

Konrad, Kai A.

Research Report — Digitized Version

Ein Effizienzkriterium alternativer Rentenversicherungsverfahren in steady-state- Wachstumsökonomien

Münchener Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge, No. 87-02

Provided in Cooperation with:

WZB Berlin Social Science Center

Suggested Citation: Konrad, Kai A. (1987) : Ein Effizienzkriterium alternativer Rentenversicherungsverfahren in steady-state-Wachstumsökonomien, Münchener Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge, No. 87-02, Volkswirtschaftliche Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität, München

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/122935>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



WZB-Open Access Digitalisate

WZB-Open Access digital copies

Das nachfolgende Dokument wurde zum Zweck der kostenfreien Onlinebereitstellung digitalisiert am Wissenschaftszentrum Berlin für Sozialforschung gGmbH (WZB).

Das WZB verfügt über die entsprechenden Nutzungsrechte. Sollten Sie sich durch die Onlineveröffentlichung des Dokuments wider Erwarten dennoch in Ihren Rechten verletzt sehen, kontaktieren Sie bitte das WZB postalisch oder per E-Mail:

Wissenschaftszentrum Berlin für Sozialforschung gGmbH

Bibliothek und wissenschaftliche Information

Reichpietschufer 50

D-10785 Berlin

E-Mail: bibliothek@wzb.eu

The following document was digitized at the Berlin Social Science Center (WZB) in order to make it publicly available online.

The WZB has the corresponding rights of use. If, against all possibility, you consider your rights to be violated by the online publication of this document, please contact the WZB by sending a letter or an e-mail to:

Berlin Social Science Center (WZB)

Library and Scientific Information

Reichpietschufer 50

D-10785 Berlin

e-mail: bibliothek@wzb.eu

Digitalisierung und Bereitstellung dieser Publikation erfolgten im Rahmen des Retrodigitalisierungsprojektes **OA 1000+**. Weitere Informationen zum Projekt und eine Liste der ca. 1 500 digitalisierten Texte sind unter <http://www.wzb.eu/de/bibliothek/serviceangebote/open-access/oa-1000> verfügbar.

This text was digitizing and published online as part of the digitizing-project **OA 1000+**.

More about the project as well as a list of all the digitized documents (ca. 1 500) can be found at <http://www.wzb.eu/en/library/services/open-access/oa-1000>.

MÜNCHENER WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHE BEITRÄGE

Nr. 87-02

Ein Effizienzkriterium alternativer
Rentenversicherungsverfahren in
Steady-State-Wachstumsökonomien

Kai A. Konrad

Mai 1987

DISCUSSION PAPERS



HERAUSGEGEBEN VON DER
VOLKSWIRTSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

EIN EFFIZIENZKRITERIUM ALTERNATIVER RENTENFINANZIERUNGSVERFAHREN
IN STEADY-STATE-WACHSTUMSÖKONOMIEN

von

Kai A. Konrad

Mai 1987

Anschrift des Autors: Kai A. Konrad
Volkswirtschaftliches Institut
der Universität München
Ludwigstr. 33/III
8000 München 22

Die MÜNCHNER WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHEN BEITRÄGE werden von der Volkswirtschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität München herausgegeben. Die inhaltliche Verantwortung für die Beiträge liegt bei den Autoren und nicht bei der Fakultät.

Volkswirtschaftliche Fakultät
Ludwig-Maximilians-Universität München
Ludwigstraße 28
D - 8000 München 22

1. Einleitung

Die Bevölkerungsentwicklung in der BR-Deutschland ist gekennzeichnet durch geburtenstarke Jahrgänge von 1956 bis 1968 und einen starken Geburtenrückgang in den folgenden zwei Jahrzehnten. Diese Situation gibt Anlaß, über die Finanzierung der Altersrenten nachzudenken¹. In zahlreichen Beiträgen aus jüngster Zeit wird die Frage der Realisierbarkeit eines Anwartschaftsdeckungsverfahrens² zur Rentenfinanzierung behandelt. Mit der Frage der Finanzierbarkeit angesichts der demographischen Irregularitäten beschäftigen sich z. B. MEINOLD (1986), SCHMÄHL (1986) und SCHMÄING (1984). NEUMANN (1984) zeigt für ein Wachstumsmodell mit konstanter Bevölkerungszahl, daß aus einer Kapitaldeakkumulation, deren jährliche Rate jedenfalls geringer ist als die Abschreibungsrate, die Altersrenten finanzierbar sind. Ein Anwartschaftsdeckungsverfahren scheint zumindest im Rahmen eines intertemporalen friktionslosen Gleichgewichtsmodells problemlos realisierbar zu sein. Die Praktikabilität des Verfahrens, vor allem im Hinblick auf Anpassungsstörungen bei der Umstellung eines Umlageverfahrens³ auf ein Anwartschaftsdeckungsverfahren wird recht kontrovers diskutiert (vgl. SVG 1983/84).

¹Für den Hinweis auf die Fragestellung und kritische Anregungen danke ich meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. H.-W. Sinn, für kritische Diskussionsbeiträge und wertvolle Hinweise Herrn Dipl. VW. H. Kotsch. Für verbleibende Fehler trägt der Autor die alleinige Verantwortung.

²Man versteht darunter ein Rentenfinanzierungssystem, in dem jede Generation eine geschlossene Versicherungsgemeinschaft bildet, in der Erwerbsphase Ersparnisse bildet und aus dem Abbau dieser Ersparnisse ihre Rente finanziert (vgl. THULLEN 1982).

³Man versteht darunter ein Rentenfinanzierungssystem, in dem die Generationen in einer offenen Risikogemeinschaft miteinander leben. Jede junge Generation zahlt aus ihrem Einkommen der alten Generation die Rente. Es wird in der Rentenkasse keine Rücklage gebildet, sondern die Beiträge werden im gleichen Zeitpunkt ihrer Erhebung zu Rentenzahlungen verwendet (vgl. THULLEN 1982).

Wir werden im folgenden von der Möglichkeit ausgehen, daß solche Anpassungsschwierigkeiten überwunden werden können. In der Modellwelt eines Steady-State-Wachstums mit "continuous-overlapping-generations" leiten wir ein wohlfahrtstheoretisches Kriterium ab, das Aufschluß darüber gibt, welches der beiden Finanzierungsverfahren im Steady-State ökonomisch effizient ist.

Das Kriterium ist sehr einfach. Es müssen nur drei makroökonomische Größen verglichen werden: Die Wachstumsrate des realen Arbeitseinkommens, Bevölkerungswachstumsrate und Realzins. In Steady-State-Ökonomien ist ein Umlageverfahren genau dann effizient gegenüber einem Anwartschaftsdeckungsverfahren, wenn die Summe dieser Wachstumsraten mindestens so groß ist wie der Realzins. Dieses Ergebnis ist für einfache zeitdiskrete Overlapping-Generations-Modelle mit zwei oder drei gleichzeitig lebenden Generationen abgeleitet worden (vgl. z.B. BÖSCH 1985). Wir zeigen, daß das Ergebnis in einem Modell unendlich vieler gleichzeitig lebender und stetig alternder Generationen in seiner einfachen Form unverändert gültig bleibt.

2. Das Modell

Wir betrachten ein einfaches neoklassisches, zeitkontinuierlich formuliertes Wachstumsmodell einer Ökonomie im Zeitintervall $[-t_2, T]$. Explizit treffen wir folgende Modellannahmen:

- A1 Alle Individuen leben t_2 Jahre. Sie arbeiten und zahlen Rentenbeiträge im Alter von 0 bis t_1 Jahren, in der sogenannten Erwerbs- oder Arbeitsphase. Anschließend bis zu ihrem sicheren Tode im Alter von t_2 Jahren, in der sogenannten Ruhe- oder Rentenphase, sind sie ohne Arbeitseinkommen.

- A2 In jedem $t \in [-t_2, T]$ ⁴ gibt es eine bestimmte strikt positive Anzahl N_t von Individuen.
- A3 Die Zahl der Geburten wächst über die Zeit mit der Rate n im gesamten Beobachtungszeitraum.
- A4 Es gibt einen perfekten Kapitalmarkt. Der Zins, zu dem jedes Individuum auf dem Kapitalmarkt in beliebiger Höhe kontrahieren kann, ist r . Die Höhe von r ist von der Wahl des Finanzierungsverfahrens einer Altersrente unabhängig.⁵
- A5 Es gibt arbeitssparenden technischen Fortschritt, der allen Individuen in der Arbeitsphase eine kontinuierliche Einkommenssteigerung mit konstanter Wachstumsrate g sichert. Sei Y_0 das Arbeitseinkommen jedes arbeitenden Individuums in $t = 0$ unabhängig von seinem jeweiligen Lebensalter. Dann gilt für jeden beliebigen historischen Zeitpunkt t , daß alle Individuen, die zu diesem Zeitpunkt in der Erwerbsphase sind, ein Einkommen von
- $$(2.1) \quad Y_t = Y_0 \cdot e^{gt}$$
- erzielen.

Wir gehen nun aus von einem Steady-State, in dem kein Rentensystem existiert. Jedes Individuum bezieht von Geburt an bis zum Alter von t_1 Jahren einen Arbeitseinkommensstrom in Höhe von Y_t .

⁴Wir benutzen t als Laufindex sowohl der historischen Zeit als auch des Alters eines Individuums. Beide hängen in naheliegender Weise zusammen: Ein im Zeitpunkt t^* geborenes Individuum ist im Zeitpunkt $t^* + t$ genau t Jahre alt.

⁵Diese Annahme ist beispielsweise für eine kleine offene Volkswirtschaft ohne Kapitalverkehrsbeschränkungen trivialerweise erfüllt.

anschließend bis zum Tode kein Einkommen. Diesen Zustand bezeichnen wir als Referrenz-Steady-State. Möchten die Individuen in dieser Ökonomie nun eine Rente nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren finanzieren, dann bedeutet das in dieser deterministischen Welt mit bekannter Lebensdauer, daß die Individuen in der Erwerbsphase einen Kapitalbestand akkumulieren, indem sie Teilbeträge des Einkommens investieren und in der Ruhephase im Alter von t_1 bis t_2 Jahren diesen Kapitalbestand liquidieren. Annahme 4 stellt nun sicher, daß eine Reallokation des Lebenseinkommens durch Kontrakte am Kapitalmarkt den Barwert des Lebenseinkommens, d.h. die Summe des mit r auf den Geburtszeitpunkt des Individuums abdiskontierten Lebenseinkommensstroms nicht verändern kann (vgl. zu einer ausführlichen Begründung NICKELL, 1978). Wollen wir nun die Vorteilhaftigkeit eines Umlageverfahrens gegenüber einem Anwartschaftsdeckungsverfahren für die Rentenfinanzierung im Steady-State vergleichen, so genügt es offenbar, die Barwertdifferenz zu untersuchen, die sich in einem Steady-State mit Umlageverfahren gegenüber dem Referrenz-Steady-State ergibt. Denn zum einen kann der Barwert des Lebenseinkommens durch ein beliebiges Anwartschaftsdeckungsverfahren nicht verändert werden. In einem Steady-State mit Umlageverfahren mit höherem Barwert des Lebenseinkommens als im Referrenz-Steady-State bietet sich andererseits die Möglichkeit beliebiger individueller Reallokation der Zahlungsströme über den Kapitalmarkt. Ein Steady-State mit höherem Barwert erlaubt es also den Individuen, den Lebenseinkommenstrom so zu wählen, daß jeder beliebige Auszahlungspfad eines Steady-States mit niedrigerem Barwert majorisiert wird.

Für einen alloktionstheoretischen Vergleich vereinfacht sich damit die Fragestellung: Ein Umlageverfahren ist gegenüber einem Anwartschaftsdeckungsverfahren im Steady-State dann zu empfehlen, wenn es

den Barwert des Stroms der Lebenseinkünfte aus Nettoarbeitseinkommen und Rente gegenüber dem Referrenz-Steady-State erhöht.

Welche Veränderungen der Zahlungsströme treten bei Existenz eines Umlageverfahrens gegenüber dem Referrenz-Steady-State auf? In der Erwerbsphase zahlt das repräsentative Individuum einen laufenden Umlagebeitrag in Höhe von $p_t Y_t$. p_t ist der Beitragssatz. In der Ruhephase erhält das Individuum eine Rente in Form eines Zahlungsstroms der Höhe $s Y_t$.⁶ Sofern ein Rentensystem nach dem Umlageverfahren besteht, ist s strikt positiv und kann exogen vom politischen Entscheidungsträger gewählt werden.

Das Umlageverfahren erfolgt so, daß zu jedem Zeitpunkt die Beitragssumme (= Zahl der Beitragszahler x Umlagebeitrag) gerade ausreicht, den Rentenstrom (= Zahl der Rentenempfänger x Rentenhöhe) zu finanzieren. Es existieren annahmegemäß in der Rentenkasse keine akkumulierten Kapitalbestände. Es muß also gelten:

$$(2.2) \quad (\alpha_t N_t) (p_t Y_t) = ((1-\alpha_t)N_t) (s Y_t) \quad \forall t \in [0, T],$$

bzw.

⁶In der Bundesrepublik Deutschland wird zur individuellen Rentenberechnung derzeit die Rentenformel $R_t = P \cdot B_t \cdot I \cdot St$ verwendet. (Vgl. INFOR 1986). P ist ein Maß dafür, wie sehr das Arbeitseinkommen des jeweiligen Rentenbeziehers in seiner Erwerbsphase über oder unter dem Durchschnittseinkommen der rentenversicherten Arbeitnehmer gelegen hat. Annahmegemäß sind in unserem Modell alle Individuen gleich und es gilt $P = \bar{P} = 1$. Die Bemessungsgrundlage B_t ist ein Maß für das durchschnittliche Arbeitseinkommen der rentenversicherten Arbeitnehmer und nach Annahme A5 in diesem Modell gleich Y_t . Das I in der Rentenformel steht für die Zahl der Beitragsjahre, also die Zeitdauer der Erwerbstätigkeit, t_1 , und St ist der Steigerungssatz, eine vom Gesetzgeber willkürlich zu bestimmende Größe, mit der der Umfang bestimmt wird, in dem eine Rentenversicherung nach dem Umlageverfahren erfolgen soll. In unserem Modell wird vom Gesetzgeber $s = I \cdot St$ exogen bestimmt, so daß durch unser Modell das bundesrepublikanische Modell $s = I \cdot St = 0.40 \cdot 1,5 = 0.6$ annähernd beschrieben werden kann.

$$(2.3) \quad p_t = \frac{1-\alpha_t}{\alpha_t} s \quad \forall t \in [0, T].$$

Dabei ist N_t die Gesamtbevölkerungszahl im Zeitpunkt. α_t ist der Anteil an der Gesamtbevölkerung, der sich in t gerade in der Erwerbsphase befindet, $1-\alpha_t$ also der Rentneranteil.

Wie wir im Anhang 1 zeigen, gewährleisten die Annahmen über die Bevölkerungsentwicklung, A1 bis A3, daß für alle t des Betrachtungszeitraums gilt:

$$(2.4) \quad \alpha_t = \alpha = \frac{1-e^{-nt_1}}{1-e^{-nt_2}} = \text{const.} \quad \forall t \in [0, T].$$

Wegen (2.4) folgt aus (2.3), daß p_t , der Beitragssatz, zeitinvariant ist:

$$(2.5) \quad p_t = p = \frac{1-\alpha}{\alpha} s = \text{const.} \quad \forall t \in [0, T].$$

Wir können die Barwertveränderung (BWV) zwischen einem Steady-State mit Umlageverfahren und dem Referrenz-Steady State angeben für ein beliebiges Individuum, das z.B. in t^* geboren wird:

$$(2.6) \quad \text{BWV} = \int_{t_1}^{t_2} s Y_{t^*+t} e^{-rt} dt - \int_0^{t_1} p Y_{t^*+t} e^{-rt} dt.$$

Der erste Summand steht für den Barwert des Rentenstroms, der dem Individuum im Alter von t_1 bis t_2 zufließt, der zweite Summand steht für den Barwert der Beitragsleistungen in der Erwerbsphase. Da das Individuum annahmegemäß in t^* geboren wurde, wird sein Einkommen Y_{t^*+t} zum jeweiligen Zeitpunkt t^*+t zur Barwertermittlung mit r auf den Zeitpunkt der Geburt,

t^* , abdiskontiert. Wegen A5 und (2.5) ist (2.6) äquivalent mit

$$(2.7) \quad BWV = \int_{t_1}^{t_2} s Y_0 e^{gt^*} e^{gt} e^{-rt} dt - \int_0^{t_1} \frac{1-\alpha}{\alpha} s Y_0 e^{gt^*} e^{gt} e^{-rt} dt$$

bzw.

$$(2.8) \quad BWV = s Y_0 e^{gt^*} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} e^{(g-r)t} dt - \int_0^{t_1} \frac{1-\alpha}{\alpha} e^{(g-r)t} dt \right\}.$$

Für eine wohlfahrtstheoretische Aussage hinsichtlich eines Steady-States mit Umlageverfahren gegenüber dem Referenz-Steady-State ist nur das Vorzeichen von BWV relevant. Das Umlageverfahren ist positiv zu beurteilen, wenn $BWV > 0$ gilt. Ein Blick auf (2.8) zeigt, daß auf das Vorzeichen von BWV weder die Höhe von $s > 0$, Y_0 noch der Geburtszeitpunkt t^* einen Einfluß haben. Als Determinanten kommen vielmehr nur g , r und α in Betracht. Wir werden nun folgenden Satz beweisen:

Satz: Unter den Annahmen A1 bis A5 gilt

$$BWV \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} 0 \Leftrightarrow n+g \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} r.$$

Wir haben dann für Steady-State-Ökonomien ein sehr einfaches allokatonspolitisches Kriterium zur Hand, um die Effizienz eines Umlageverfahrens zu prüfen: Ein Umlageverfahren zur Rentenfinanzierung ist nur dann gegenüber einem Anwartschaftsdeckungsverfahren effizient, wenn die Summe aus Bevölkerungswachstumsrate n und der Wachstumsrate g der Reallöhne

mindestens so groß ist wie der Zinssatz. Für $n+g = r$ verändert sich der Barwert gerade nicht⁷, deshalb sind beide Finanzierungsarten unter Wohlfahrtsgesichtspunkten im Steady-State äquivalent. Für $n+g < r$ ist das Umlageverfahren gegenüber dem Anwartschaftsdeckungsverfahren ineffizient.

Welche Parameterkonstellation in einer bestimmten Volkswirtschaft vorliegt, ist nicht einfach zu entscheiden. Eine Volkswirtschaft befindet sich im allgemeinen nicht in Steady-State-Zuständen, sondern bestenfalls auf einem Anpassungspfad zu einem Steady-State, auf dem sich r , n und g ändern. SINN (1985, Kapitel II) nennt mehrere Gründe, weshalb Anpassungspfade an Steady-States mit $n+g > r$ in Marktökonomien wenig plausibel sind. Einer der Gründe ist der folgende: Steady-States, in denen $n+g > r$ gilt, sind dynamisch ineffizient und stellen einen Zustand der Überkapitalisierung dar. Die bekannteren Formen intertemporalen Marktversagens, beispielsweise das Isolationsparadoxon oder unvollständig definierte Eigentumsrechte, führen tendenziell zu einer Unterkapitalisierung gegenüber dem entsprechenden Steady-State, der die "Goldene Nutzenregel" erfüllt.

Doch nun zum Beweis: Offenbar gelten folgende Äquivalenzen für $n \neq 0$, $(g-r) \neq 0$:

$$(2.9.a) \quad \text{BWV} \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0$$

\Leftrightarrow (wegen (2.8))

⁷Die formale Äquivalenz der Barwerte von Renten mit Anwartschaftsdeckungsverfahren und Umlageverfahren für den Spezialfall $n+g = r$ hat THULLEN (1983) gezeigt, ohne auf die wohlfahrtstheoretischen Implikationen einzugehen.

$$(2.9.b) \quad \int_{t_1}^{t_2} e^{(g-r)t} dt - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \int_0^{t_1} e^{(g-r)t} dt \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

\Leftrightarrow (Anhang, Gl. (I.4))

$$(2.9.c) \quad \frac{1}{g-r} \left\{ \left[e^{(g-r)t_2} - e^{(g-r)t_1} \right] - \frac{e^{-nt_2} - e^{-nt_1}}{e^{-nt_1} - 1} \left[e^{(g-r)t_1} - 1 \right] \right\} \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

\Leftrightarrow

$$(2.9.d) \quad \frac{1}{g-r} \left[e^{(g-r)t_1} - 1 \right] \left[\frac{e^{(g-r)t_2} - e^{(g-r)t_1}}{e^{(g-r)t_1} - 1} - \frac{e^{-nt_2} - e^{-nt_1}}{e^{-nt_1} - 1} \right] \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

Da die ersten beiden Faktoren von (2.9.d) stets gleiches Vorzeichen haben, ihr Produkt also positiv ist, läßt sich für (2.9.d) äquivalent schreiben

$$(2.9.e) \quad \left[\frac{e^{(g-r)t_2} - e^{(g-r)t_1}}{e^{(g-r)t_1} - 1} - \frac{e^{-nt_2} - e^{-nt_1}}{e^{-nt_1} - 1} \right] \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

In Anhang 2 zeigen wir, daß die Funktion $f(a)$ mit

$$f(a) = \frac{e^{at_2} - e^{at_1}}{e^{at_1} - 1}$$

für beliebiges $a \neq 0$ und $0 < t_1 < t_2 < T$ eine streng monoton wachsende Funktion in a ist. Damit läßt sich (2.9.e) äquivalent schreiben als

$$(2.9.f) \quad (g-r) + n \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

Und daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Der Fall $n = g-r = 0$ ist trivial.

Der Fall $n \neq 0, g-r = 0$ führt zu einer Barwertveränderung wie folgt:

$$\text{BWV } \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

\Leftrightarrow

$$\int_{t_1}^{t_2} dt - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \int_0^{t_1} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

\Leftrightarrow

$$(t_2 - t_1) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} t_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

\Leftrightarrow

$$\left[\left(\frac{t_2 - t_1}{t_1} \right) - \frac{e^{-nt_2} - e^{-nt_1}}{e^{-nt_1} - 1} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

in Analogie zu (2.9.e). Nun gilt für $f(a)$: $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = \frac{t_2 - t_1}{t_1}$, denn

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\int_{t_1}^{t_2} e^{at} dt}{\int_0^{t_1} e^{at} dt} = \frac{t_2 - t_1}{t_1}.$$

Mittels der im Anhang 2 gezeigten Monotonieeigenschaft für $f(a)$ folgt

$$f(a) \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} \frac{t_2 - t_1}{t_1} \Leftrightarrow a \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

und daraus die Behauptung.

Der Fall $n = 0, g-r \neq 0$ läßt sich analog zeigen.

Anhang 1

Wir zeigen, daß bei Gültigkeit der Annahmen A1 bis A3 α für $t \in [0, T]$ von der historischen Zeit unabhängig und gleich (2.4) ist. Sei $M(t^*)$ die Geburtenzahl in t^* . Dann ist $M(t^*) e^{-nt}$ nach A2 die Geburtenzahl in $t^* - t$. Es folgt, daß es in t^* genau $M(t^*) e^{-nt}$ Individuen im Alter von t Jahren gibt für $0 \leq t \leq t_2$.

Nach A2 gibt es in t^* eine bestimmte Gesamtbevölkerungszahl N_{t^*} . N_{t^*} muß offenbar gleich der Summe aller Bevölkerungszahlen aller Altersklassen sein, die in t^* leben:

$$(I.1) \quad N_{t^*} = \int_0^{t_2} M(t^*) e^{-nt} dt .$$

Nun können wir den Anteil α_{t^*} einfach bezeichnen: Es ist

$$(I.2) \quad \alpha_{t^*} = \frac{\int_0^{t_1} M(t^*) e^{-nt} dt}{\int_0^{t_2} M(t^*) e^{-nt} dt} .$$

also gleich dem Anteil derer, die im Zeitpunkt t^* im Alter von Null bis t_1 sind, an der Gesamtbevölkerung N_{t^*} ,

bzw.

$$(I.3) \quad \alpha_{t^*} = \frac{\frac{1}{n} \begin{bmatrix} -nt_1 & -1 \\ e^{-nt_1} & -1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{n} \begin{bmatrix} -nt_2 & -1 \\ e^{-nt_2} & -1 \end{bmatrix}} .$$

bzw.

$$(I.4) \quad \alpha_{t^*} = \alpha = \frac{e^{-nt_1} - 1}{e^{-nt_2} - 1} = \text{const.} \quad \forall t^* \in [0, T].$$

Anhang 2

Zu zeigen ist, daß $f(a) = \frac{e^{at_2} - e^{at_1}}{e^{at_1} - 1}$ streng monoton in a wächst für $a \neq 0$,

$0 < t_1 < t_2 < T$. Wir bilden

$$f'(a) = \frac{\left[t_2 e^{at_2} - t_1 e^{at_1} \right] \left[e^{at_1} - 1 \right] - t_1 e^{at_1} \left[e^{at_2} - e^{at_1} \right]}{\left[e^{at_1} - 1 \right]^2}$$

Zum Beweis der Behauptung muß $f'(a)$ strikt positiv sein. Der Nenner ist quadratisch und ungleich Null. Es bleibt zu zeigen:

$$\begin{aligned} & \left[t_2 e^{at_2} - t_1 e^{at_1} \right] \left[e^{at_1} - 1 \right] - t_1 e^{at_1} \left[e^{at_2} - e^{at_1} \right] > 0 \\ \Leftrightarrow & t_2 e^{at_2} e^{at_1} - t_1 e^{at_1} e^{at_1} - t_2 e^{at_2} + t_1 e^{at_1} - t_1 e^{at_1} e^{at_2} + t_1 e^{at_1} e^{at_1} > 0 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Berücksichtigung gleicher Summanden und für $t_2 = t_1 + \Delta t$:

$$\Delta t e^{at_1} e^{at_1} e^{a\Delta t} - t_2 e^{at_1} e^{a\Delta t} + t_1 e^{at_1} > 0$$

\Leftrightarrow Nach Kürzen und für $t_1 = \alpha t_2$, $\Delta t = (1-\alpha)t_2$

$$(1-\alpha)t_2 e^{at_2} - t_2 e^{a(1-\alpha)t_2} + \alpha t_2 e^0 > 0$$

\Leftrightarrow

$$\alpha e^0 + (1-\alpha)e^{at_2} - e^{a(1-\alpha)t_2} > 0$$

Diese Ungleichung gilt wegen der Konvexität der Exponentialfunktion, was die Behauptung beweist.

Literaturverzeichnis

- BÖSCH, M. (1985): Umverteilung, Effizienz und demographische Abhängigkeit von Rentenversicherungssystemen: Eine modelltheoretische Betrachtung mit ergänzenden Modellrechnungen, Dissertation: München.
- INFOR (1986): Die Rentenberechnung, Informationsreihe Rentenversicherung, Bayerische Landesversicherungsanstalt (Hrsg.), München.
- MEINOLD, M. (1986): "Probleme der mittel- und langfristigen Finanzierbarkeit der gesetzlichen Rentenversicherung", in: Wirtschaftler zur Strukturreform der Rentenversicherung, Gesellschaft für Versicherungswissenschaft und -Gestaltung (Hrsg.), Bd. 9, S. 5-17.
- NEUMANN, M. (1984): Vorbereiteter Diskussionsbeitrag, in: Demographische Entwicklung und kapitalbildende Altersversorgungssysteme, Gesellschaft für Versicherungswissenschaft und -Gestaltung (Hrsg.), Bd. 6, S. 19-27.
- NICKELL, S. J. (1978): The Investment Decisions of Firms, Nisbet: Welwyn.
- SCHMÄHL, W. (1986): "Strukturreform der Rentenversicherung - Konzept und Wirkungen - Versuch einer Zwischenbilanz", in: Wissenschaftler zur Strukturreform der Rentenversicherung, Gesellschaft für Versicherungswissenschaft und -Gestaltung, Bd. 9, S. 76-111.
- SCHMÄING, E. (1984): "Die kybernetisch-dynamische Rentenformel", in: Deutsche Rentenversicherung, S. 312-335.
- SINN, H.-W. (1985): Kapitaleinkommensbesteuerung, Mohr-Siebeck: Tübingen.
- SVG (1984): Ein Schritt voran, Jahresgutachten 1983/84, Sachverständigenrat zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung (Hrsg.) Kohlhammer: Stuttgart.
- THULLEN, P. (1983): "Gedanken zur deutschen Rentenversicherung", in: Deutsche Rentenversicherung, S. 401-419.