere berücksichtigt sind. Sie heißen überflüssig oder *redundant*. In Abb. 7 ist z. B. die durch $x_1 \leq 350$ (6) gegebene Nebenbedingung überflüssig. Allerdings ist es allgemein nicht möglich, solche unnötigen Restriktionen rechtzeitig auszusondern. Die Redundanz wird erst aus der Gesamtdarstellung ersichtlich.

Für die Unternehmensleitung ist die Bestimmung des zulässigen Bereichs oder zumindest eine annähernde Vorstellung darüber sehr wichtig. Denn durch sie wird der Rahmen abgesteckt, in dem sich alle anderen Überlegungen bewegen müssen. Der ZB stellt immer den Entscheidungsspielraum dar. Je enger er ist, um so weniger Platz bleibt für die Verwirklichung der möglichen wirtschaftlichen Zielsetzungen.

Die Zielfunktion

Ist der ZB festgelegt und enthält er mehr als nur eine realisierbare Kombination, so muß das Programm bestimmt werden, nach dem die Unternehmung sich in der nächsten Periode richten soll. Im allgemeinen wird die Auswahl aufgrund einer Bewertung erfolgen, die dem Unternehmensziel entspricht. Ist dieses z. B. Gewinnmaximierung, so wird jedem zulässigen Programm der zu erwartende Gewinn zugeordnet. Die Wahl wird dann auf die Alternative mit dem höchstmöglichen Gewinn fallen. Bei Absatz- oder Umsatzmaximierung kann analog verfahren werden, ebenso bei der Kostenminimierung.

Die kombinierte Zielsetzung „Umsatzmaximierung bei vorgegebenem Mindestgewinn“ läßt sich so erreichen, daß man den zulässigen Bereich auf die Kombinationen einschränkt, die den Mindestgewinn nicht unterschreiten (man führt also zusätzliche Nebenbedingungen ein), und dann wie bei der gewöhnlichen Umsatzmaximierung verfährt. In ähnlicher Weise läßt sich ein Programm für die Zielsetzung „Absatzmaximierung bei angemessenem Gewinn“ durchführen. Im folgenden wird zunächst von der einfachen Zielsetzung Gewinnmaximierung ausgegangen.

Wir nehmen an, daß ein Unternehmen n Produkte herstellt. Die Stückelöse sind für die Produkte 1 bis n p_1, p_2, \dots, p_n ; k_1, k_2, \dots, k_n sind die variablen Kosten pro Stück. Die Deckungs-

spannen $d_1 = p_1 - k_1, d_2 = p_2 - k_2, \dots, d_n = p_n - k_n$ geben dann die Bruttogewinne je Einheit an. Die fixen – d. h. die von der Wahl des Programmes unabhängigen – Kosten werden mit F bezeichnet.

Die Aufgabe beruht nun darin, ein zulässiges Programm – d. h. x_1, x_2, \dots, x_n – unter folgenden Bedingungen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq A_i$$

(für $i = 1, 2, \dots, m_a$)

$$b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \dots + b_{jn}x_n \leq B_j$$

(für $j = 1, 2, \dots, m_b$)

$$c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n = C_k$$

(für $k = 1, 2, \dots, m_c$)

zu bestimmen, bei dem der Gewinn maximiert wird. Die Zielfunktion dieser linearen Optimierungsaufgabe lautet also:

$$(10) \quad G = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n - F$$

Im Falle der Umsatzmaximierung bei Erzielung eines Mindestgewinnes in Höhe von G_0 würde man sagen:

Maximiere

$$U = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n,$$

wobei zusätzlich die Nebenbedingung

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \geq G_0 + F$$

gelte.

Grafische Darstellung der Optimierung

Für ein Lösungsbeispiel legen wir folgende Zahlen (gemessen in Geldeinheiten: GE) zugrunde:

$$p_1 = 800, k_1 = 710, p_2 = 600, k_2 = 440, F = 24\,000$$

Die Zielfunktion lautet hier:

$$G = (800 - 710)x_1 + (600 - 440)x_2 - 24\,000 \\ = 90x_1 + 160x_2 - 24\,000$$

Diese Funktion muß maximiert werden.

Es ist natürlich nicht möglich, für jedes Programm, auch nicht für jedes zulässige Programm, den entsprechenden Gewinnwert in eine Skizze aufzunehmen. Übersichtlich werden die Zusammenhänge dann, wenn jeweils solche Programme zusammengefaßt werden, die auf den gleichen Gewinnwert \bar{G} führen. In diesem Falle muß gelten

$$\bar{G} = d_1x_1 + d_2x_2 - F \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{\bar{G} + F}{d_2} - \frac{d_1}{d_2}x_1$$

Für den Gewinnwert $\bar{G} = 8000$ ergibt sich in unserem Beispiel

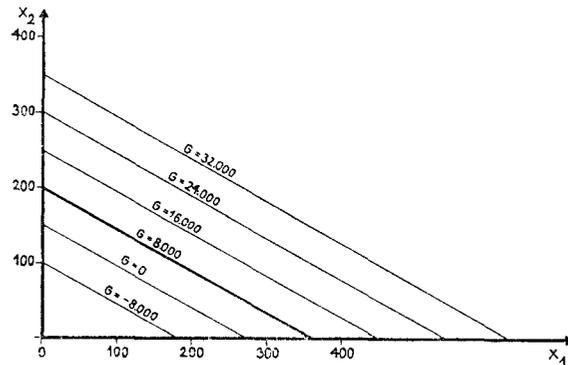
$$x_2 = 200 - \frac{9}{16}x_1$$

Man sieht, daß alle solche gewinnreichen Programme auf Geraden (sog. Isogewinnlinien) liegen, deren Steigung unabhängig von \bar{G} immer den Wert $-\frac{d_1}{d_2}$ (im Beispiel $-\frac{9}{16}$) haben und die somit parallel verlaufen.

In Abb. 9 sind mehrere derartige Isogewinnlinien eingetragen.

Abbildung 9

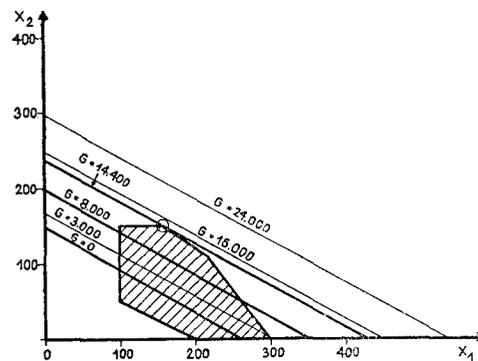
Isogewinnlinien



Die Abb. 9 zeigt, daß die Gewinnwerte um so höher liegen, je weiter die Geraden nach rechts verschoben sind. Gäbe es keine Restriktionen, so ließe sich daher ein beliebig großer Gewinn erzielen. Tatsächlich aber sind nur die gezeichneten Gewinnlinien noch relevant, die mit dem ZB (vgl. Abb. 7) Punkte gemeinsam haben.

Abbildung 10

Gewinnmaximales Programm



In Abb. 10 sind die Gewinngeraden und der ZB eingetragen. Die Gewinngerade für $G = 24\,000$ GE enthält kein zulässiges Programm mehr. Für $G = 8000$ GE hingegen gibt es eine ganze gemeinsame Strecke. Offensichtlich wird der maximale Gewinn durch die Gerade repräsentiert, die soweit wie möglich nach rechts verschoben ist und mindestens noch einen Punkt mit dem zulässigen Bereich gemeinsam hat. In unserem Beispiel ist es die Gerade, die den Gewinnwert 14 400 anzeigt. Alle links von ihr liegenden Geraden weisen

kleinere Gewinne aus, alle rechts von ihr liegenden keine zulässigen Punkte.

Das Eckenprinzip

Das optimale Programm wird durch $x_1 = 160$, $x_2 = 150$ gegeben. Dieser Punkt ist eine Ecke. Das ist kein Zufall, sondern folgt aus der Gestalt des zulässigen Bereichs. Selbst dann, wenn mehrere (gewinngleiche) Optima existieren, so gibt es immer auch eines in einem Eckpunkt. Tatsächlich bauen fast alle mathematischen Lösungsverfahren auf diesem sog. Eckenprinzip auf. Diese Verfahren finden das Optimum dadurch, daß sie, beginnend bei einer zulässigen Ecke, so lange von einem Eckpunkt zu einem anderen mit höherem Gewinnwert fortschreiten, bis eine Verbesserung nicht mehr möglich ist.

Immer wenn es ein Optimum gibt, muß dieses Optimum auch in einem Eckpunkt liegen. Für den Fall von mehr als 2 Variablen muß ein Eckpunkt natürlich neu definiert werden. Hier stellt sich dann nämlich das Problem des Übergangs zu der mehrdimensionalen Darstellung. Das Eckenprinzip hat ein wichtiges Resultat:

Bei einem optimalen Programm können nur gerade so viele Variablen von Null verschieden (d. h. positiv) sein, wie es Nebenbedingungen voll ausgeschöpft (d. h. die dort angesetzte Höchst- bzw. Mindestmenge erreicht).

Eine Optimierungsaufgabe mit 5000 Variablen und 2000 Nebenbedingungen wird also im Optimum höchstens 2000 Variable haben. In diesem Optimum werden im allgemeinen auch nicht alle Nebenbedingungen mit dem Gleichheitszeichen erfüllt sein, d. h. es werden Absatzchancen z. T. nicht voll ausgenutzt oder freie Kapazitäten vorhanden sein. Solche Nebenbedingungen heißen

nicht-bindend, sie haben auf das Optimum keinen Einfluß. Im Beispiel haben alle Nebenbedingungen bis auf die Absatzgrenze für Produkt 2 und die Rohstoffbedingung diesen Charakter.

Ausweitungsmöglichkeiten

Eine lineare Optimierungsaufgabe läßt eine weitreichende Analyse zu. So werden im allgemeinen für jede Nebenbedingung Grenzgewinne (sog. Dualwerte) berechnet. Sie geben den Gewinn an, der durch eine zusätzliche Kapazitäts-, Absatz- oder Rohstoffeinheit erwirtschaftet werden könnte. Diese Zahlen weisen auf Investitionsmöglichkeiten hin. Bei nicht-bindenden Restriktionen betragen diese Zahlen selbstverständlich Null, da diese Bedingungen das Optimum nicht bestimmen. Im dargestellten Fall würde jede zusätzliche Absatzmöglichkeit für Gut 2 einen Mehrgewinn in Höhe von 16 GE, jede zusätzliche Rohstoffeinheit einen Mehrgewinn in Höhe von 18 GE erbringen.

Durch eine sog. Sensitivitätsanalyse wird oft der Spielraum bestimmt, in dem sich Daten bewegen dürfen, ohne daß das optimale Programm geändert werden muß. Hierdurch kann bei unsicheren Daten eine Strategie gefunden werden, die diesem Umstand Rechnung trägt.

Schließlich noch eine Bemerkung über die Größe behandelbarer Probleme: Diese ist stark von der jeweils benutzten Rechenanlage abhängig. Bezeichnet n die Anzahl der Variablen und m die der Nebenbedingungen, so sollte eine mittlere Anlage etwa $m \leq 500$, $n \leq 500$ bewältigen. Großrechner sollten $n \leq 2500$, $m \leq 2500$ schaffen. Der Datenanfall für große Probleme beträgt oft weniger als ein Prozent des Produktes $n \cdot m$. Er ist natürlich – wie auch die Rechenzeiten – stark problemabhängig.

HERAUSGEBER: Hamburgisches Welt - Wirtschafts - Archiv,
Direktor: Prof. Dr. Heinz-Dietrich Ortlieb

REDAKTION:

Chefredakteur: Dr. Dietrich Kebschull

Stellvertreter: Dipl.-Volksw. Wolfgang Reisener

Redakteur: Dipl.-Volksw. Hubert Höping, Redaktionsassistenten:
Dipl.-Volksw. Otto Gustav Mayer, Dipl.-Volksw. Carsten Moser,
Dipl.-Kfm. Hans-Gunter Schoop

Redaktionelle Herstellung: Helga Lange, Regina Kebschull

Anschrift der Redaktion: 2 Hamburg 20, Eppendorfer Landstraße 106, Tel.: (0411) 47 11 74 05/06

HERSTELLUNG UND VERTRIEB:

Verlag Weltarchiv GmbH, Hamburg

Anzeigen: Generalvertretung Dr. Hans Klemen

Anzeigenpreisliste: Nr. 11 vom 1. 1. 1968

Bezugspreise: Einzelheft: DM 4,20; Jahresabonnement: DM 48,-
(Studenten: DM 24,-)

Erscheinungsweise: monatlich

Druck: Otto Schwitzke, Hamburg

Anschrift des Verlages: 2 Hamburg 20, Eppendorfer Landstraße 106, Tel.: (0411) 46 10 19 und 46 10 10

Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, die Zeitschrift oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) oder auf andere Art zu vervielfältigen. Copyright by Verlag Weltarchiv GmbH.