

Bobzin, Hagen

Working Paper

Behandlung von Totzeitsystemen in der Oekonomik

Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 80-99

Provided in Cooperation with:

Fakultät III: Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Universität
Siegen

Suggested Citation: Bobzin, Hagen (1999) : Behandlung von Totzeitsystemen in der Oekonomik, Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 80-99, Universität Siegen, Fakultät III, Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Siegen

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/118763>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

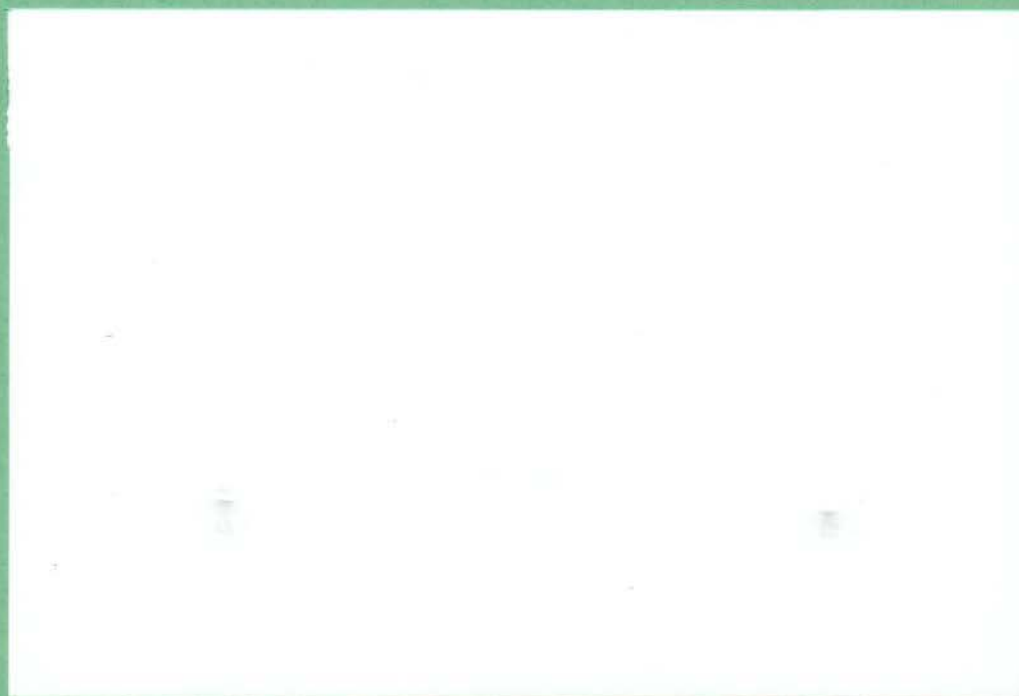
Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

**VOLKSWIRTSCHAFTLICHE
DISKUSSIONSBEITRÄGE**



**UNIVERSITÄT - GESAMTHOCHSCHULE - SIEGEN
FACHBEREICH WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN**

Behandlung von Totzeitsystemen in der Ökonomik

Hagen Bobzin

Department of Economics

University of Siegen

Siegen, Germany

Discussion Paper No. 80-99

ISSN 1433-058x

Zusammenfassung: In der Ökonomik lassen sich viele Beispiele anführen, in denen zwischen der Durchführung einer Maßnahme und ihrer Wirkung auf eine Zielvariable eine bestimmte Zeit verstreicht. Diese Totzeit bringt erhebliche analytische Schwierigkeiten mit sich, zu deren Überwindung das Instrument der LAPLACE-Transformation eingesetzt wird. Ähnlich der Transformation $y = \ln x$ enthält auch die LAPLACE-Transformation Vorteile, die sich mit entsprechendem Nutzen bei der Lösung von Differentialgleichungen und anderer Funktionalbeziehungen einsetzen lassen.

Schlüsselbegriffe: Totzeitsysteme, LAPLACE-Transformation, Differenzendifferentialgleichungen

JEL classification: C63, O40

e-mail: bobzin@vwl.wiwi.uni-siegen.de

1 Behandlung von Totzeitsystemen in der Ökonomik

1.1 Die LAPLACE-Transformation als Instrument zur Lösung von Totzeitsystemen

Um die Wirkungsweise der LAPLACE-Transformation zu beschreiben, wird zunächst ein Beispiel aus der Ökonomik für ein Totzeitsystem vorgestellt, das sich mit üblichen Verfahren analytisch nicht lösen läßt. Als Ansatzpunkt dient ein Kapitalstock, der durch Investitionen und Verschleiß fortgeschrieben wird. Dieser Zusammenhang konstituiert eine Differentialgleichung, die von der Annahme überlagert wird, daß zwischen dem Zeitpunkt der Investition und der Einsatzbereitschaft der Investitionsgüter ein bestimmter konstanter Zeitraum verstreicht. Damit resultiert eine Differenzendifferentialgleichung, wie sie etwa in Gandolfo (1997, Chapter 27) angesprochen werden.

Die Lösung der resultierenden Differenzendifferentialgleichung mit Hilfe der LAPLACE-Transformation verwendet fast alle Grundregeln der LAPLACE-Transformation, die im Anhang I zusammengestellt sind. Insbesondere eine Variante des ersten Beispiels demonstriert die Leistungsfähigkeit der LAPLACE-Transformation. Einschränkend ist zu beachten, daß ohne die Annahme einer *konstanten* Totzeit, nur der Weg einer numerischen Lösung wie zum Beispiel in Boucekkine, Licandro, Paul (1997) beschritten werden kann.

1.2 Ein ausgewähltes Totzeitsystem aus der Ökonomik

Das untersuchte Beispiel geht von der Annahme aus, daß zwischen der Anschaffung von Investitionsgütern I_0^b zum Zeitpunkt t und der Einsatzbereitschaft dieser Investitionsgüter ein bestimmter Zeitraum vergeht. Für Nettoinvestitionen $I_1^n(t)$ beträgt diese Totzeit T_1 , d.h.

$$(1.1) \quad I_1^n(t) = I_0^n(t - T_1).$$

Für die Ersatzinvestitionen $I_1^r(t)$ kann eine andere, kürzere Totzeit $T_2 \leq T_1$ unterstellt werden,

$$(1.2) \quad I_1^r(t) = I_0^r(t - T_2).$$

Im zweiten Schritt wird der Einfluß der Investitionen auf den Kapitalstock beschrieben. Die Änderung des Kapitalstocks, der in der Produktion im Zeitpunkt t zur Verfügung steht, ist gegeben durch den Zustrom an Kapital $I_1^b(t)$ abzüglich der verschlissenen Kapitaleinheiten $D(t)$,

$$\dot{K} = I_1^b - D.$$

Dabei setzen sich die Bruttoinvestitionen $I_1^b(t)$ aus den Nettoinvestitionen $I_1^n(t)$ und den Ersatzinvestitionen $I_1^r(t)$ zusammen, $I_1^b = I_1^n + I_1^r$. Außerdem ist der Kapitalverschleiß $D(t)$ proportional zum aktuellen Kapitalstock K , $D = \delta K$, wobei die konstante Abschreibungsrate mit δ bezeichnet wird, um sie von der später eingeführten Diracschen δ -Funktion zu unterscheiden. Zusammenfassend erhält man,

$$(1.3) \quad \dot{K} = I_1^n + I_1^r - \delta K.$$

Als letztes Glied fehlt die Beschreibung des Investitionsverhaltens. Dabei ist zwischen dem aktuellen, in der Produktion einsetzbaren Kapitalstock $K(t)$ und dem optimalen Kapitalstock $\hat{K}(t)$ zu unterscheiden. Man beachte, daß an dieser Stelle auf die Ermittlung des Zeitpfades für den

optimalen Kapitalstock verzichtet wird. Statt dessen werden im Abschnitt 2.2 verschiedene Pfade für den optimalen Kapitalstock vorgegeben. Für das Investitionsverhalten wird unterstellt, daß die Investitionen $I_0^n(t)$ einen konstanten Anteil der Differenz $\hat{K}(t) - K(t)$ ausmachen,¹

$$(1.4) \quad I_0^n(t) = \beta(\hat{K}(t) - K(t)).$$

Nun lassen sich die Gleichungen (1.3), (1.1), (1.2) und (1.4) unter der Voraussetzung $t \geq T_1$ umschreiben zu

$$\dot{K}(t) = \beta(\hat{K}(t - T_1) - K(t - T_1)) + I_0^n(t - T_2) - \delta K(t).$$

Unterstellt man $T_2 = 0$, dann wird in der Regel außerdem angenommen, daß die Abschreibungen mit den Ersatzinvestitionen übereinstimmen, $\delta K(t) = I_0^n(t)$. Diese Annahme läßt sich auf das Totzeitsystem übertragen, indem man beispielsweise

$$(1.5) \quad I_1^n(t) = I_0^n(t - T_2) = \delta K(t - T_2)$$

unterstellt. Allerdings mündet die Annahme, daß die Ersatzinvestitionen in dem Zeitpunkt getätigt werden, in dem die entsprechenden Kapitaleinheiten verschlissen sind, selbst für $T_1 = T_2 = T$ in einer funktionalen Beziehung, die schwieriger zu behandelnden ist. Aus diesem Grund wird unterstellt, daß der zukünftige Kapitalverschleiß perfekt vorhersehbar ist. Bei entsprechender Verwegnahme der Ersatzinvestitionen,

$$(1.6) \quad I_1^n(t) = I_0^n(t - T_2) = \delta K(t)$$

ergibt sich unter Vernachlässigung des Subskripts folgende Beziehung für alle $t > T$:

$$\dot{K}(t) + \beta K(t - T) = \beta \hat{K}(t - T)$$

Sofern das System keine Vorgeschichte besitzt,² also $\hat{K}(t) = K(t)$ für alle $t \leq 0$ gilt, darf von $I_0^n(t) = 0$ und $\dot{K}(t) = 0$ für alle $t \leq 0$ ausgegangen werden. Also gilt auch in der Startphase mit $0 \leq t < T$

$$\dot{K}(t) = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen werden nun unter Verwendung der *Heaviside-Funktion*

$$H(t - T) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ 1 & \text{für } t \geq T. \end{cases}$$

zusammengefaßt, wobei die resultierende *Differenzendifferentialgleichung*³

$$(1.7) \quad \boxed{\dot{K}(t) + \beta K(t - T)H(t - T) = \beta \hat{K}(t - T)H(t - T)}$$

zu lösen ist. Die Lösung dieser Gleichung beschreibt den Zeitpfad des Kapitalstocks K für das behandelte *Totzeitsystem*. Man beachte, daß niemals mit derartigen Differenzendifferentialgleichungen selbst gearbeitet wird, sondern stets mit der entsprechenden transformierten Gleichung im Bildbereich, die nun abgeleitet wird.

¹ Eine alternative Investitionsfunktion wird im Abschnitt 2.3 untersucht.

Die Antwort $I_0^n(t)$ des Systems auf Abweichungen des aktuellen Kapitalstocks vom optimalen Kapitalstock ist unabhängig vom Zeitpunkt t . Damit liegt ein *zeitinvariantes* System vor. Falls die Antwort vom jeweiligen Zeitpunkt abhängt – wie etwa im unplausiblen Fall $I_0^n(t) = \beta(t)(\hat{K}(t) - K(t))$ –, so spricht man von einem *zeitvarianten* System.

² An dieser Stelle wird deutlich, warum die Annahme (1.5) zu größeren Schwierigkeiten als (1.6) führt. Sofern auch die Ersatzinvestitionen einer Totzeit unterliegen, kann sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht in Ruhe befinden. Der zusätzliche Effekt wird in Fußnote 6 angegeben.

³ Zu Differenzendifferentialgleichung der Differentialordnung n und der Differenzenordnung $m - 1$ siehe Bellman, Roth (1984, S. 55).

2 Ermittlung der Lösung mit Hilfe der LAPLACE-Transformation

2.1 Lösung des vorgestellten Totzeitsystems

Um das Vorgehen der LAPLACE-Transformation zu demonstrieren, wird an dieser Stelle nicht unmittelbar die Differenzendifferentialgleichung (1.7) transformiert. Statt dessen erfolgt eine Transformation der Gleichungen (1.1), (1.3) und (1.4).

Zunächst ist zu berücksichtigen, daß das vorgestellte Totzeitsystem keine Vorgeschichte besitzt, d.h. $I_1^n(t) = I_0^n(t - T)H(t - T)$. Bezeichnet man die im Anhang I beschriebene LAPLACE-Transformation⁴ mit $I_1^n(t) \circ \bullet J_1^n(s)$ und $I_0^n(t) \circ \bullet J_0^n(s)$, dann folgt aus (1.1) gemäß (A.12)

$$(2.1) \quad J_1^n(s) = e^{-Ts} J_0^n(s).$$

Da die Ersatzinvestitionen entfallen, ergibt sich aus der LAPLACE-Transformation $K(t) \circ \bullet \mathcal{K}(s)$ von (1.3) unter Beachtung der Linearitätsregel (A.3) sowie der Differentiationsregel (A.6a)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} s\mathcal{K}(s) - K(0) &= J_1^n(s) \\ \iff \mathcal{K}(s) &= \frac{1}{s} J_1^n(s) + \frac{1}{s} K(0). \end{aligned}$$

Schließlich ist (1.4) entsprechend der Linearitätsregel (A.3) zu transformieren,

$$(2.3) \quad J_0^n(s) = \beta(\hat{\mathcal{K}}(s) - \mathcal{K}(s)).$$

Nun ist man in der Lage, aus den Gleichungen (2.2), (2.1) und (2.3) eine einzige Gleichung herzuleiten, die die interessierende Größe $\mathcal{K}$ in Abhängigkeit von dem vorgegebenen Sollverlauf $\hat{\mathcal{K}}$ beschreibt. Man erhält entsprechend der Abbildung 1⁵

$$(2.4) \quad \mathcal{K}(s) = \frac{1}{s} e^{-Ts} \beta(\hat{\mathcal{K}}(s) - \mathcal{K}(s)) + \frac{1}{s} K(0)$$

oder äquivalent mit $\mathcal{R}(s) := \beta/s$

$$(2.5) \quad \mathcal{K}(s) = \frac{\mathcal{R}(s)e^{-Ts}}{1 + \mathcal{R}(s)e^{-Ts}} \hat{\mathcal{K}}(s) + \frac{1/s}{1 + \mathcal{R}(s)e^{-Ts}} K(0).$$

Bevor auf diese Gleichung⁶ eingegangen wird, kann (2.4) aus dem Bildbereich rücktransformiert werden. Aus diesem Grund wird (2.4) mit s multipliziert, so daß

$$(2.6) \quad s\mathcal{K}(s) - K(0) + \beta e^{-Ts} \mathcal{K}(s) = \beta e^{-Ts} \hat{\mathcal{K}}(s).$$

⁴ In der Mathematik wird die LAPLACE-Transformation durch den Übergang von kleinen auf große Symbole charakterisiert, d.h. $F = \mathcal{L}\{f\}$ bzw. $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$. Dagegen drückt man in der Elektrotechnik die Beziehung zwischen der Originalfunktion f und der Bildfunktion F durch eines der Symbole $f(t) \circ \bullet F(s)$ oder $F(s) \bullet \circ f(t)$ aus, wobei der gefüllte Kreis immer bei der Bildfunktion steht. Da sich die Unterscheidung zwischen großen und kleinen Buchstaben in der Ökonomik als hinderlich erweist, wird ersatzweise auf einfache und kalligraphische Symbole zurückgegriffen, $J = \mathcal{L}\{I\}$ bzw. $I = \mathcal{L}^{-1}\{J\}$ oder auch $I(t) \circ \bullet J(s)$ bzw. $J(s) \bullet \circ I(t)$.

⁵ Für eine bessere Veranschaulichung wähle $(\hat{\mathcal{K}}(s) - \mathcal{K}(s)) = (\hat{\mathcal{K}}(s) - K(0)/s - \mathcal{K}(s) + K(0)/s)$. Zu den Grundschriftarten und der Umformung von Blockschriftbildern siehe Rosenberg, Karnopp (1983, S. 144 ff.)

⁶ Gilt $\hat{K}(t) = K(t)$ für alle $t \leq 0$, dann lautet die zur Annahme (1.5) gehörende LAPLACE-Transformierte

$$s\mathcal{K}(s) - K(0) = \beta e^{-Ts} [\hat{\mathcal{K}}(s) - \mathcal{K}(s)] + \beta e^{-Ts} [\mathcal{K}(s) + \int_{-T}^0 \hat{K}(\tau) e^{-s\tau} d\tau] - \beta \mathcal{K}(s).$$

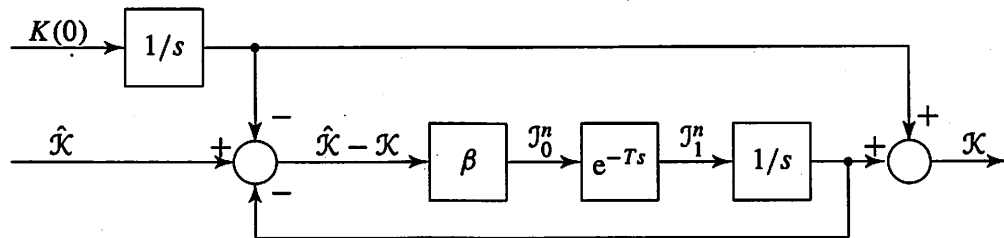


Abb. 1: Strukturbild des Totzeitsystems gemäß (2.4). Das Strukturbild für das behandelte System mit der Totzeit T veranschaulicht insbesondere die enthaltene Rückkopplung und führt unmittelbar zu (2.5).

Die inverse LAPLACE-Transformation dieser Gleichung liefert unter Berücksichtigung der Differentiationsregel (A.6a) $\mathcal{L}^{-1}\{s\mathcal{K}(s) - K(0)\} = \dot{K}$ sowie des Verschiebungssatzes (A.12)⁷ die in (1.7) festgehaltene Differenzendifferentialgleichung.

Die Lösung von (1.7) wird nun anhand der inversen LAPLACE-Transformation von (2.5) ermittelt. Dabei erfolgt die inverse LAPLACE-Transformation von (2.5) hier nicht durch eine Partialbruchzerlegung⁸, sondern durch Reihenentwicklung des Ausdrucks $1/(1 + \mathcal{R}(s)e^{-Ts})$. Setzt man $q := -\mathcal{R}(s)e^{-Ts}$, dann beschreibt $1/(1 + \mathcal{R}(s)e^{-Ts})$ die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe (sofern $|q| < 1$)⁹,

$$1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - (-1)^n \mathcal{R}(s) e^{-nTs}}{1 + \mathcal{R}(s) e^{-Ts}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{|q| < 1} \frac{1}{1 + \mathcal{R}(s) e^{-Ts}}.$$

Damit läßt sich (2.5) umschreiben in

$$(2.7) \quad \mathcal{K}(s) = \mathcal{R}(s) e^{-Ts} \hat{\mathcal{K}}(s) [1 - \mathcal{R}(s) e^{-Ts} + \mathcal{R}^2(s) e^{-2Ts} - + \dots] \\ + K(0)/s [1 - \mathcal{R}(s) e^{-Ts} + \mathcal{R}^2(s) e^{-2Ts} - + \dots]$$

oder äquivalent

$$(2.8) \quad [\mathcal{K}(s) - K(0)/s] = [\mathcal{R}(s) e^{-Ts} - \mathcal{R}^2(s) e^{-2Ts} + - \dots] [\hat{\mathcal{K}}(s) - K(0)/s].$$

Demnach ist die eindeutige Beziehung zwischen der Eingangsgröße $\mathcal{E}(s) := [\hat{\mathcal{K}}(s) - K(0)/s]$ und der Ausgangsgröße $\mathcal{A}(s) := [\mathcal{K}(s) - K(0)/s]$ im Bildbereich gegeben durch die überaus einfache Gleichung¹⁰

$$(2.9) \quad \mathcal{A}(s) = \mathcal{G}(s) \mathcal{E}(s)$$

mit der Übertragungsfunktion $\mathcal{G}(s) := [\mathcal{R}(s) e^{-Ts} - \mathcal{R}^2(s) e^{-2Ts} + - \dots]$, vgl. die Abbildung 2.¹¹ Die Rücktransformation in den Zeitbereich entsprechend der Faltungsregel (A.7) liefert mit $\mathcal{E}(s) \bullet \circ E(t) = \hat{K}(t) - K(0)$ und $\mathcal{A}(s) \bullet \circ A(t) = K(t) - K(0)$ die Beziehung

$$(2.10) \quad A(t) = G(t) * E(t) = \int_0^t G(t - \tau) E(\tau) d\tau = \int_0^t G(\tau) E(t - \tau) d\tau,$$

⁷ Besitzt das System keine Vorgeschichte, d.h. $f(t) = \hat{K}(t) - K(t) = f(t)H(t)$ oder äquivalent $f(t) = 0$ für alle $t < 0$, dann erfüllt die um a nach rechts verschobene Funktion f die Bedingung $f(t-a) = f(t-a)H(t-a)$, so daß sich der Verschiebungssatz (A.12) anwenden läßt, $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)H(t-a)$.

⁸ Vgl. Anhang II.

⁹ Für genügend großes s gilt $|q| = |\mathcal{R}(s)e^{-Ts}| = |\beta/s| \cdot |e^{-Ts}| < 1$.

¹⁰ Wie Föllinger (1990, S. 110) anmerkt, ist dieser Zusammenhang im Bildbereich immer gegeben, unabhängig davon, wie verschiedenartig und kompliziert die Funktionalbeziehungen im Zeitbereich sind.

¹¹ Zu den verwendeten Begriffen vgl. Föllinger (1994, S. 2 ff.).

wobei $G(t)$ die *Gewichtsfunktion* bezeichnet, die sich aus $\mathcal{G}(s) \bullet \circ G(t)$ ergibt. Man beachte, daß der Wert der Ausgangsgröße $A(t)$ zum Zeitpunkt t nicht nur von dem gleichzeitigen Wert der Eingangsgröße $E(t)$ abhängt, sondern auch von den früheren Werten $E(t - \tau)$ mit $0 < \tau < t$. Allerdings werden die früheren Werte mit unterschiedlichen Gewichten $G(\tau)$ versehen.¹² Da das System auf jede Eingangsfunktion mit einer bestimmten Ausgangsfunktion antwortet – d.h. $A = \varphi\{E\}$, wobei der Operator φ auch als *Übertragungsglied* bezeichnet wird –, kann die Gewichtsfunktion $G(t)$ als Gedächtnis¹³ des Übertragungsgliedes interpretiert werden, so daß man eine anschauliche Deutung des Faltungsintegrals (2.10) erhält.¹⁴

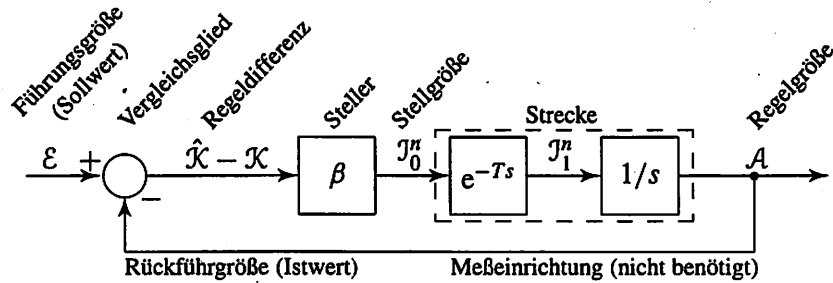


Abb. 2: Strukturbild des Totzeitsystems gemäß (2.8) Ohne die explizite Berücksichtigung des ursprünglichen Kapitalstocks $K(0)$ ergibt sich eine modifizierte Darstellung zur Abbildung 1, die (2.8) bzw. (2.9) widerspiegelt.

Nach (2.8) muß die gliedweise Rücktransformation Summanden der Form

$$(2.11) \quad \mathcal{R}^n(s) e^{-nTs} [\hat{\mathcal{K}}(s) - K(0)/s] \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots$$

behandeln, wobei sich nachfolgende Regeln der inversen LAPLACE-Transformation ausnutzen lassen.

1. Exponentialfunktion (A.4): $\mathcal{R}(s) = \beta/s \bullet \circ R(t) = \beta$ und $K(0)/s \bullet \circ K(0)$
2. n -fache Faltung entsprechend Regel (A.4):

$$\mathcal{R}^n(s) = \beta^n/s^n \bullet \circ \Omega_1(t; n) := R(t) * R(t) * \dots * R(t) = \beta^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

3. Verschiebungsregel (A.12): $e^{-nTs} [\hat{\mathcal{K}}(s) - K(0)/s] \bullet \circ [\hat{K}(t - nT) - K(0)] H(t - nT)$

¹² Ein kontinuierliches System heißt genau dann *kausal*, wenn der Verlauf des Ausgangssignals $A(t)$ zu jedem Zeitpunkt t_1 nur vom Verlauf des entsprechenden Eingangssignals $E(t)$ bis zu diesem Zeitpunkt t_1 abhängt.

¹³ Das betreffende System heißt *gedächtnislos*, wenn das Ausgangssignal A zu jedem Zeitpunkt nur vom Eingangssignal E zum selben Zeitpunkt abhängt, also nicht von vergangenen Werten von E .

¹⁴ Falls die Eingangsgröße $\mathcal{E}(s)$ konstant und gleich 1 ist, folgt $\mathcal{E}(s) \bullet \circ E(t) = \delta(t)$, wobei die Diracsche δ -Funktion den *Einheitsimpuls* beschreibt; siehe Abbildung 9 im Anhang I. Gleichung (2.10) liefert nun $A(t) = G(t) * \delta(t) = G(t)$, und $G(t)$ wird aus diesem Grund auch als *Impulsantwort* bezeichnet.

Gilt dagegen für die Eingangsgröße $\mathcal{E}(s) = 1/s$, dann liefert (2.10) $A(t) = G(t) * E(t) = G(t) * H(t)$, wobei die Heaviside-Funktion $H(t)$ einen *Einheitssprung* zum Zeitpunkt 0 bezeichnet. In diesem Fall spricht man bei $G(t) * H(t)$ von der *Sprunganwort* des Übertragungsgliedes. Vgl. hierzu Abbildung 8 im Anhang I. Die Faltung besitzt außerdem die Eigenschaften der Assoziativität (A.2b) und der Distributivität (A.2c). Eine Interpretation der Sprunganworten liefert Unbehauen (1993, S. 27).

Unter Beachtung der wechselnden Vorzeichen läßt sich nun eine komprimierte Lösung der inversen LAPLACE-Transformation $\mathcal{K}(s) \leftrightarrow K(t)$ angeben als

$$(2.12) \quad [K(t) - K(0)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Omega_1(t; n) * [\hat{K}(t - nT) - K(0)] H(t - nT)$$

Insbesondere für die ersten Perioden folgt

$$\begin{aligned} K(t) &= K(0) && \text{für } 0 \leq t < T \\ K(t) &= K(0) + \beta * [\hat{K}(t - T) - K(0)] H(t - T) && \text{für } T \leq t < 2T \\ K(t) &= K(0) + \beta * [\hat{K}(t - T) - K(0)] H(t - T) \\ &\quad - \beta^2 t * [\hat{K}(t - 2T) - K(0)] H(t - 2T) && \text{für } 2T \leq t < 3T \\ &\vdots \end{aligned}$$

Erwartungsgemäß hängt der Zeitpfad für den Kapitalstock $K(t)$ von dem Anfangswert $K(0)$ und dem Zeitpfad für den optimalen Kapitalstock $\hat{K}(t)$ ab.

2.2 Vorgabe optimaler Pfade für den Kapitalstock

2.2.1 Der Fall eines konstanten optimalen Kapitalstocks

Um eine explizite Lösung angeben zu können, wird nun der Spezialfall eines konstanten optimalen Kapitalstocks $\hat{K}(t) = C$ mit $\hat{\mathcal{K}}(s) = C/s$ untersucht. Da das System keine Vergangenheit besitzt, also $\hat{K}(t) = K(t)$ für alle $t < 0$ gilt, liefert die Annahme $\hat{K}(t) = C$ für alle t und insbesondere $\hat{K}(0) = C$ entsprechend (2.8)

$$\mathcal{K}(s) = C/s \leftrightarrow K(t) = C.$$

Also stimmt der aktuelle Kapitalstock zu jedem Zeitpunkt t mit dem optimalen Kapitalstock überein, $K(t) = \hat{K}(t) = C$, und bis auf die Ersatzinvestitionen werden keine Investitionen getätigt, $I_0^n(t) = 0$.

Aus diesem Grund wird nun angenommen, daß der optimale Kapitalstock $\hat{K}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einen neuen Wert $C \neq K(0)$ springt. Die Summanden aus (2.11) lauten nun wegen $\hat{\mathcal{K}}(s) = C/s$

$$\mathcal{R}^n(s) e^{-nTs} [C - K(0)]/s \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots$$

In diesem Fall bietet sich die einfachere Rücktransformation

$$\frac{\mathcal{R}^n(s)}{s} e^{-nTs} = \frac{\beta^n}{s^{n+1}} e^{-nTs}$$

$$\leftrightarrow \Omega_2(t; n) := \beta^n \frac{(t - nT)^n}{n!} H(t - nT)$$

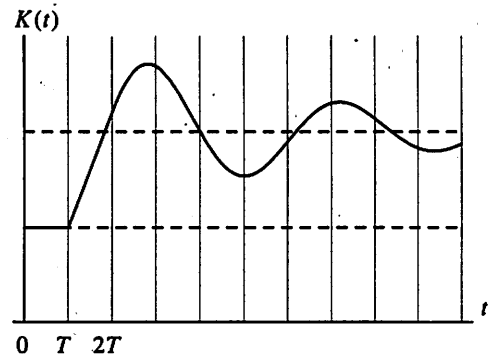


Abb. 3: Zeitpfad des Kapitalstocks

an. Setzt man $\Delta := C - K(0)$, dann ergibt sich die folgende in der Abb. 3 dargestellte Lösung für die ersten Perioden¹⁵

$$\begin{aligned} K(t) &= K(0) & \text{für } 0 \leq t < T \\ K(t) &= K(0) + \Delta\beta(t-T) & \text{für } T \leq t < 2T \\ K(t) &= K(0) + \Delta\left[\beta(t-T) - \beta^2 \frac{(t-2T)^2}{2!}\right] & \text{für } 2T \leq t < 3T \\ K(t) &= K(0) + \Delta\left[\beta(t-T) - \beta^2 \frac{(t-2T)^2}{2!} + \beta^3 \frac{(t-3T)^3}{3!}\right] & \text{für } 3T \leq t < 4T \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man beachte, daß die *Stetigkeit des Zeitpfades* für den Kapitalstock an den Intervallgrenzen gewährleistet ist.

Auch die in der Fußnote 6 angegebene LAPLACE-Transformierte läßt sich nun behandeln. Denn mit $T = T_1 = T_2$ und $\hat{K}(t) = K(0)$ für alle $t < 0$ bzw. $\hat{K}(t) = C$ für alle $t > 0$ folgt

$$s\mathcal{K}(s) - K(0) = \beta e^{-Ts}[C/s - \mathcal{K}(s)] + \delta e^{-Ts}[\mathcal{K}(s) + \int_{-T}^0 K(0)e^{-s\tau}d\tau] - \delta\mathcal{K}(s).$$

Die Berechnung des Integrals $\int_{-T}^0 e^{-s\tau}d\tau = -(1/s)(1 - e^{sT})$ führt zu

$$\begin{aligned} (s + \delta + (\beta - \delta)e^{-Ts})\mathcal{K}(s) &= \frac{\beta}{s}e^{-Ts}C + K(0) + \delta e^{-Ts}K(0)(-1/s)(1 - e^{sT}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{K}(s) &= \frac{\frac{\beta}{s}e^{-Ts}}{s + \delta + (\beta - \delta)e^{-Ts}}C + \frac{1 - \frac{\delta}{s}(e^{-Ts} - 1)}{s + \delta + (\beta - \delta)e^{-Ts}}K(0). \end{aligned}$$

Analog zum bisherigen Vorgehen wird nun $\tilde{\mathcal{R}}(s) = (\beta - \delta)(s + \delta)$ gesetzt, so daß ähnlich zu (2.5) folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s) &= \frac{\frac{\beta}{s(s+\delta)}e^{-Ts}}{1 + \tilde{\mathcal{R}}(s)e^{-Ts}}C + \frac{\frac{1}{s+\delta} - \frac{\delta}{s(s+\delta)}(e^{-Ts} - 1)}{1 + \tilde{\mathcal{R}}(s)e^{-Ts}}K(0) \\ &= \frac{\frac{1}{s(s+\delta)}e^{-Ts}}{1 + \tilde{\mathcal{R}}(s)e^{-Ts}}(\beta C - \delta K(0)) + \frac{1/s}{1 + \tilde{\mathcal{R}}(s)e^{-Ts}}K(0) \end{aligned}$$

In dem Spezialfall $\beta = \delta$ mit $\tilde{\mathcal{R}}(s) = 0$ liefert die Rücktransformation mit $\Delta := C - K(0)$

$$\mathcal{K}(s) = \frac{1}{s(s+\beta)}e^{-Ts}\beta\Delta + \frac{1}{s}K(0)$$

$$\Leftrightarrow K(t) = \beta\Delta(1 - e^{-\beta(t-T)})H(t-T) + K(0)$$

Der zugehörige Zeitpfad des Kapitalstocks wird in der Abb. 4 dargestellt. Dagegen gilt für $\beta \neq \delta$ und genügend großes s wie zuvor die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1 + \tilde{\mathcal{R}}(s)e^{-Ts}} = 1 - \tilde{\mathcal{R}}(s)e^{-Ts} + \tilde{\mathcal{R}}^2(s)e^{-2Ts} - + \dots$$

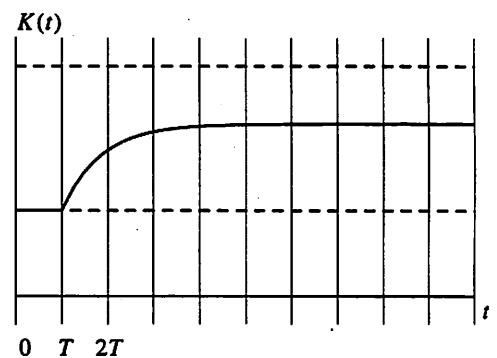


Abb. 4: Zeitpfad des Kapitalstocks

¹⁵ Zur Kontrolle kann beispielsweise $K(t)$ für $t = 3,5T$ in (1.7) eingesetzt werden,

$$\dot{K}(3,5T) + \beta K(2,5T) = \beta \dot{K}(2,5T) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta\left[\beta - \frac{2\beta^2}{2}(3,5T - 2T) + \frac{3\beta^3}{6}(3,5T - 3T)^2\right] + \beta\left[K(0) + \Delta\left[\beta(2,5T - T) - \frac{\beta^2}{2}(2,5T - 2T)^2\right]\right] = \beta C.$$

Diese Aussage ist wahr, denn es gilt $\Delta\beta = \beta C - \beta K(0)$.

Bereits an dieser Stelle wird deutlich, daß zwischen den Fällen $\beta > \delta \iff \tilde{\mathcal{R}}(s) > 0$ und $\beta < \delta \iff \tilde{\mathcal{R}}(s) < 0$ zu unterscheiden ist. Explizit muß also die Gleichung

$$\mathcal{K}(s) = \left[\frac{1}{s(s+\delta)} e^{-Ts} - \frac{\tilde{\mathcal{R}}(s)}{s(s+\delta)} e^{-2Ts} + \frac{\tilde{\mathcal{R}}^2(s)}{s(s+\delta)} e^{-3Ts} - + \dots \right] [\beta C - \delta K(0)] \\ + \left[\frac{1}{s} - \frac{\tilde{\mathcal{R}}(s)}{s} e^{-Ts} + \frac{\tilde{\mathcal{R}}^2(s)}{s} e^{-2Ts} - + \dots \right] K(0)$$

rücktransformiert werden. Der erste Klammerausdruck läßt sich unter Berücksichtigung von

$$\frac{\tilde{\mathcal{R}}^{n-1}(s)}{s(s+\delta)} e^{-nTs} = \frac{(\beta - \delta)^{n-1}}{s(s+\delta)^n} e^{-nTs} = \frac{\tilde{\mathcal{R}}^n(s)}{s} e^{-nTs} \frac{1}{\beta - \delta}$$

umschreiben in

$$\left[\frac{\tilde{\mathcal{R}}(s)}{s} e^{-Ts} - \frac{\tilde{\mathcal{R}}^2(s)}{s} e^{-2Ts} + \frac{\tilde{\mathcal{R}}^3(s)}{s} e^{-3Ts} - + \dots \right] \frac{1}{\beta - \delta}.$$

Demnach gilt auch

$$\mathcal{K}(s) - \frac{1}{s} K(0) = \left[\frac{\tilde{\mathcal{R}}(s)}{s} e^{-Ts} - \frac{\tilde{\mathcal{R}}^2(s)}{s} e^{-2Ts} + \frac{\tilde{\mathcal{R}}^3(s)}{s} e^{-3Ts} - + \dots \right] \left[\frac{\beta C - \delta K(0)}{\beta - \delta} - K(0) \right]$$

MATHEMATICA liefert für die inverse LAPLACE-Transformation der einzelnen Summanden

$$\frac{\tilde{\mathcal{R}}^n(s)}{s} e^{-nTs} = \frac{(\beta - \delta)^n}{s(s+\delta)^n} e^{-nTs} \bullet \bullet \bullet \Omega_3(t; n) := (\beta - \delta)^n \frac{\Gamma(n, 0, \delta(t - nT))}{\delta^n \Gamma(n)} H(t - nT).$$

Da n ganzzahlig ist, gilt für die von Euler eingeführte Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$, so daß $\Omega_3(t; n)$ umgeschrieben werden kann zu

$$(2.13) \quad \Omega_3(t; n) = \frac{(\beta - \delta)^n}{\delta^n (n-1)!} H(t - nT) \int_0^{\delta t} \tau^{n-1} e^{-\tau} d\tau.$$

MATHEMATICA bewältigt die Lösung des Integrals zwar problemlos, aber für die Kontrolle per Hand erweist es sich als günstiger, bei der Transformation auf (A.16) zurückzugreifen.

Setzt man zur Vereinfachung

$$\Delta := \frac{\beta C - \delta K(0)}{\beta - \delta} - K(0)$$

und $\xi_n := \delta(t - nT)$,

so resultiert für die ersten Perioden folgender Zeitpfad des Kapitalstocks

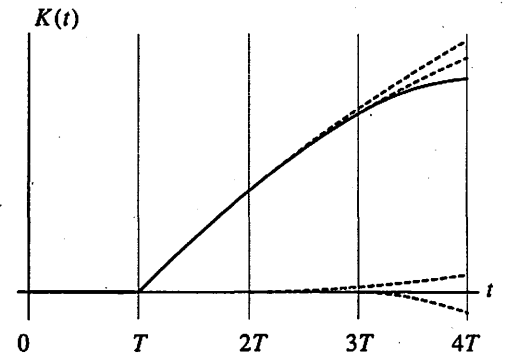


Abb. 5: Zeitpfad des Kapitalstocks

$$\begin{aligned}
K(t) &= K(0) && \text{für } 0 \leq t < T \\
K(t) &= K(0) + \frac{\Delta(\beta - \delta)}{\delta}(1 - e^{-\xi_1 t}) && \text{für } T \leq t < 2T \\
K(t) &= K(0) + \frac{\Delta(\beta - \delta)}{\delta}(1 - e^{-\xi_1 T}) - \frac{\Delta(\beta - \delta)^2}{\delta^2}[1 - e^{-\xi_2(t-T)}] && \text{für } 2T \leq t < 3T \\
K(t) &= K(0) + \frac{\Delta(\beta - \delta)}{\delta}(1 - e^{-\xi_1 T}) - \frac{\Delta(\beta - \delta)^2}{\delta^2}[1 - e^{-\xi_2(T)}] \\
&\quad + \frac{\Delta(\beta - \delta)^3}{2\delta^3}[2 - e^{-\xi_3 T}(\xi_3^2 + 2\xi_3 + 2)] && \text{für } 3T \leq t < 4T \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dabei sind die auftretenden ξ_1 , ξ_2 und ξ_3 nichtnegativ, und die *Stetigkeit des Zeitpfades* für den Kapitalstock an den Intervallgrenzen resultiert aus $\xi_n = 0$ für $t = nT$.

Anmerkungen zur Stabilität der Lösung: Da n eine positive ganze Zahl bezeichnet, darf von dem Grenzübergang $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(n, 0, \delta t) = \Gamma(n) = (n-1)!$ auf $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_3(t; n) = (\beta - \delta)^n / \delta^n$ geschlossen werden. Wenn jedes einzelne $\Omega_3(t; n)$ diesen Grenzwert aufweist, dann muß auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K(0) + \Delta \left[(\beta - \delta)/\delta - (\beta - \delta)^2/\delta^2 + (\beta - \delta)^3/\delta^3 - + \dots \right]$$

erfüllt sein. Da neben t auch n gegen unendlich strebt, ergibt sich für $\beta - \delta < \delta$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_3(t; n) = 0$ und für die unendliche geometrische Reihe folgt¹⁶

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = C - \frac{\Delta}{1 + \frac{\beta - \delta}{\delta}} = C - \frac{\Delta \delta}{\beta}.$$

Also wird der optimale Kapitalstock C langfristig nicht ganz erreicht, wenn die Abschreibungsrate δ positiv ist. Der Fall $\beta = \delta$ ist in Abb. 4 beschrieben worden. Demnach gilt dort $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = C - \Delta$.

Dagegen impliziert $\beta - \delta > \delta$ den uneigentlichen Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_3(t; n) = \infty$. Da jedes einzelne $\Omega_3(t; n)$ divergiert, resultiert für den Zeitpfad $K(t)$ eine Art divergierender Schwingungen.

¹⁶ Ein kontinuierliches System heißt genau dann *stabil*, wenn jedes beschränkte zulässige Eingangssignal $E(t)$ ein ebenfalls beschränktes Ausgangssignal $A(t)$ für sämtliche t -Werte zur Folge hat. Vgl. Unbehauen (1993, S. 12).

2.2.2 Der Fall eines linear steigenden optimalen Kapitalstocks

Wird statt eines konstanten optimalen Kapitalstocks $\hat{K}(t)$ die lineare Funktion $\hat{K}(t) = K(0) + \alpha t$ vorgegeben, so liefert die LAPLACE-Transformation

$$\hat{K}(t) \circ \hat{K}(s) = K(0)/s + \alpha/s^2.$$

Die Summanden aus (2.11) lauten nun

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^n(s) e^{-nTs} [K(0)/s + \alpha/s^2 - K(0)/s] \\ = \frac{\mathcal{R}^n(s)}{s^2} e^{-nTs} \alpha, \end{aligned}$$

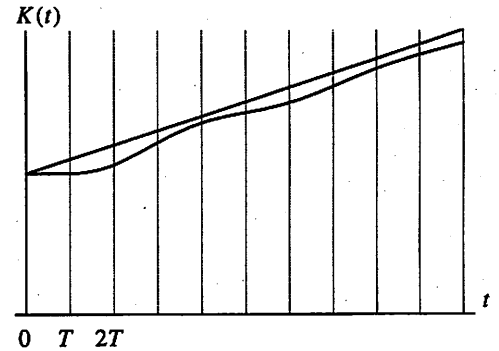


Abb. 6: Zeitpfad des Kapitalstocks

wobei die inverse LAPLACE-Transformation

$$\frac{\alpha \mathcal{R}^n(s)}{s^2} e^{-nTs} = \frac{\alpha \beta^n}{s^{n+2}} e^{-nTs} \circ \alpha \beta^n \frac{(t-nT)^{n+1}}{(n+1)!} H(t-nT)$$

ergibt. In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s) &= \frac{K(0)}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha \beta^n \frac{e^{-nTs}}{s^{n+2}} \\ &\circ K(t) = K(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha \beta^n \frac{(t-nT)^{n+1}}{(n+1)!} H(t-nT) \end{aligned}$$

d.h. für die ersten Perioden

$$K(t) = K(0)$$

$$\text{für } 0 \leq t < T$$

$$K(t) = K(0) + \alpha \beta \frac{(t-T)^2}{2!}$$

$$\text{für } T \leq t < 2T$$

$$K(t) = K(0) + \alpha \left[\beta \frac{(t-T)^2}{2!} - \beta^2 \frac{(t-2T)^3}{3!} \right]$$

$$\text{für } 2T \leq t < 3T$$

$$K(t) = K(0) + \alpha \left[\beta \frac{(t-T)^2}{2!} - \beta^2 \frac{(t-2T)^3}{3!} + \beta^3 \frac{(t-3T)^4}{4!} \right]$$

$$\text{für } 3T \leq t < 4T$$

⋮

Auch hier ist die Stetigkeit des Zeitpfades für den Kapitalstock an den Intervallgrenzen gewährleistet.

2.3 Behandlung einer alternativen Investitionsfunktion

Im folgenden wird eine zu (1.4) alternative Investitionsfunktion vorgeschlagen. Obwohl dadurch eine kompliziertere Differenzendifferentialgleichung resultiert, unterscheidet sich die Behandlung des Problems nach der LAPLACE-Transformation in den Bildbereich nur unwesentlich von dem bisher untersuchten Totzeitsystem.

Für das Investitionsverhalten wird nun unterstellt, daß sich die Änderung der Investitionen proportional zur Differenz $\hat{K}(t) - K(t)$ verhält,¹⁷

$$\dot{I}_0^n(t) = \beta(\hat{K}(t) - K(t)),$$

wobei β als konstant vorausgesetzt wird. Demnach nehmen die Investitionen zu, $\dot{I}_0^n(t) > 0$, wenn der optimale Kapitalstock $\hat{K}(t)$ größer ist als der aktuelle Kapitalstock $K(t)$, et vice versa. Also ergeben sich die Nettoinvestitionen zum Zeitpunkt t aus

$$(2.14) \quad I_0^n(t) = \beta \int_0^t (\hat{K}(\tau) - K(\tau)) d\tau \quad \text{mit } \beta = \text{konstant.}$$

Insbesondere wenn der aktuelle Kapitalstock bis zum Zeitpunkt t mit dem optimalen Kapitalstock übereinstimmt, d.h. $\dot{I}_0^n(\tau) = 0$ für alle $\tau \leq t$, werden außer den Ersatzinvestitionen keine weiteren Investitionen getätigt, $I_0^n(t) = 0$.

Statt (2.3) liefert die LAPLACE-Transformation der Gleichung (2.14) gemäß (A.8) nun,

$$(2.15) \quad \mathcal{I}_0^n(s) = \frac{\beta}{s} (\hat{\mathcal{K}}(s) - \mathcal{K}(s)).$$

Analog zu (2.4) ist man wiederum in der Lage, aus den Gleichungen (2.2), (2.1) und (2.15) eine einzige Gleichung herzuleiten, die die interessierende Größe $\mathcal{K}$ in Abhängigkeit von dem vorgegebenen Sollverlauf $\hat{\mathcal{K}}$ beschreibt.

$$(2.16) \quad \mathcal{K}(s) = \frac{\beta}{s^2} e^{-Ts} (\hat{\mathcal{K}}(s) - \mathcal{K}(s)) + \frac{K(0)}{s}$$

Dagegen bleibt (2.5) unverändert bis auf die Tatsache, daß nun

$$\mathcal{R}(s) := \beta/s^2$$

gesetzt wird. Bevor auf die leicht modifizierte Gleichung (2.5) eingegangen wird, kann (2.16) aus dem Bildbereich rücktransformiert werden. Die Multiplikation von (2.16) mit s^2 liefert

$$(2.17) \quad s^2 \mathcal{K}(s) - sK(0) = \beta e^{-Ts} \hat{\mathcal{K}}(s) - \beta e^{-Ts} \mathcal{K}(s).$$

Sofern das System keine Vorgeschichte besitzt, d.h., es gilt $\hat{K}(t) = K(t)$ für alle $t \leq 0$, darf von $\dot{I}_0^n(0) = 0$, $I_0^n(0) = 0$ und $\dot{K}(0) = 0$ ausgegangen werden. Also generiert die inverse LAPLACE-Transformation $\mathcal{K}(s) \leftrightarrow K(t)$ in bezug auf (2.17) unter Berücksichtigung der Differentiationsregel (A.6b) $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 \mathcal{K}(s) - sK(0)\} = \ddot{K}$ sowie des Verschiebungssatzes (A.12) folgende Differenzendifferentialgleichung,¹⁸

$$(2.18) \quad \boxed{\ddot{K}(t) + \beta K(t-T)H(t-T) = \beta \dot{K}(t-T)H(t-T).}$$

¹⁷ Ein ähnliches Beispiel ist Föllinger (1990, S. 95–102) zu entnehmen. Dort wird eine Temperaturregelung beschrieben, wobei der Transport des warmen Wassers vom Heizkessel zum Heizkörper eine gewisse Transportzeit (Totzeit) in Anspruch nimmt. Darüber hinaus wird die Ventilstellung am Heizkessel von einem Motor gesteuert, der auf die Differenz zwischen der Raumtemperatur und der Solltemperatur reagiert.

¹⁸ Ohne Totzeit resultiert eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die im Anhang II behandelt wird.

Für die Berechnung der Lösung wird (2.18) in den Bildbereich transformiert (LAPLACE-Transformation), so daß (2.16) resultiert. Anschließend wird versucht, die zu (2.16) äquivalente Gleichung (2.5) zurückzutransformieren (inverse LAPLACE-Transformation).

Die inverse LAPLACE-Transformation $\mathcal{K}(s) \bullet \circ K(t)$ von (2.8) muß lediglich die modifizierte Definition von $\mathcal{R}(s)$ berücksichtigen. Alle übrigen Schritte im Anschluß an (2.11) bleiben erhalten.

1. Rücktransformation: $\mathcal{R}(s) = \beta/s^2 \bullet \circ R(t) = \beta t$

2. Faltungsregel (A.2b): $\mathcal{R}^n(s) = \frac{\beta^n}{s^{2n}} \bullet \circ \frac{\beta^n t^{2n+1}}{(2n-1)!}$

Die Lösung der inversen LAPLACE-Transformation ergibt sich analog zu (2.12). Allerdings muß man sich nun bei der Darstellung für die ersten Perioden mit der Faltung begnügen.

$$\begin{aligned} K(t) &= K(0) && \text{für } 0 \leq t < T \\ K(t) &= K(0) + \beta t^3 * [\hat{K}(t-T) - K(0)] H(t-T) && \text{für } T \leq t < 2T \\ K(t) &= K(0) + \beta t^3 * [\hat{K}(t-T) - K(0)] H(t-T) \\ &\quad - \frac{\beta^2 t^5}{3!} * [\hat{K}(t-2T) - K(0)] H(t-2T) && \text{für } 2T \leq t < 3T \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Wie im ersten Beispiel wird im folgenden die Annahme eines konstanten optimalen Kapitalstocks $\hat{K}(t) = C$ untersucht, wobei der optimale Kapitalstock $\hat{K}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einen neuen Wert $C \neq K(0)$ springt.¹⁹ Bei der inversen LAPLACE-Transformation $\mathcal{K}(s) \bullet \circ K(t)$ der Gleichung (2.8) ist außer den bereits angegebenen Schritten die modifizierte Definition von $\mathcal{R}(s)$ zu berücksichtigen. Setzt man erneut $\Delta := C - K(0)$, so ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\mathcal{R}^n(s)}{s} e^{-nTs} &= \frac{\Delta \beta^n}{s^{2n+1}} e^{-nTs} \\ &\bullet \circ \frac{\Delta \beta^n (t - nT)^{2n}}{(2n)!} H(t - nT). \end{aligned}$$

Zusammenfassend liefert (2.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s) &= \frac{K(0)}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \mathcal{R}^n(s) e^{-nTs} \frac{\Delta}{s} \\ &\bullet \circ K(t) = K(0) + \Delta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\beta^n (t - nT)^{2n}}{(2n)!} H(t - nT) \end{aligned}$$

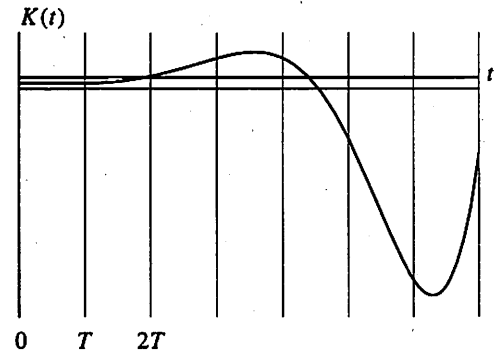


Abb. 7: Zeitpfad des Kapitalstocks

¹⁹ Im Beispiel von Föllinger (1990) zur Regelung der Raumtemperatur wird eine neue konstante Solltemperatur eingestellt.

Also wird der Zeitpfad des Kapitalstocks durch folgende Polynome beschrieben:

$$K(t) = K(0) \quad \text{für } 0 \leq t < T$$

$$K(t) = K(0) + \Delta\beta \frac{(t-T)^2}{4!} \quad \text{für } T \leq t < 2T$$

$$K(t) = K(0) + \Delta\beta \left[\frac{(t-T)^2}{4!} - \frac{(t-2T)^2}{6!} \right] \quad \text{für } 2T \leq t < 3T$$

$$K(t) = K(0) + \Delta\beta \left[\frac{(t-T)^2}{4!} - \frac{(t-2T)^2}{6!} + \frac{(t-3T)^2}{8!} \right] \quad \text{für } 3T \leq t < 4T$$

⋮

Schließlich bleibt zu erwähnen, daß der Zeitpfad des Kapitalstocks an den Intervallgrenzen stetig ist.

Anhang I: Regeln der LAPLACE-Transformation

Ist die Funktion $f(t)$ für alle $t \geq 0$ definiert, dann lautet ihr LAPLACE-Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Falls dieses Integral für ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann gibt es eine Zahl σ , so daß das Integral für alle $s > \sigma$ konvergiert. Im Fall $\sigma = s$ kann sowohl Konvergenz als Divergenz stattfinden. Der Konvergenzbereich K_f stimmt also mit einer der beiden Halbgeraden $[\sigma, \infty[$ oder $]\sigma, \infty[$ überein.²⁰ Setzt man

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (s \in K_f),$$

dann heißt die auf K_f definierte Funktion F die LAPLACE-Transformierte von f , die auch mit $\mathcal{L}\{f\}$ oder $\mathcal{L}\{f(t)\}$ bezeichnet wird. Analog heißt die Abbildung, die jeder Funktion f ihre LAPLACE-Transformierte zuordnet, LAPLACE-Transformation.

Die Zuordnung der Bildfunktion $F = \mathcal{L}\{f\}$ zu einer Originalfunktion f wird häufig auch durch $f(t) \circ \bullet F(s)$ bezeichnet. Dementsprechend beschreibt $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ oder auch $F(s) \bullet \circ f(t)$ die inverse LAPLACE-Transformation.

Im Umgang mit der LAPLACE-Transformation sind zwei Funktionen unentbehrlich. Zum einen wird durch die Heaviside-Funktion

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

der Einheitsprung definiert. Damit läßt sich auch eine Verschiebung um den Zeitraum a realisieren,

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ 1 & \text{für } t \geq a. \end{cases}$$

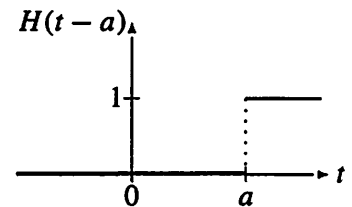


Abb. 8: Einheitsprung zum Zeitpunkt $t = a$

Zum anderen ist die Diracsche δ -Funktion von großer Bedeutung. Sie „definiert“ den Einheitsimpuls durch die unerfüllbare Forderung, für alle $t \neq 0$ zu verschwinden und an der Stelle $t = 0$ so stark unendlich zu sein, daß gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$. Eine approximative Darstellung des δ -Funktion ergibt sich aus der nebenstehenden Abbildung mit der Rechteckfunktion $r_\varepsilon(t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Sofern man bereit ist, die Diracsche δ -Funktion zu akzeptieren, ergeben sich folgende Beziehungen zur Heaviside-Funktion,

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad \delta(t) = \dot{H}(t)$$

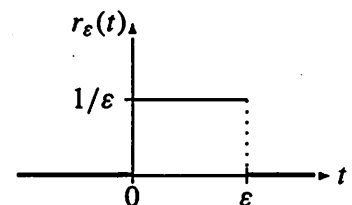


Abb. 9: Approximative Darstellung des Einheitsimpuls

Schließlich heißt

$$(A.1) \quad (f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

²⁰ Vgl. Heuser (1989, S. 187–200), sowie Bronstein, Semendjajew (1996).

die **Faltung** oder **Konvolution** der beiden Funktionen f und g . Für die Faltung gelten folgende Gesetze,

(A.2a)	$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$	Kommutativgesetz,
(A.2b)	$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$	Assoziativgesetz,
(A.2c)	$(f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3$	Distributivgesetz.

Für die LAPLACE-Transformation lassen sich einige Grundregeln angeben.

Regel 1 (Linearität): Für $s \in K_f \cap K_g$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(A.3) \quad \mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\} \quad \text{bzw.} \quad af + bg \rightsquigarrow aF + bG.$$

Regel 2 (Exponentialfunktion): Für $n = 0, 1, \dots$ und $s \in K_f$ hat man

$$(A.4) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!} e^{at}\right\} = \frac{1}{(s-a)^{n+1}}$$

Regel 3 (Differentiation): Ist die Funktion f vom Typ C^n mit $n \geq 1$, dann gilt für alle $s \in K_f$ mit $F := \mathcal{L}\{f\}$,

$$(A.5) \quad \mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Damit sind insbesondere die nachstehenden Spezialfälle erfaßt.

$$(A.6a) \quad \mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0)$$

$$(A.6b) \quad \mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Regel 4 (Faltung): Für alle $s \in K_f \cap K_g$ gilt

$$(A.7) \quad \mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \mathcal{L}\{g\} \quad \text{bzw.} \quad f * g \rightsquigarrow F \cdot G$$

Die LAPLACE-Transformation der Heaviside-Funktion

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

liefert für $a = 0$ einen Spezialfall der Faltung (A.7)

$$(A.8) \quad f(t) * H(t) \rightsquigarrow F(s)/s \quad \text{mit} \quad f(t) * H(t) = \int_0^t f(\tau) H(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Dagegen liefert die LAPLACE-Transformation der Diracschen δ -Funktion

$$(A.9) \quad \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \quad \text{mit } a \geq 0, \forall s > 0$$

und insbesondere $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Ein weiterer Spezialfall der Faltung (A.7) lautet

$$(A.10) \quad f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)H(t-a) \quad \text{mit } a > 0,$$

wobei sich für $a \rightarrow 0$ die Beziehung $f(t) * \delta(t) = f(t)$ ergibt.²¹

²¹ Die Diracsche δ -Funktion spielt in bezug auf die Faltung die gleiche Rolle, wie die Eins bei der Multiplikation.

Für die weiteren Rechenregeln wird $f(t) \circ \bullet F(s)$ vorausgesetzt.

$$(A.11) \quad e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s+a) \quad \text{Dämpfungssatz}$$

$$(A.12) \quad f(t-a)H(t-a) \circ \bullet e^{-as}F(s) \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{Verschiebungssatz}$$

$$(A.13) \quad f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F(s/a) \quad a > 0 \quad \text{Ähnlichkeitssatz}$$

$$(A.14) \quad t^n f(t) \circ \bullet (-1)^n F^{(n)}(s) \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{Multiplikationssatz}$$

Für die angeführten Beispiele sind zwei inverse LAPLACE-Transformationen von Bedeutung, die Prudnikov, Brychkov, Marichev (1992) entnommen sind. Auf Seite 11 findet man für $\Re(\mu + \nu) < 0$, $\Re p > 0$, $\Re p > -\Re a$ und $\mu, \nu \neq 0, 1, 2, \dots$

$$(A.15) \quad F(s) = s^\mu (s+a)^\nu \circ \bullet f(t) = \frac{t^{-\mu-\nu-1}}{\Gamma(-\mu-\nu)} {}_1F_1(-\nu, -\mu-\nu, -at).$$

Dabei enthält die Funktion f für den Zeitbereich zwei Funktionen, deren Kenntnis für den Umgang mit *MATHEMATICA* unumgänglich sind.

Die Gamma-Funktion hat Euler zur Interpolation der Fakultät eingeführt,

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

und sie genügt der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Insbesondere für $n = 1, 2, \dots$ erhält man $\Gamma(n) = (n-1)!$. Darüber hinaus enthält (2.13) eine unvollständige Gamma-Funktion

$$\Gamma(z, a, b) := \int_a^b t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Die zweite Funktion in (A.15) wird die Kummersche konfluente hypergeometrische Funktion genannt, deren Reihenentwicklung gegeben ist durch

$${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

Dabei sind $(n)_k := n(n+1) \cdots (n+k-1)$ und speziell $(n)_0 = 1$ zu setzen. Die Funktion ${}_1F_1(a, b, z)$ ist eine Lösung der Kummerschen Differentialgleichung $z \cdot y''(z) + (b-z) \cdot y'(z) - a \cdot y(z) = 0$, und eine Integraldarstellung lautet

$${}_1F_1(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a) \cdot \Gamma(a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt.$$

Die Bessel-, Fehler-, Gamma-, Hermite- und Laguerre-Funktionen sind Spezialfälle von ${}_1F_1$. Die Kummersche Funktion ${}_1F_1(a, b, z)$ geht aus der hypergeometrischen Funktion $F(a, c; b, z)$ hervor, wenn z durch z/c ersetzt und der Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ vorgenommen wird.

Prudnikov, Brychkov, Marichev (1992, S. 12) geben für $n = 1, 2, \dots, m-1$, $\Re p > 0$ und $\Re p > \Re a$ einen Spezialfall von (A.15) an.

$$(A.16) \quad s^{n-m} (p-a)^{-n} \circ \bullet (-1)^n \frac{(m-2)! a^{1-m}}{(m-n-1)!(n-1)!} \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{(n-m+1)_k}{k!(2-m)_k} (at^k) - e^{at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-n)_k}{k!(2-m)_k} (-at^k) \right]$$

Während *MATHEMATICA* auch für höhere μ und ν in der Lage ist (A.15) zu lösen, ist (A.16) bei Rechnungen mit der Hand eindeutig vorzuziehen.

Anhang II: Lösung ohne Totzeit

Sofern keine Totzeit vorliegt ($T = 0$), geht die Differenzendifferentialgleichung (2.18) in folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten über

$$(A.1) \quad \ddot{K}(t) + \delta \dot{K}(t) + \beta K(t) = \beta \hat{K}(t).$$

Für einen konstanten optimalen Kapitalstock $\hat{K}(t) = C$ liefert die LAPLACE-Transformation

$$s^2 \mathcal{K}(s) - sK(0) - \dot{K}(0) + \delta[s\mathcal{K}(s) - K(0)] + \beta \mathcal{K}(s) = \frac{\beta C}{s}$$

Gilt wie zuvor $\dot{K}(0) = 0$, so folgt

$$(A.2) \quad \mathcal{K}(s) = \frac{\beta C}{s(s^2 + \delta s + \beta)} + \frac{(s + \delta)K(0)}{s^2 + \delta s + \beta}.$$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $s^2 + \delta s + \beta = 0$ sind gegeben durch

$$\alpha_{1,2} = -\delta/2 \pm \omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 := \sqrt{\delta^2/4 - \beta}.$$

Nun kann für

$$\mathcal{K}(s) = \underbrace{\frac{\beta C}{s(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}}_{=H_1(s)} + \underbrace{\frac{(s + \delta)K(0)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}}_{=H_2(s)}.$$

eine *Partialbruchzerlegung* vorgenommen werden. Man erhält unter Beachtung von $\alpha_1 \alpha_2 = \beta$ und $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\omega_0$

$$H_1(s) = \frac{r_0}{s} + \frac{r_1}{s - \alpha_1} + \frac{r_2}{s - \alpha_2}$$

wobei

$$\begin{aligned} r_0 &= \left. \frac{\beta C}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \right|_{s=0} = \frac{\beta C}{\alpha_1 \alpha_2} = C \\ r_1 &= \left. \frac{\beta C}{s(s - \alpha_2)} \right|_{s=\alpha_1} = \frac{\beta C}{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\beta C}{\alpha_1 2\omega_0} \\ r_2 &= \left. \frac{\beta C}{s(s - \alpha_2)} \right|_{s=\alpha_2} = -\frac{\beta C}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)} = -\frac{\beta C}{\alpha_2 2\omega_0} \end{aligned}$$

Analog gilt

$$H_2(s) = \frac{r_3}{s - \alpha_1} + \frac{r_4}{s - \alpha_2}$$

wobei

$$\begin{aligned} r_3 &= \left. \frac{(s + \delta)K(0)}{(s - \alpha_2)} \right|_{s=\alpha_1} = \frac{(\alpha_1 + \delta)K(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{(\alpha_1 + \delta)K(0)}{2\omega_0} \\ r_4 &= \left. \frac{(s + \delta)K(0)}{(s - \alpha_2)} \right|_{s=\alpha_2} = -\frac{(\alpha_2 + \delta)K(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{(\alpha_2 + \delta)K(0)}{2\omega_0} \end{aligned}$$

Damit läßt sich das Ergebnis

$$(A.3) \quad \mathcal{K}(s) = H_1(s) + H_2(s) \\ = \frac{C}{s} + \frac{\beta C}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\alpha_1(s - \alpha_1)} - \frac{1}{\alpha_2(s - \alpha_2)} \right] + \frac{K(0)}{2\omega_0} \left[\frac{\alpha_1 + \delta}{s - \alpha_1} - \frac{\alpha_2 + \delta}{s - \alpha_2} \right]$$

in den Zeitbereich rücktransformieren.

$$(A.4) \quad K(t) = C + \frac{\beta C}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t} - \frac{1}{\alpha_2} e^{\alpha_2 t} \right] + \frac{K(0)}{2\omega_0} [(\alpha_1 + \delta)e^{\alpha_1 t} - (\alpha_2 + \delta)e^{\alpha_2 t}]$$

1. Fall: Gilt außerdem $\beta < \delta^2/4$, dann sind α_1 und α_2 voneinander verschieden, reell und negativ. Der Kapitalstock $K(t)$ startet für $t = 0$ bei $K(0)$, denn

$$K(0) = C + \frac{\beta C}{2\omega_0} \left[\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right] + \frac{K(0)}{2\omega_0} [(\alpha_1 + \delta) - (\alpha_2 + \delta)] \\ = C + \frac{\beta C}{2\omega_0} \left[\frac{-2\omega_0}{\beta} \right] + \frac{K(0)}{2\omega_0} [2\omega_0] = K(0)$$

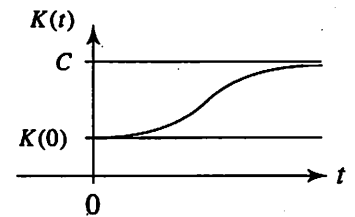


Abb. 10: Aperiodischer Fall

und er wird vollständig an den optimalen Kapitalstock C angepaßt,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = C,$$

wobei sich die Anpassung ohne Schwingungen vollzieht.

2. Fall: Für $\beta > \delta^2/4$ sind α_1 und α_2 konjugiert komplexe Zahlen,²² d.h. $\alpha_{1,2} = -\delta/2 \pm i\omega_1$ mit $\omega_1 = \sqrt{\beta - \delta^2/4}$. In (A.4) ist daher $\omega_0 = i\omega_1$ zu setzen, so daß folgt

$$(A.5) \quad K(t) = C + \frac{\beta C}{2i\omega_1} e^{-(\delta/2)t} \left[\frac{1}{\alpha_1} e^{i\omega_1 t} - \frac{1}{\alpha_2} e^{-i\omega_1 t} \right] \\ + \frac{K(0)}{2i\omega_1} e^{-(\delta/2)t} \left[\left(\frac{\delta}{2} + i\omega_1 \right) e^{i\omega_1 t} - \left(\frac{\delta}{2} - i\omega_1 \right) e^{-i\omega_1 t} \right]$$

Da weiterhin $\alpha_1 \alpha_2 = \beta$ erfüllt ist, kann der erste Ausdruck in eckigen Klammern umgeschrieben werden in

$$\frac{\alpha_2 e^{i\omega_1 t} - \alpha_1 e^{-i\omega_1 t}}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{\beta} \left[-\frac{\delta}{2} (e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}) - i\omega_1 (e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) \right] \\ = -\frac{1}{\beta} \left[\frac{\delta}{2} 2i \sin \omega_1 t + 2i\omega_1 \cos \omega_1 t \right].$$

²² Nur unter der Voraussetzung $\beta > \delta^2/4$ besitzt der erste Summand in (A.2) die Struktur $1/[s((s + \gamma_2^2) + \gamma_1^2)]$, wobei $\gamma_1 = \beta - \delta/2$ und $\gamma_2 = \delta/2$ und zu setzen sind.

Ein Blick in die Tabelle zur Rücktransformation gebrochen-rationaler Bildfunktionen in Bronstein, Semendjajew (1996, S. 204 ff.), zeigt, daß die Lösung folgende Struktur enthalten wird.

$$\frac{1}{s[(s + \gamma_2)^2 + \gamma_1^2]} \rightarrow \frac{1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \left[1 - e^{-\gamma_2 t} \left(\cos \gamma_1 t + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin \gamma_1 t \right) \right].$$

Der zweite Summand in (A.2) kann analog behandelt werden, indem man unter $s/[(s + \gamma_2^2) + \gamma_1^2]$ und $1/[(s + \gamma_2^2) + \gamma_1^2]$ nachschlägt.

Analog erhält man für den zweiten Ausdruck von (A.5) in eckigen Klammer

$$\frac{\delta}{2}(e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}) + i\omega_1(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) = \frac{\delta}{2} 2i \sin \omega_1 t + \omega_1 2i \cos \omega_1 t.$$

Durch Substitution der Ergebnisse resultiert der Zeitpfad für den Kapitalstock

$$\begin{aligned} K(t) &= C - \frac{C}{\omega_1} e^{-(\delta/2)t} \left[\frac{\delta}{2} \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t \right] + \frac{K(0)}{\omega_1} e^{-(\delta/2)t} \left[\frac{\delta}{2} \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t \right] \\ &= C + [K(0) - C] e^{-(\delta/2)t} \left[\frac{\delta}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right]. \end{aligned}$$

Schließlich wird eine Konstante ψ mit $0 \leq \psi < \pi/2$ gewählt, für die

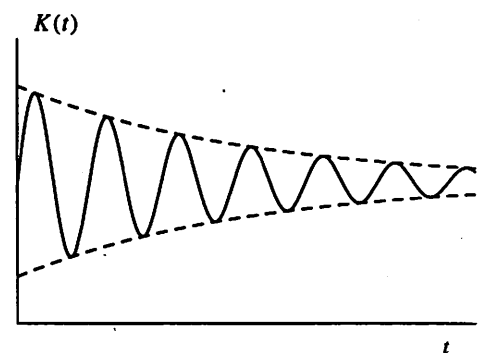
$$\tan \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\delta}{2\omega_1}$$

erfüllt ist. Wegen $\sin \psi \sin \omega_1 t + \cos \psi \cos \omega_1 t = \cos(\omega_1 t - \psi)$ bezeichnet

$$K(t) = C + [K(0) - C] e^{-(\delta/2)t} \cos(\omega_1 t - \psi).$$

eine äquivalente Darstellung für den Zeitpfad.

Wiederum wird der Kapitalstock $K(t)$ vollständig an den optimalen Kapitalstock C angepaßt, $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = C$, allerdings vollzieht sich die Anpassung nun in abklingenden Schwingungen.



Literaturverzeichnis

Abb. 11: Gedämpfte Schwingung

- BELLMAN, R. E. ; ROTH, R. S.: *The Laplace Transform*. Singapore : World Scientific, 1984.
- BOUCEKKINE, R. ; LICANDRO, O. ; PAUL, C.: Differential-difference Equations in Economics: on the Numerical Solution of Vintage Capital Growth Models. In: *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 (1997), S. 347–362.
- BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik, Teil I*. Stuttgart : Teubner, 1996.
- FÖLLINGER, O.: *Laplace- und Fourier-Transformation*. 5. Aufl. Heidelberg : Hüthig, 1990.
- FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 8. Aufl. Heidelberg : Hüthig, 1994.
- GANDOLFO, G.: *Economic Dynamics*. 3. Aufl. Berlin : Springer, 1997.
- HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen : Einführung in Lehre und Gebrauch*. Stuttgart : Teubner, 1989 (Mathematische Leitfäden).
- PRUDNIKOV, A. P. ; BRYCHKOV, Y. A. ; MARICHEV, O. I.: *Integrals and Series, Vol. 5, Inverse Laplace Transforms*. New York : Gordon and Breach, 1992.
- ROSENBERG, R. C. ; KARNOPP, D.: *Introduction to Physical System Dynamics*. New York : McGraw-Hill, 1983 (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering).
- UNBEHAUEN, R.: *Systemtheorie, Grundlagen für Ingenieure*. 6. Aufl. München : Oldenbourg, 1993.

Seit 1989 erschienene Diskussionsbeiträge / Discussion papers released since 1989

- 1-89 **Klaus Schöler**, Zollwirkungen in einem räumlichen Oligopol
- 2-89 **Rüdiger Pethig**, Trinkwasser und Gewässergüte. Ein Plädoyer für das Nutzerprinzip in der Wasserwirtschaft
- 3-89 **Rüdiger Pethig**, Calculus of Consent: A Game-theoretic Perspective. Comment
- 4-89 **Rüdiger Pethig**, Problems of Irreversibility in the Control of Persistent Pollutants
- 5-90 **Klaus Schöler**, On Credit Supply of PLS-Banks
- 6-90 **Rüdiger Pethig**, Optimal Pollution Control, Irreversibilities, and the Value of Future Information
- 7-90 **Klaus Schöler**, A Note on "Price Variation in Spatial Markets: The Case of Perfectly Inelastic Demand"
- 8-90 **Jürgen Eichberger and Rüdiger Pethig**, Constitutional Choice of Rules
- 9-90 **Axel A. Weber**, European Economic and Monetary Union and Asymmetries and Adjustment Problems in the European Monetary System: Some Empirical Evidence
- 10-90 **Axel A. Weber**, The Credibility of Monetary Target Announcement: An Empirical Evaluation
- 11-90 **Axel A. Weber**, Credibility, Reputation and the Conduct of Economic Policies Within the European Monetary System
- 12-90 **Rüdiger Ostermann**, Deviations from an Unidimensional Scale in the Unfolding Model
- 13-90 **Reiner Wolff**, Efficient Stationary Capital Accumulation Structures of a Biconvex Production Technology
- 14-90 **Gerhard Brinkmann**, Finanzierung und Lenkung des Hochschulsystems - Ein Vergleich zwischen Kanada und Deutschland
- 15-90 **Werner Güth and Rüdiger Pethig**, Illegal Pollution and Monitoring of Unknown Quality – A Signaling Game Approach
- 16-90 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen in einem zweidimensionalen räumlichen Wettbewerbsmarkt
- 17-90 **Rüdiger Pethig**, International Environmental Policy and Enforcement Deficits
- 18-91 **Rüdiger Pethig and Klaus Fiedler**, Efficient Pricing of Drinking Water
- 19-91 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen und Marktstrukturen in einem räumlichen Oligopol
- 20-91 **Axel A. Weber**, Stochastic Process Switching and Intervention in Exchange Rate Target Zones: Empirical Evidence from the EMS
- 21-91 **Axel A. Weber**, The Role of Policymakers' Reputation in the EMS Disinflations: An Empirical Evaluation
- 22-91 **Klaus Schöler**, Business Climate as a Leading Indicator? An Empirical Investigation for West Germany from 1978 to 1990
- 23-91 **Jürgen Ehlgen, Matthias Schlemper, Klaus Schöler**, Die Identifikation branchenspezifischer Konjunkturindikatoren
- 24-91 **Reiner Wolff**, On the Existence of Structural Saddle-Points in Variational Closed Models of Capital Formation
- 25-91 **Axel A. Weber**, Time-Varying Devaluation Risk, Interest Rate Differentials and Exchange Rates in Target Zones: Empirical Evidence from the EMS
- 26-91 **Walter Buhr and Reiner Wolff**, Partial versus Global Optimizations in Economic Dynamics: The Case of Recursive Programming
- 27-91 **Klaus Schöler**, Preisvariationen und beschränkte Informationen in einem räumlichen Oligopol
- 28-92 **Jürgen Ehlgen**, Lösen des stochastischen Wachstumsmodells durch Parameterisieren der Entscheidungsfunktion
- 29-92 **Alfred W. Marusev und Andreas Pfingsten**, Zur arbitragefreien Fortrechnung von Zinsstruktur-Kurven
- 30-92 **Jürgen Ehlgen, Matthias Schlemper, Klaus Schöler**, Die Anwendung branchenspezifischer Konjunkturindikatoren
- 31-92 **Klaus Schöler**, Zum strategischen Einsatz räumlicher Preistechniken
- 32-92 **Günter Knieps and Rüdiger Pethig**, Uncertainty, Capacity Costs and Competition in the Electric Power Industry
- 33-92 **Walter Buhr**, Regional Economic Growth by Policy-Induced Capital Flows: I. Theoretical Approach

- 34-92 **Walter Buhr**, Regional Economic Growth by Policy-Induced Capital Flows: II. Policy Simulation Results
- 35-92 **Andreas Pfingsten** and **Reiner Wolff**, Endowment Changes in Economic Equilibrium: The Dutch Disease Revisited
- 36-92 **Klaus Schöler**, Preiselastische Nachfrage und strategische Preisreaktionen in einem räumlichen Wettbewerbsmarkt
- 37-92 **Rüdiger Pethig**, Ecological Dynamics and the Valuation of Environmental Change
- 38-93 **Reiner Wolff**, Saddle-Point Dynamics in Non-Autonomous Models of Multi-Sector Growth with Variable Returns to Scale
- 39-93 **Reiner Wolff**, Strategien der Investitionspolitik in einer Region: Der Fall des Wachstums mit konstanter Sektorstruktur
- 40-93 **Axel A. Weber**, Monetary Policy in Europe: Towards a European Central Bank and One European Currency
- 41-93 **Axel A. Weber**, Exchange Rates, Target Zones and International Trade: The Importance of the Policy Making Framework
- 42-93 **Klaus Schöler** und **Matthias Schlemper**, Oligopolistisches Marktverhalten der Banken
- 43-93 **Andreas Pfingsten** and **Reiner Wolff**, Specific Input in Competitive Equilibria with Decreasing Returns to Scale
- 44-93 **Andreas Pfingsten** and **Reiner Wolff**, Adverse Rybczynski Effects Generated from Scale Diseconomies
- 45-93 **Rüdiger Pethig**, TV-Monopoly, Advertising and Program Quality
- 46-93 **Axel A. Weber**, Testing Long-Run Neutrality: Empirical Evidence for G7-Countries with Special Emphasis on Germany
- 47-94 **Rüdiger Pethig**, Efficient Management of Water Quality
- 48-94 **Klaus Fiedler**, Naturwissenschaftliche Grundlagen natürlicher Selbstreinigungsprozesse in Wasserressourcen
- 49-94 **Rüdiger Pethig**, Noncooperative National Environmental Policies and International Capital Mobility
- 50-94 **Klaus Fiedler**, The Conditions for Ecological Sustainable Development in the Context of a Double-Limited Selfpurification Model of an Aggregate Water Recourse
- 51-95 **Gerhard Brinkmann**, Die Verwendung des Euler-Theorems zum Beweis des Adding-up-Theorems impliziert einen Widerspruch
- 52-95 **Gerhard Brinkmann**, Über öffentliche Güter und über Güter, um deren Gebrauch man nicht rivalisieren kann
- 53-95 **Marlies Klemisch-Ahlert**, International Environmental Negotiations with Compensation or Redistribution
- 54-95 **Walter Buhr** and **Josef Wagner**, Line Integrals In Applied Welfare Economics: A Summary Of Basic Theorems
- 55-95 **Rüdiger Pethig**, Information als Wirtschaftsgut
- 56-95 **Marlies Klemisch-Ahlert**, An Experimental Study on Bargaining Behavior in Economic and Ethical Environments
- 57-96 **Rüdiger Pethig**, Ecological Tax Reform and Efficiency of Taxation: A Public Good Perspective
- 58-96 **Daniel Weinbrenner**, Zur Realisierung einer doppelten Dividende einer ökologischen Steuerreform
- 59-96 **Andreas Wagener**, Corporate Finance, Capital Market Equilibrium, and International Tax Competition with Capital Income Taxes
- 60-97 **Daniel Weinbrenner**, A Comment on the Impact of the Initial Tax Mix on the Dividends of an Environmental Tax Reform
- 61-97 **Rüdiger Pethig**, Emission Tax Revenues in a Growing Economy
- 62-97 **Andreas Wagener**, Pay-as-you-go Pension Systems as Incomplete Social Contracts
- 63-97 **Andreas Wagener**, Strategic Business Taxation when Finance and Portfolio Decisions are Endogenous
- 64-97 **Thomas Steger**, Productive Consumption and Growth in Developing Countries
- 65-98 **Marco Runkel**, Alternative Allokationsmechanismen für ein Rundfunkprogramm bei endogener Programmqualität
- 66-98 **Jürgen Ehlgen**, A Comparison of Solution Methods for Real Business Cycle Models

- 67-98 **Peter Seethaler**, Zum Einfluß von Devisentermingeschäften auf das Marktgleichgewicht bei asymmetrischer Information
- 68-98 **Thomas Christiaans**, A Note on Public Goods: Non-Excludability Implies Joint Consumability
- 69-98 **Michael Gail**, Stylized Facts and International Business Cycles – The German Case
- 70-98 **Thomas Eichner**, The state as social insurer: labour supply and investments in human capital
- 71-98 **Thomas Steger**, Aggregate Economic Growth with Subsistence Consumption
- 72-98 **Andreas Wagener**, Implementing Equal Living Conditions in a Federation
- 73-99 **Thomas Eichner and Rüdiger Pethig**, Product Design and Markets for Recycling, Waste Treatment and Disposal
- 74-99 **Peter Seethaler**, Zum Einfluß des Hedging auf das Kreditvergabeverhalten der Banken
- 75-99 **Thomas Christiaans**, Regional Competition for the Location of New Facilities
- 76-99 **Thomas Eichner and Rüdiger Pethig**, Product Design and Efficient Management of Recycling and Waste Treatment
- 77-99 **Rüdiger Pethig**, On the Future of Environmental Economics
- 78-99 **Marco Runkel**, Product Durability, Solid Waste Management, and Market Structure
- 79-99 **Hagen Bobzin**, Dualities in the Functional Representation of a Production Technology
- 80-99 **Hagen Bobzin**, Behandlung von Totzeitsystemen in der Ökonomik

