

Wolff, Reiner

**Working Paper**

## Strategien der Investitionspolitik in einer Region: Der Fall des Wachstums mit konstanter Sektorstruktur

Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 39-93

**Provided in Cooperation with:**

Fakultät III: Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Universität Siegen

*Suggested Citation:* Wolff, Reiner (1993) : Strategien der Investitionspolitik in einer Region: Der Fall des Wachstums mit konstanter Sektorstruktur, Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 39-93, Universität Siegen, Fakultät III, Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Siegen

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/118734>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

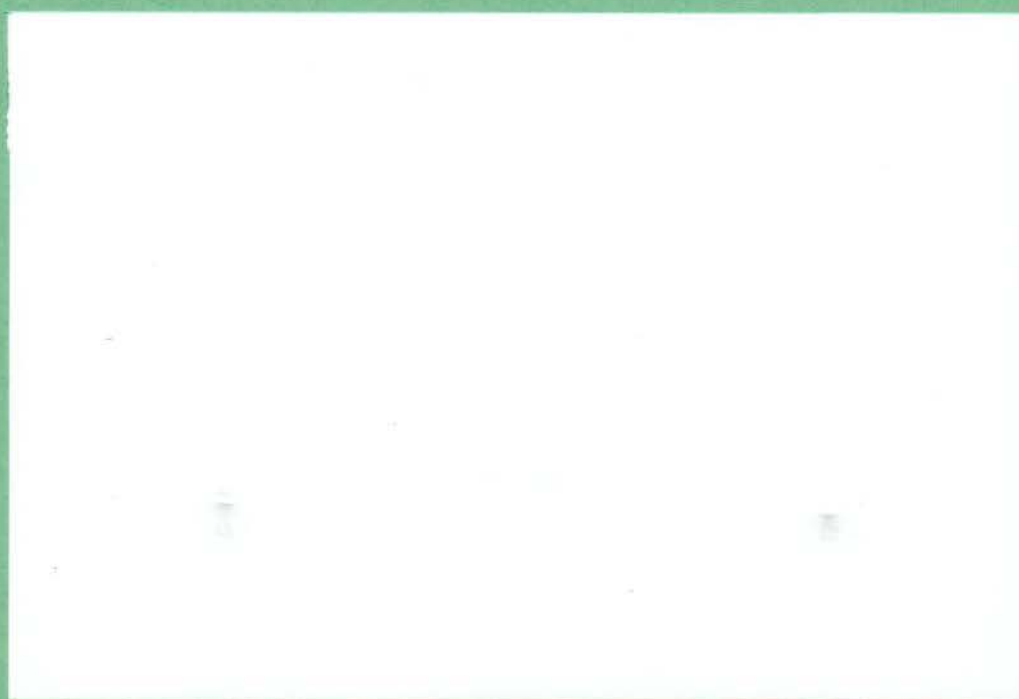
**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

**VOLKSWIRTSCHAFTLICHE  
DISKUSSIONSBEITRÄGE**



**UNIVERSITÄT - GESAMTHOCHSCHULE - SIEGEN  
FACHBEREICH WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN**

**Strategien der Investitionspolitik einer Region:  
Der Fall des Wachstums mit konstanter  
Sektorstruktur**

*Reiner Wolff*

*Fachbereich Wirtschaftswissenschaften  
Universität-GH-Siegen*

Diskussionsbeitrag Nr. 39-93

**Inhalt**

Wir diskutieren das Problem des effizienten Wachstums heterogener Kapitalstöcke in einer regionalen Ökonomie mit substitutionaler Produktionstechnologie und variablen Skalenerträgen. Wir zeigen, daß die Ökonomie einen von Neumannschen Expansionspfad mit Turnpike-Charakter besitzt, wenn ihre Technologie homothetisch und (additiv) separabel hinsichtlich der Input- und Outputvariablen ist. Darüber hinaus weisen wir nach, daß diese Voraussetzungen bei Hicks-neutralem technischen Fortschritt lokal notwendige Bedingungen für die Existenz und die Turnpike-Eigenschaft des von Neumann-Pfades sind.

# 1 Einführung

Die formal-analytische Diskussion von Fragen des regionalen Wirtschaftswachstums unter dem Gesichtspunkt der Effizienz der intertemporalen Faktorallokation reicht bis in die 60er Jahre zurück. Seit dieser Zeit haben sich die kontrolltheoretischen Modelle vom sogenannten Rahman-Typ als eine Art Standard für die Ermittlung von Strategien der Investitionspolitik mehrerer Regionen mit dem Ziel der Maximierung zukünftiger Gesamteinkommen herausgebildet (Rahman [21, 22], Intriligator [15], Takayama [25, 26]). Die optimalen Investitionspläne der sektoral aggregierten Rahman-Modelle besitzen 'bang-bang'-Charakter und sind somit dadurch gekennzeichnet, daß das gemeinsame Investitionsvolumen der einbezogenen Regionen in Zeitintervallen auf jeweils eine Region konzentriert wird. Dabei hängen die Zeitpunkte der Umlenkung der Investitionsströme von einer Region in eine andere von der Höhe der regionalen Investitionsquoten und Kapitalkoeffizienten ab, aber auch vom Stellenwert der Transportkosten im Produktionsprozeß (Domazlicky [6]) und der Art der Modellierung des öffentlichen Sektors (Sakashita [23], Ohtsuki [20], Bagchi/Olsder/Strijbos [2]; vgl. dazu auch Helpman/Pines [14]). Von der Einbeziehung weiterer Wachstumsziele neben der Zielsetzung der Maximierung zukünftiger Einkommen geht ebenfalls ein wesentlicher Einfluß auf die Abfolge aus, in denen die Investitionen den Regionen zugewiesen werden (Michel/Pestieau/Thisse [19], Friesz/Luque [11]). Das gleiche gilt bei einer Flexibilisierung der Kapitalkoeffizienten in den Regionen im Wege der Einführung neoklassischer Technologien (Datta-Chaudhuri [5], Fujita [13, Kap. 6]).

Fujita [12] hat gezeigt, daß im Fall der Produktion mehrerer Güter in den Regionen ein von Neumann-Pfad des gleichschrittigen Wachstums der regionalen Kapitalstöcke mit maximaler Rate existiert, dem die effizienten Wachstumspfade während des größten Teils des Optimierungszeitraumes folgen. Aussagen dieser Form werden allgemein in der Theorie mehrsektoraler Wachstumsmodelle als Turnpike-Theoreme bezeichnet, da dem von Neumannschen Expansionspfad in diesen Theoremen die Rolle einer Schnellstraße des Wachstums zufällt. (Einen Literaturüberblick gibt McKenzie [18].) Diese Ergebnisse beruhen aus der Sicht der mikroökonomischen Produktionstheorie zentral auf der Annahme, daß die Menge der Produktionsmöglichkeiten einer Volkswirtschaft einen konvexen Kegel bildet. Damit ist aber insbesondere die Voraussetzung konstanter Skalenerträge verbunden, die vor allem unter regionalwirtschaftlichen Aspekten theoretisch und empirisch nicht befriedigt.

Daher wollen wir in der vorliegenden Arbeit untersuchen, ob das Konzept des ausgewogenen Wachstums überhaupt eine Richtlinie für die Investitionspolitik schon einer *einzelnen* regionalen Ökonomie (Dorfman [7]) sein kann, wenn diese Ökonomie ihre Outputs unter den Bedingungen nicht-konstanter Skalenerträge herstellt, die als (positive oder negative) Folgen der räumlichen Konzentration der Produktionsaktivitäten auftreten können. Diese Folgen wollen wir im weiteren kurz als Agglomerationseffekte bezeichnen. Da wir uns auf die Analyse der produktionstheoretischen Voraussetzungen des Turnpike-Theorems in einer räumlichen Volkswirtschaft beschränken wollen, werden wir alle übrigen raumspezifischen Faktoren vernachlässigen.

Im einzelnen ist diese Arbeit wie folgt aufgebaut. Wir werden das Modell einer Region mit substitutionaler Produktionstechnologie vorstellen, die ihre Bestände an Realkapital

in einer zukünftigen Periode maximiert (Abschnitt 2). Anhand dieses Modells werden wir sodann den Fall des gleichschrittigen Wachstums der Kapitalstöcke allgemein charakterisieren (Abschnitt 3). Anschließend zeigen wir, daß es einen Turnpike-Expansionspfad der betrachteten Region gibt, wenn ihre Technologie sowohl im Hinblick auf die Inputs und Outputs (additiv) separabel als auch in bezug auf diese Variablen homothetisch ist (Abschnitt 4). Zuletzt weisen wir nach, daß die soeben genannten Bedingungen bei Hicks-neutralem technischen Fortschritt gleichzeitig lokal notwendige Voraussetzungen für die Anwendung des Turnpike-Theorems auf eine regionale Wirtschaft sind (Abschnitt 5). Mit einer kritischen Würdigung der gewonnenen Resultate beschließen wir die Abhandlung (Abschnitt 6).

Wir legen die folgende Notation zugrunde: Elemente des  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , werden wir als Spaltenvektoren oder einfach als Vektoren bezeichnen und zu ihrer Veranschaulichung Kleinbuchstaben in fetter Schrift verwenden. Für die Komponente  $i$  des Vektors  $\mathbf{x}$  schreiben wir einfach  $x_i$ . Entsprechend geben fett gesetzte Großbuchstaben wie zum Beispiel  $\mathbf{A}$  Matrizen mit den Elementen  $a_{ij}$  an. Sei ferner  $f: S \rightarrow T$  eine über  $S \in \mathbb{R}^n$  definierte differenzierbare Funktion mit dem Wertebereich  $T \in \mathbb{R}^n$ . In diesem Fall benutzen wir  $f_{x_i}$  und  $f_{x_i x_j}$  als Abkürzungen für die partiellen und gemischt-partiellen Ableitungen  $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$  und  $\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_i \partial x_j$  und weiter  $f_{\mathbf{x}}$  als Abkürzung für den Gradienten  $\nabla f(\mathbf{x})$ . Totale Differentiation nach der 'Zeit' machen wir durch einen Punkt '.' kenntlich, und das Superskript 'T' zeigt die Transponierung eines Vektors oder einer Matrix an. Für den Nullvektor mit jeweils geeigneter Länge reservieren wir das Symbol  $\mathbf{o}$ .

## 2 Das neoklassische Grundmodell

Wir betrachten zunächst das Modell einer regionalen Volkswirtschaft, die ihren Output mit Hilfe von  $n$  ( $> 1$ ) heterogenen Kapitalstöcken  $\mathbf{k}^T := (k_1 \dots k_n)$  erzeugt. Dieser Output wird vollständig für die Kapitalbildung herangezogen und besteht aus Einheiten  $n$  verschiedener Netto-Investitionen  $\dot{\mathbf{k}}^T := (\dot{k}_1 \dots \dot{k}_n)$ .<sup>1</sup> Die Produktionstechnologie der Volkswirtschaft läßt sich in jeder Periode  $t$  durch eine Transformations-Randfunktion der Form

$$T(\mathbf{k}, \dot{\mathbf{k}}, t) = 0 \quad (1)$$

beschreiben, in der die Zeitvariable  $t$  den exogenen technischen Fortschritt repräsentiert. Die Funktion  $T(\cdot)$  soll die folgenden Eigenschaften haben:

- (P1) Sie ist über ihrem Definitionsbereich  $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  stetig differenzierbar.
- (P2) Sie besitzt nicht verschwindende partielle Ableitungen und Kreuzableitungen zweiter Ordnung in bezug auf die Komponenten von  $\mathbf{k}$ . Eine entsprechende Annahme gilt für  $\dot{\mathbf{k}}$ .
- (P3) Sie ist steigend in  $\mathbf{k}$  und fallend in  $\dot{\mathbf{k}}$ .

<sup>1</sup>Zur Vereinfachung der Darlegungen werden wir nachfolgend nicht zwischen Brutto- und Netto-Investitionen unterscheiden. Erstere können modelliert werden, indem man anstelle von  $\dot{\mathbf{k}}$  den Ausdruck  $\dot{\mathbf{k}} + \text{diag}(\mathbf{d})\mathbf{k}$  ansetzt, worin  $\mathbf{d}$  den Vektor der (konstanten) Abschreibungsraten angibt.

(P4) Sie ist jeweils streng quasi-konkav im Hinblick auf  $k$  und  $\dot{k}$ .

(P5) Alle Kapitalstöcke genügen den Inada-Regularitätsbedingungen  $\lim_{k_i \rightarrow 0} T_{k_i} = \infty$  und  $\lim_{k_i \rightarrow \infty} T_{k_i} = 0$ .

Dadurch wird eine neoklassische Produktionstechnologie definiert, die die üblichen Merkmale fallender Grenzzraten der Substitution zwischen den Kapitalstöcken und steigender Grenzzraten der Transformation zwischen den produzierten Investitionsgütern aufweist. Allerdings beinhalten die genannten Eigenschaften keine Annahme über die Entwicklung der Skalenerträge im Produktionsprozeß. Somit ist insbesondere denkbar, daß die Skalenerträge im Zeitablauf aufgrund von Agglomerationseffekten variieren. Daher beschreibt (1) den Rand einer in ihren Input- und Outputzweigen jeweils konvexen, aber nicht notwendig global konvexen Technologie, für die Lau [17] den Begriff der bikonvexen Technologie in die Literatur eingeführt hat. Wir werden die Funktion  $T(k, \dot{k}, t)$  im weiteren einfach als die *Transformationsfunktion* der betrachteten Volkswirtschaft bezeichnen.

Wir wollen nun annehmen, daß die Volkswirtschaft das Ziel verfolgt, in einem endlichen und abgeschlossenen Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  eine positive Linearkombination der Endniveaus der Kapitalstöcke  $k(t_1)$  bei gegebener Anfangsausstattung  $k_0$  zu maximieren:

$$\max_{k(t), t \in [t_0, t_1]} p^T k(t_1) \quad (2)$$

$$\text{mit } T(k, \dot{k}, t) = 0 \quad \text{und} \quad k(t_0) = k_0.$$

Darin kann  $p$  ökonomisch als ein Vektor (diskontierter) Kapitalgüterpreise interpretiert werden, der für die Periode  $t_1$  erwartet wird. In diesem Fall liegt ein klassisches Investitionsproblem vor: Die Volkswirtschaft ist bestrebt, den erwarteten Gegenwartswert ihrer Kapitalstöcke mit Hilfe einer gegebenen Technologie und gegebener Anfangsbestände zu maximieren.

Analytisch handelt es sich bei der formulierten dynamischen Optimierungsaufgabe um ein Mayersches Variationsproblem. Wir unterstellen, daß dieses Problem eine innere Lösung in der Klasse der nicht-negativen und zweifach differenzierbaren Funktionen  $k(t)$  für  $t \in [t_0, t_1]$  besitzt und daß für mindestens einen Kapitalstock  $i$  die Ungleichung  $k_i(t_1) > k_i(t_0)$  zutrifft. Da ferner die Funktion  $T(\cdot)$  nach Voraussetzung quasi-konkav in  $k$  ist, wird die Legendre-Bedingung für ein Maximum von  $p^T k(t_1)$  global erfüllt. Somit ist die Eindeutigkeit der angenommenen Lösung gewährleistet (vgl. Kamien/Schwartz [16]).

### 3 Eine Charakterisierung stationärer Kapitalstrukturen

Aus der Literatur ist bekannt, daß die optimalen Wachstumspfade  $k(t)$  die sogenannten Eigenzinssatzgleichungen der Theorie des optimalen Wachstums befriedigen, die wiederum äquivalent zu den Eulerschen Gleichungen des Optimierungsproblems (2) sind:

PROPOSITION 1: Ist  $k(t)$  eine Lösung der Optimierungsaufgabe (2), so gilt

$$\frac{T_{k_i}}{T_{\dot{k}_i}} = \frac{T_{k_n}}{T_{\dot{k}_n}} + \frac{d}{dt} \log\left(\frac{T_{k_i}}{T_{\dot{k}_n}}\right) \quad \text{für alle } i \neq n. \quad (3)$$

BEWEIS: Vgl. Wan, Jr. [27, S. 277-278].

Die Gestalt der optimalen Wachstumspfade  $k(t)$  wird durch die somit vorliegenden  $n - 1$  Differentialgleichungen (3) unter Berücksichtigung der Randbedingungen und der Technologie-Restriktion (1) vollständig determiniert. Wir werden im weiteren  $k_n > 0$  für alle  $t \in [t_0, t_1]$  annehmen. Ferner sei  $s^T := (k_1/k_n \dots k_{n-1}/k_n)$ . Der uns interessierende Fall des effizienten gleichgewichtigen (im Sinne eines gleichschrittigen) Wachstums der Kapitalstöcke läßt sich dann in der Form  $k(t) = k_n(t)(\bar{s}^{*T}, 1)^T$  angeben, worin  $\bar{s}^*$  für einen Vektor von  $n - 1$  positiven Konstanten steht. Eine solche Lösung kann dann wie folgt charakterisiert werden:

**PROPOSITION 2:** *Jeder Strahl  $\bar{s}^*$  des effizienten gleichgewichtigen Wachstums der Kapitalstöcke mit den Raten  $w(t) (> 0)$  genügt den Bedingungen*

$$-\frac{T_{k_1}}{T_{\dot{k}_1}} = \dots = -\frac{T_{k_n}}{T_{\dot{k}_n}} = w + \frac{\dot{w}}{w} - \Theta(t), \quad (4)$$

in denen  $\Theta(t)$  die relative Änderung der gemeinsamen Wachstumsrate  $w$  durch technischen Fortschritt wiedergibt.

BEWEIS: Wir beachten, daß  $\dot{k} = w k$  entlang  $\bar{s}^*$  und folglich  $T(k, w k, t) = 0$ . Da  $T(\cdot)$  fallend in  $\dot{k}$  ist, können wir nach  $w$  als Funktion von  $k$  und  $t$  auflösen:  $w = f(k, t)$ . Somit erhalten wir wegen  $k = k_n(\bar{s}^{*T}, 1)^T$  den Ausdruck  $w = f(k_n \bar{s}^*, k_n, t)$ . Wir beachten weiterhin, daß ein gegebener Expansionspfad  $s$  nur dann effizient sein kann, wenn es sich zu keiner Zeit im Verlaufe des Wachstumsprozesses lohnt, den Pfad zu verlassen. Mit anderen Worten: Jeder effiziente Strahl  $\bar{s}^*$  weist stets in die Richtung des maximalen Anstiegs der Expansionsrate  $w$  (beziehungweise in die Richtung ihrer minimal möglichen Reduktion). Daher können wir entlang  $\bar{s}^*$  den Umhüllenden-Satz anwenden:

$$-\frac{T_{k_n}}{T_{\dot{k}_n}} = \frac{\partial \dot{k}_n}{\partial k_n} = \frac{\partial (w k_n)}{\partial k_n} = \sum_{i=1}^{n-1} f_{k_i} \bar{s}_i^* k_n + f_{k_n} k_n + w = \sum_{i=1}^n f_{k_i} k_i + w. \quad (5)$$

Analoge Relationen müssen für die übrigen Kapitalstöcke gelten, da der Index  $n$  jedem beliebigen Kapitalstock zugeordnet werden kann. Zuletzt ermittelt man durch totale Differentiation der Funktion  $f(\cdot)$  nach  $t$ :

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^n f_{k_i} \dot{k}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = w \left( \sum_{i=1}^n f_{k_i} k_i + \frac{1}{w} \frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (6)$$

Wir definieren nun  $\Theta(t) := \frac{1}{w} \frac{\partial f}{\partial t}$  und lösen nach dem Summenterm im rechten Klammerausdruck von (6) auf. Einsetzen in (5) bestätigt dann die in Proposition 2 aufgestellte Behauptung.  $\square$

Proposition 2 impliziert insbesondere, daß die Grenzrate der Substitution zwischen zwei beliebigen Kapitalstöcken entlang  $\bar{s}^*$  mit der Grenzrate der Transformation zwischen den zugehörigen Investitionen übereinstimmt. (Man beachte die ersten  $n - 1$  Gleichheitszeichen in (4) und forme um.) Die Transformationsraten wiederum stellen sich als



Konstanten ein, da der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (3) aufgrund der Gleichungen (4) zu Null wird. Dadurch wird eine invariante Beziehung zwischen  $\bar{s}^*$  und den volkswirtschaftlichen Grenzzraten der Substitution und der Transformation begründet. Somit erhalten wir

**KOROLLAR 1:** *Entlang eines Strahls  $\bar{s}^*$  des effizienten gleichschrittigen Wachstums der Kapitalstöcke stimmen die volkswirtschaftlichen marginalen Substitutionsraten und zugehörigen Transformationsraten überein:*

$$\frac{T_{k_i}}{T_{k_n}} = \frac{T_{\dot{k}_i}}{T_{\dot{k}_n}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{T_{k_i}}{T_{k_n}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{T_{\dot{k}_i}}{T_{\dot{k}_n}} \right) = 0 \quad \text{für alle } i \neq n. \quad (7)$$

Wir wollen nun für einen Moment annehmen, daß die Transformationsfunktion  $T(\cdot)$  sowohl zeitunabhängig als auch homogen vom Grade Eins in bezug auf  $k$  und  $\dot{k}$  ist. Das ist der Fall einer stationären Technologie mit konstanten Skalenerträgen, den zuerst Dorfman/Samuelson/Solow [8, Kap. 12] untersucht haben. In diesem Fall ist  $\Theta(t) \equiv \dot{w}(t) \equiv 0$  und wir können schließen, daß die Grenzzraten der Substitution und Transformation zwischen Inputs und Outputs entlang  $\bar{s}^*$  konstant bleiben. Die Bedingungen (7) konstituieren dann als  $\bar{s}^*$  den von Neumann-Pfad des gleichschrittigen exponentiellen Wachstums der betrachteten Volkswirtschaft mit maximaler Rate. Von diesem Pfad ist bekannt, daß er die Eigenschaften eines Sattelpunktes besitzt und daher ein Turnpike für solche Wachstumspfade  $k(t)$  ist, die nicht entlang dem Strahl  $\bar{s}^*$  starten oder enden.

Allerdings werden in anderen Fällen von Technologien die Quotienten  $T_{k_i}/T_{k_n}$  und  $T_{\dot{k}_i}/T_{\dot{k}_n}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) in der Regel sowohl von der 'Zeitvariablen'  $t$  abhängen (infolge technischen Fortschritts) als auch vom 'Niveau'  $k_n$  der ökonomischen Aktivitäten (infolge variabler Skalenerträge). Daher werden sie selbst dann im Zeitablauf steigen oder fallen, wenn die Struktur des volkswirtschaftlichen Kapitalstocks unverändert bleibt. In diesen Fällen wird es keinen Pfad des gleichschrittigen Wachstums geben, der als effizient im Sinne der Bedingungen (3) gelten kann. Mit anderen Worten: Das Turnpike-Theorem gilt nicht ohne weiteres für eine regionale Volkswirtschaft mit zeitabhängiger Technologie und variablen Skalenerträgen.

Das bedeutet, daß in einer regionalen Wirtschaft die Existenz eines Turnpike-Pfades des gleichschrittigen Wachstums der Kapitalstöcke mit variabler Rate zusätzliche Annahmen über die Produktionstechnologie erfordert. Damit stellt sich insbesondere die Frage nach funktionalen Formen der Transformationsfunktion  $T(\cdot)$ , die mit (7) vereinbar sind.

## 4 Separable Produktionstechnologien

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt darauf hingewiesen, daß in einer regionalen Volkswirtschaft ein Turnpike-Wachstumspfad nicht ohne weiteres existiert. Dafür sind neben dem technischen Fortschritt vor allem Agglomerationseffekte verantwortlich, die sich im Produktionsprozeß in variablen Skalenerträgen niederschlagen und auf diesem Wege die Grenzzraten der Faktorsubstitution und Outputtransformation beeinflussen. Daher fordern wir nun, daß die Technologie der betrachteten Volkswirtschaft weitergehenden Voraussetzungen genügt. Die erste Voraussetzung betrifft den technischen Fortschritt:



(P6) Der technische Fortschritt ist Hicks-neutral.

Ferner wollen wir annehmen, daß die Technologie unabhängige Input- und Outputzweige besitzt. Insbesondere soll gelten:

(P7)  $T(\cdot)$  ist sowohl (additiv) separabel als auch homothetisch mit Bezug zu  $\mathbf{k}$  auf der einen Seite und  $\dot{\mathbf{k}}$  auf der anderen Seite.

(Man beachte, daß (P6) durch (P7) impliziert wird.) Diese Annahmen sind hinreichend für die Konstanz der Substitutions- und Transformationsraten  $T_{k_i}/T_{k_n}$  und  $T_{\dot{k}_i}/T_{\dot{k}_n}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) entlang beliebiger Expansionspfade  $\bar{s}$ . Damit können wir nun die folgende theoretische Aussage formulieren:

**THEOREM 1:** *Wenn die Transformationsfunktion (1) die Gestalt*

$$T(\mathbf{k}, \dot{\mathbf{k}}, t) = J(G(\mathbf{k}), t) - H(\dot{\mathbf{k}}) \quad (8)$$

mit linear-homogenen Funktionen  $G(\cdot)$  und  $H(\cdot)$  annimmt, dann gibt es einen eindeutigen Vektor von positiven Konstanten  $\bar{s}^*$  mit der folgenden Eigenschaft: Er konstituiert

1. einen Expansionspfad mit globalem Turnpike-Charakter für  $n = 2$ , und zwar im Hinblick auf alle optimalen Investitionsstrategien, die im gesamten Intervall  $[t_0, t_1]$  der Ungleichung  $\dot{k}_2/k_2 > 0$  genügen, so daß mindestens ein (geeignet indizierter) Kapitalstock kontinuierlich steigt.
2. einen Expansionspfad mit lokalem Turnpike-Charakter für beliebiges  $n (\geq 2)$ .

**BEWEIS:** Die Existenz und Eindeutigkeit eines effizienten Expansionspfades  $\bar{s}^*$  gehen unmittelbar aus unserer Diskussion im Zusammenhang mit Korollar 1 und den Annahmen (P1)-(P4) hervor. Darüber hinaus ist aufgrund der Annahme (P5) gewährleistet, daß alle Komponenten des Vektors  $\bar{s}^*$  streng positiv sind. Damit bleibt lediglich zu zeigen, daß dieser Vektor die Merkmale eines Sattelpunktes besitzt.

1. Teil:  $n = 2$ ,  $\dot{k}_2/k_2 > 0$ . In diesem Fall reduziert sich der Vektor  $\mathbf{s}$  auf ein Skalar  $s$ . Wir definieren nun  $u := T_{k_1}/T_{k_2} = G_{k_1}/G_{k_2} =: a(s)$  sowie  $v := T_{\dot{k}_1}/T_{\dot{k}_2} = H_{\dot{k}_1}/H_{\dot{k}_2} =: b(\dot{k}_1/\dot{k}_2)$ . Weiter sei  $\bar{u}^* := a(\bar{s}^*)$  und  $\bar{v}^* := b(\bar{s}^*)$ . Da aufgrund der angenommenen Quasi-Konkavität der Transformationsfunktion in  $\mathbf{k}$  und  $\dot{\mathbf{k}}$  (P4) eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen der stationären Kapitalstruktur  $\bar{s}^*$  und den zugehörigen Substitutions- und Transformationsraten  $\bar{u}^*$  und  $\bar{v}^*$  besteht, können wir den Nachweis der (globalen) Turnpike-Eigenschaft von  $\bar{s}^*$  indirekt führen, indem wir stattdessen bestätigen, daß der Punkt  $(\bar{u}^*, \bar{v}^*)$  ein (globaler) Sattelpunkt ist.

Zu diesem Zweck ermitteln wir in einem ersten Schritt zunächst aus  $u = a(s)$  und  $s = k_1/k_2$  im Wege der Differentiation:

$$\dot{u} = a' \dot{s} = a' \frac{\dot{k}_1 k_2 - k_1 \dot{k}_2}{k_2^2} = w_2(t) a' \left( \frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2} - s \right). \quad (9)$$

Darin ist  $w_2(t) := \dot{k}_2/k_2$ . Ferner dürfen wir wiederum aufgrund der Modellannahme (P4)  $a', b' \neq 0$  voraussetzen und deshalb die Größen  $\dot{k}_1/k_2$  und  $s$  über die Umkehrfunktionen  $b^{-1}(v)$  und  $a^{-1}(u)$  ausdrücken:

$$\dot{u} = w_2(t) a' [b^{-1}(v) - a^{-1}(u)]. \quad (10)$$

Im zweiten Schritt setzen wir die Variablen  $u$  und  $v$  in die Optimumbedingung (3) ein und beachten die Differentiationsregel  $d \log(\cdot)/dt = (\cdot)^{-1} d(\cdot)/dt$ . Einfache Umformung ergibt dann:

$$\dot{v} = \lambda(t) (u - v) \quad (11)$$

mit  $\lambda(t) = T_{k_2}(k(t), \dot{k}(t), t) / T_{\dot{k}_2}(k(t), \dot{k}(t), t) < 0$ . Die somit gewonnenen Relationen (10) und (11) bilden ein System zweier nichtlinearer und explizit zeitabhängiger Differentialgleichungen erster Ordnung in den Variablen  $u$  und  $v$ . Der Punkt  $(\bar{u}^*, \bar{v}^*)$  mit  $a^{-1}(\bar{u}^*) = b^{-1}(\bar{v}^*)$  und  $\bar{u}^* = \bar{v}^*$  stellt eine stationäre Lösung dieser Differentialgleichungen dar.

An dieser Stelle ist nun zu beachten, daß aufgrund der Annahmen (P3) und (P4)  $a(\cdot)$  eine fallende Funktion von  $s$  und  $b(\cdot)$  eine steigende Funktion von  $\dot{k}_1/\dot{k}_2$  ist. Folglich ist  $a' < 0$ . Ferner sind die Umkehrfunktionen  $a^{-1}(\cdot)$  und  $b^{-1}(\cdot)$  fallend in  $u$  beziehungsweise steigend in  $v$ . Somit stellt der Ausdruck  $b^{-1}(v) - a^{-1}(u) = 0$  eine inverse Beziehung zwischen den Variablen  $u$  und  $v$  her. Da nun aber nach Voraussetzung  $w_2(t) > 0$  gilt, erhalten wir

$$\dot{u} \begin{cases} > 0 & \text{für } b^{-1}(v) < a^{-1}(u) \\ = 0 & \text{für } b^{-1}(v) = a^{-1}(u) \\ < 0 & \text{für } b^{-1}(v) > a^{-1}(u) \end{cases}, \quad \dot{v} \begin{cases} > 0 & \text{für } u < v \\ = 0 & \text{für } u = v \\ < 0 & \text{für } u > v \end{cases}. \quad (12)$$

Diesen Beziehungen entspricht im Phasendiagramm das Strömungsbild eines Sattelpunktes. Damit ist der Beweis des ersten Teiles von Theorem 1 abgeschlossen.  $\square$

Bevor wir den noch ausstehenden Teil unseres Theorems beweisen, wollen wir kurz auf eine interessante Implikation der bisherigen Diskussion für die Konstellation  $n > 2$  hinweisen. Diese Implikation betrifft den Spezialfall, daß  $G(\cdot)$  und  $H(\cdot)$  additive Funktionen vom ACMS-Typ mit konstanter Substitutions- und Transformationselastizität sind. Die Quotienten  $T_{k_i}/T_{k_n}$  und  $T_{\dot{k}_i}/T_{\dot{k}_n}$  hängen dann nur von den Größen  $s_i$  und  $\dot{k}_i/\dot{k}_n$  ab, so daß  $n - 1$  voneinander unabhängige Gleichungssysteme vom Typ (10)-(11) entstehen. Damit können wir festhalten:

**KOROLLAR 2:** *Wenn die Funktionen  $G(\cdot)$  und  $H(\cdot)$  vom ACMS-Typ sind, ist der Expansionspfad  $\bar{s}^*$  unabhängig von  $n$  ein globaler Turnpike-Pfad für alle optimalen Investitionsstrategien, die im gesamten Intervall  $[t_0, t_1]$  der Bedingung  $\dot{k}_n/k_n > 0$  genügen, also gewährleisten, daß mindestens ein (mit  $n$  geeignet indizierter) Kapitalstock stetig wächst.*

2. Teil:  $n (\geq 2)$  beliebig. An die Stelle der Skalare  $u$  und  $v$  treten nun Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  der Länge  $n - 1$ . Entsprechend ersetzen wir  $a(s)$  und  $b(\dot{k}_1/\dot{k}_2)$  durch vektorwertige Funktionen  $\mathbf{a}(\mathbf{s})$  und  $\mathbf{b}(\dot{k}_1/\dot{k}_n, \dots, \dot{k}_{n-1}/\dot{k}_n)$ . Das Gleichungssystem (10)-(11) geht dann in

$$\dot{\mathbf{u}} = w_n(t) \mathbf{A} [\mathbf{b}^{-1}(\mathbf{v}) - \mathbf{a}^{-1}(\mathbf{u})], \quad \dot{\mathbf{v}} = \lambda(t) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (13)$$

mit entsprechend definierten  $w_n(t)$  und  $\lambda(t)$  und der (regulären) Jacobi-Matrix  $\mathbf{A}$  der Funktionen  $\mathbf{a}(\cdot)$  über. Wir können jetzt im allgemeinen keine globalen Resultate mehr erwarten und beschränken uns deshalb auf eine lokale Analyse der Sattelpunkteigenschaft der stationären Lösung  $(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{\mathbf{v}}^*)$ . Dies geschieht, indem wir die Gleichungen (13) durch eine Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung in der Umgebung dieses Punktes approximieren. Dabei beachten wir die Beziehungen  $\dot{\bar{\mathbf{u}}}^* \equiv \dot{\bar{\mathbf{v}}}^* \equiv \mathbf{o}$  und  $\mathbf{b}^{-1}(\bar{\mathbf{v}}^*) = \mathbf{a}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}^*)$  und nähern die Wachstumsrate  $w_n(t)$  durch  $w(t)$  an. Darüber hinaus berücksichtigen wir den Tatbestand, daß das Produkt der Jacobi-Matrizen von  $\mathbf{a}(\cdot)$  und  $\mathbf{a}^{-1}(\cdot)$  die Einheitsmatrix ergibt. Wir gelangen dann zu einem System von  $2(n-1)$  linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zeitabhängigen Koeffizienten:

$$\dot{\mathbf{x}} = w(t)(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \lambda(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (14)$$

Darin stehen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  für die Abweichungen  $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^*$  und  $\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}^*$ , und die Matrix  $\mathbf{B}$  ist die (reguläre) Jacobi-Matrix von  $\mathbf{b}(\cdot)$ . Der stationären Lösung  $(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{\mathbf{v}}^*)$  von (13) entspricht jetzt der stationäre Punkt  $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*) = (\mathbf{o}, \mathbf{o})$  des linearisierten Systems (14).

An dieser Stelle ist der Hinweis wichtig, daß  $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*) = (\mathbf{o}, \mathbf{o})$  auch ein stationärer Punkt des autonomen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad (15)$$

ist. Dieser Tatbestand erweist sich insbesondere aus dem folgenden Grund als hilfreich:

**LEMMA 1:** *Wenn  $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*) = (\mathbf{o}, \mathbf{o})$  ein Sattelpunkt der autonomen Gleichungen (15) ist, dann ist er auch ein Sattelpunkt des zeitabhängigen Systems (14).*

**BEWEIS:** Siehe Appendix.

Das zu (15) gehörende charakteristische Polynom lautet:

$$|\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} - (1 - \eta^2)\mathbf{I}| = 0. \quad (16)$$

Für dessen Wurzeln gilt nun wegen (P3)-(P4):

**LEMMA 2:** *Wenn  $\eta$  eine Wurzel von (16) ist, dann ist auch  $-\eta$  eine Wurzel von (16). Beide Wurzeln sind reell und ungleich Null.*

**BEWEIS:** Siehe Appendix.

Damit haben wir gezeigt, daß die Wurzeln des charakteristischen Polynoms (16) reell und von Null verschieden sind und ferner in Paaren betragsmäßig gleicher Wurzeln mit unterschiedlichen Vorzeichen auftreten. Daher ist  $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*) = (\mathbf{o}, \mathbf{o})$  ein symmetrischer Sattelpunkt von (15) und somit wegen Lemma 1 auch ein Sattelpunkt von (14). Das bedeutet aber wiederum, daß  $(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{\mathbf{v}}^*)$  die Eigenschaft eines lokalen Sattelpunktes für das Ausgangssystem (13) besitzt. Aufgrund der umkehrbar eindeutigen Beziehung zwischen  $(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{\mathbf{v}}^*)$  und  $\bar{\mathbf{s}}^*$  können wir zuletzt auch auf den (lokalen) Turnpike-Charakter des Expansionspfades  $\bar{\mathbf{s}}^*$  schließen und die Beweisführung beenden.  $\square$

## 5 Lokale Abbildungen regionaler Turnpike-Technologien

Im letzten Abschnitt haben wir *hinreichende* Bedingungen für die Gültigkeit des Turnpike-Theorems in einer regionalen Volkswirtschaft angegeben. Den ökonomischen Kern dieser Bedingungen bildet die gewählte Beschreibung der Produktionstechnologie in der Form (8). Damit stellt sich sofort die Frage, ob es noch andere funktionale Formen der Transformationsfunktion gibt, die bei variablen Skalenerträgen zu vergleichbaren Resultaten führen. Noch weiter gedacht: Können wir *notwendige* Anforderungen an die Transformationsfunktion einer regionalen Ökonomie formulieren? Dieser Frage wollen wir uns nun unter zwei einschränkenden Voraussetzungen zuwenden. Zunächst einmal wollen wir uns nur mit solchen Anforderungen befassen, die in der Umgebung eines Expansionsstrahls  $\bar{s}^*$  erfüllt sein müssen. Diese Einschränkung liegt insofern nahe, als das Turnpike-Theorem in der Regel ebenfalls nur eine lokale Stabilitätsaussage beinhaltet. Daneben wollen wir zur Vereinfachung a priori unterstellen, daß der technische Fortschritt neutral sowohl im Hinblick auf die Faktorsubstitution als auch hinsichtlich der Outputtransformation ist. Wir gelangen dann zu folgendem Ergebnis:

**THEOREM 2:** *Wenn ein Turnpike-Pfad  $\bar{s}^*$  existiert und entlang diesem Pfad alle Substitutions- und Transformationsraten zwischen den Inputs beziehungsweise Outputs von der Zeitvariablen  $t$  unabhängig sind, dann kann man die Produktionstechnologie lokal durch eine Randfunktion der Form (8) abbilden.*

**BEWEIS:** Wir definieren zunächst  $\tilde{T}(k_n, \dot{k}, t) := T(k_n \bar{s}^*, k_n, \dot{k}, t) = 0$ . Da  $\tilde{T}(\cdot)$  eine steigende Funktion von  $k_n$  ist, läßt sie sich nach dieser Variablen in Abhängigkeit von  $\dot{k}$  und  $t$  auflösen:  $k_n = \tilde{F}(\dot{k}, t)$ . Nach Voraussetzung hängt nun aber keine der Transformationsraten zwischen den Outputs von  $t$  ab. Daher folgt wegen (7) und der Quasi-Konkavität von  $T(\cdot)$  in bezug auf  $\dot{k}$ , daß  $\tilde{F}(\cdot)$  eine homothetische und quasi-konvexe Funktion von  $\dot{k}$  ist. (Vgl. Färe [9] und [10, S. 49-61]; siehe auch Shephard [24].) Somit gilt  $k_n = F(H(\dot{k}), t) = F(w H(\dot{k}), t)$ , worin  $H(\cdot)$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit als linear-homogen angenommen werden darf. Mithin erhält man durch Multiplikation beider Seiten der in Abschnitt 3 eingeführten Funktion  $w = f(k, t)$  mit  $H(\dot{k})$  den Ausdruck

$$w H(\dot{k}) = H(\dot{k}) = f(k, t) H(\dot{k}) =: \tilde{J}(\dot{k}, t). \quad (17)$$

Er separiert  $T(\cdot)$  in einen homothetischen und quasi-konvexen Outputzweig  $H(\cdot)$  und einen verbleibenden Inputzweig  $\tilde{J}(\cdot)$ . An dieser Stelle beachten wir, daß die Gradienten der Funktionen  $H_{\dot{k}}$  und  $\tilde{J}_{\dot{k}}$  wegen (7) stets in die gleiche Richtung weisen. Weiter stellen wir in Rechnung, daß der technische Fortschritt neutral in bezug auf die Faktorsubstitution sein soll und daß  $T(\cdot)$  quasi-konkav in  $\dot{k}$  ist. Demnach muß  $\tilde{J}(\cdot)$  sowohl homothetisch als auch quasi-konkav in  $\dot{k}$  sein:  $\tilde{J}(\dot{k}, t) = J(G(\dot{k}), t)$ . Folglich erhalten wir aus (17) eine hinsichtlich der Vektoren  $\dot{k}$  und  $\dot{k}$  quasi-konkave Abbildungsvorschrift der Form

$$T(\dot{k}, \dot{k}, t) = J(G(\dot{k}), t) - H(\dot{k}) \quad (18)$$

mit linear-homogenen Funktionen  $H(\cdot)$  und  $G(\cdot)$ . Dieses Resultat entspricht der aufgestellten Behauptung.  $\square$

## 6 Kritische Würdigung aus regionalökonomischer Sicht

Unsere Analyse hat zwei wesentliche Ergebnisse hervorgebracht. Wir haben gezeigt, daß das Turnpike-Theorem auch für den Fall einer regionalen Akkumulationswirtschaft mit einer zeitabhängigen bikonvexen Produktionstechnologie und variablen Skalenerträgen gilt, wenn diese Technologie (additiv) trennbar und homothetisch in bezug auf die Kapitalstöcke und Investitionen ist. Ferner haben wir gesehen, daß diese Eigenschaften gleichzeitig lokal notwendige Voraussetzungen für die Gültigkeit der Turnpike-Aussage ist, sobald der technische Fortschritt den Kriterien der Hicks-Neutralität genügt. Im Hinblick auf eine ökonomische Bewertung dieser Resultate rücken zwei Aspekte in den Vordergrund.

Zunächst einmal sollten wir darauf hinweisen, daß wir die Zeitvariable  $t$  in der Transformationsfunktion der betrachteten Ökonomie inhaltlich weitergehender interpretieren dürfen als bisher geschehen. Diese Variable kann nämlich neben dem exogenen technischen Fortschritt auch andere im Zeitablauf gegebene ökonomische Größen wie zum Beispiel Arbeitsinputs und Konsumoutputs repräsentieren. Davon bleiben unsere Theoreme solange qualitativ unberührt, wie solche Größen sich in einer entsprechend erweiterten Transformationsfunktion von den Kapitalstöcken und Investitionen separieren lassen. Dabei ist völlig unerheblich, aus welchem Entscheidungsprozeß die zeitlichen Entwicklungspfade der zusätzlichen ökonomischen Variablen hervorgegangen sind. Insbesondere wäre denkbar und zulässig, daß diese Pfade optimale Pfade im Sinne eines umfassenderen intertemporalen Nutzenkriteriums sind.

Dieser Tatbestand macht einmal mehr deutlich, daß die Annahme der Separabilität im allgemeinen starke Implikationen für die Struktur der Lösung eines ökonomischen Modells nach sich zieht. Unter anderem deshalb hat diese Annahme in der angewandten Ökonomik seit jeher einen großen Stellenwert. Allerdings haben wir uns in der vorliegenden Arbeit nicht mit der schwierigen Frage nach der Existenz von Aggregatorfunktionen wie  $G(\cdot)$  und  $H(\cdot)$  befassen können. (Wir verweisen den interessierten Leser auf Blackorby/Schworm [3].) Jedenfalls scheint es sich aus dem Blickwinkel der mikroökonomischen Aggregationstheorie bei der durch (8) repräsentierten Produktionstechnologie um eine recht spezielle Technologie zu handeln. Insoweit ist die vorliegende Arbeit eher ernüchternd: Das Konzept der gleichschrittigen Ausweitung der ökonomischen Aktivitäten einer arbeitsteiligen regionalen Volkswirtschaft mit signifikanten Agglomerationseffekten erscheint unter dem Gesichtspunkt der intertemporalen Allokationseffizienz als eine eher suboptimale Strategie des wirtschaftlichen Wachstums.

### Appendix: Beweise der Lemmata 1-2

**BEWEIS VON LEMMA 1:** Wir betrachten im  $(x, y)$ -Raum die durch (14) beziehungsweise (15) implizit definierten Phasentrajektorien. Wegen  $w(t) > 0$  und  $\lambda(t) < 0$  stimmt die Menge  $S = \{(x, y) \mid \dot{x} = 0 \text{ oder } \dot{y} = 0\}$  in beiden dynamischen Systemen überein. Aus dem gleichen Grund gilt für alle anderen Punkte  $(x, y) \notin S$ , daß die Vorzeichen von  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  sich nicht ändern, wenn wir von (15) zu (14) wechseln. Somit bleibt die topologische Struktur des (mehrdimensionalen) Strömungsdiagramms erhalten.  $\square$

**BEWEIS VON LEMMA 2:** Die erste Aussage dieses Satzes resultiert unmittelbar aus dem Tatbestand, daß  $\eta$  quadratisch in (16) auftritt. Für die Bestätigung der zweiten Aussage sind weitergehende Überlegungen erforderlich. Deshalb halten wir zunächst fest, daß die Matrix  $A$ , deren Komponenten wir in der Form  $a_{ij} = \partial a_i / \partial s_j = k_n \partial(G_{k_i}/G_{k_n})/\partial k_j = -k_n (\partial^2 k_n / \partial k_i \partial k_j)$  schreiben können, der Hesse-Matrix der Isoquantenfunktion für den Kapitalstock  $k_n$  in bezug auf  $k_1, \dots, k_{n-1}$  negativ proportional und somit wegen (P3)-(P4) streng negativ definit ist. Entsprechend können wir argumentieren, daß die Matrix  $B$  und mithin auch  $B^{-1}$  streng positiv definit ist.

Der angestrebte Beweis ließe sich nun im Prinzip indirekt mit Hilfe eines Satzes von Arrow [1, S. 200] über die Eigenwerte des Produktes einer positiven quasi-definiten Matrix mit einer symmetrischen Matrix führen (DasGupta [4, S. 315]). Stattdessen wollen wir hier einen direkten Beweis angeben, der sich unmittelbar die Definitheit der Matrizen  $A$  und  $B$  zunutze macht. Insbesondere bestätigen wir, daß die Wurzeln des charakteristischen Polynoms (16) (also die Eigenwerte des Produktes  $AB^{-1}$ ) mit den Eigenwerten von  $A$  übereinstimmen.

In der linearen Algebra wird gezeigt, daß eine reguläre Matrix  $R$  existiert, die für die positiv definite Matrix  $B^{-1}$  die Gleichung  $B^{-1} = RR^T$  erfüllt. Ferner wird gezeigt, daß für jede reguläre  $(n-1, n-1)$ -Matrix  $X$  der Ausdruck  $X^{-1}AB^{-1}X$  eine Ähnlichkeitstransformation des Produktes  $AB^{-1}$  darstellt, die dessen Eigenwerte unberührt läßt. (Beweise dieser Sätze finden sich in jedem Lehrbuch zur linearen Algebra.) Wir wählen nun  $X = (R^T)^{-1}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} X^{-1}AB^{-1}X &= X^{-1}ARR^T X \\ &= R^T ARR^T (R^T)^{-1} \\ &= R^T AR. \end{aligned}$$

Nun sei  $z \in \mathbb{R}^{n-1}$  ein beliebiger Vektor mit mindestens einer von Null verschiedenen Komponente. Ferner sei  $r := Rz$ . Man beachte, daß  $r \neq 0$  gilt, da  $R$  eine reguläre Matrix ist. Somit beinhaltet die negative Definitheit von  $A$ :

$$z^T R^T AR z = r^T Ar < 0.$$

Daher können wir schließen, daß  $R^T AR = X^{-1}AB^{-1}X$  ebenfalls eine negativ definite Matrix darstellt und demnach reelle, negative Eigenwerte besitzt. Mithin müssen auch alle Eigenwerte des Matrixproduktes  $AB^{-1}$  reell und negativ sein. (Allerdings ist  $AB^{-1}$  normalerweise nicht symmetrisch und folglich auch nicht negativ definit.) Damit haben wir Lemma 2 bewiesen.  $\square$

## Literatur

1. K.J. ARROW, Stability Independent of Adjustment Speed, in "Trade, Stability, and Macroeconomics" (G. Horwich and P.A. Samuelson, Eds.), 181-202, Academic Press, New York, 1974.

2. A. BAGCHI, G.J. OLSDER UND R.C.W. STRIJBOS, Regional Allocation of Investment as a Hierarchical Optimization Problem, *Regional Science and Urban Economics* 11 (1981), 205-213.
3. C. BLACKORBY UND W. SCHWORM, The Existence of Input and Output Aggregates in Aggregate Production Functions, *Econometrica* 56 (1988), 613-643.
4. S. DASGUPTA, A Local Analysis of Stability and Regularity of Stationary States in Discrete Symmetric Optimal Capital Accumulation Models, *Journal of Economic Theory* 36 (1985), 302-318.
5. M. DATTA-CHAUDHURI, Optimum Allocation of Investments and Transportation in a Two-Region Economy, in "Essays on the Theory of Optimal Economic Growth" (K. Shell, Ed.), 129-140, MIT Press, Massachusetts, 1967.
6. B. DOMAZLICKY, A Note on the Inclusion of Transportation in Models of the Regional Allocation of Investment, *Journal of Regional Science* 17 (1977), 235-241.
7. R. DORFMAN, Regional Allocation of Investment: Comment, *Quarterly Journal of Economics* 77 (1963), 162-165.
8. R. DORFMAN, P.A. SAMUELSON UND R.M. SOLOW, "Linear Programming and Economic Analysis," McGraw-Hill, New York, 1958.
9. R. FÄRE, On Linear Expansion Paths and Homothetic Production Functions, in "Production Theory" (W. Eichhorn, R. Henn and R. Opitz, Eds.), 53-64, Springer, Berlin, 1974.
10. R. FÄRE, "Fundamentals of Production Theory," Springer, Berlin, 1988.
11. T.L. FRIESZ UND J. LUQUE, Optimal Regional Growth Models: Multiple Objectives, Singular Controls, and Sufficiency Conditions, *Journal of Regional Science* 27 (1987), 201-224.
12. M. FUJITA, Optimum Growth in Two-Region, Two-Good Space Systems: The Final State Problem, *Journal of Regional Science* 13 (1973), 385-407.
13. M. FUJITA, "Spatial Development Planning, A Dynamic Convex Programming Approach," North-Holland, Amsterdam, 1978.
14. E. HELPMAN UND D. PINES, Optimal Public Investment and Dispersion Policy in a System of Open Cities, *American Economic Review* 70 (1980), 507-514.
15. M.D. INTRILIGATOR, Regional Allocation of Investment: Comment, *Quarterly Journal of Economics* 78 (1964), 659-662.
16. M.I. KAMIEN UND N.L. SCHWARTZ, "Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management," North-Holland, Amsterdam, 1981.
17. L.J. LAU, A Characterization of the Normalized Restricted Profit Function, *Journal of Economic Theory* 12 (1976), 131-163. Reprinted as Essay VI in "The Hamiltonian Approach to Dynamic Economics" (D. Cass and K. Shell, Eds.), 131-163, Academic Press, New York, 1976.
18. L.W. MCKENZIE, Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, in "Handbook of Mathematical Economics" (K.J. Arrow and M.D. Intriligator, Eds.), Vol. III, 1281-1355, North-Holland, Amsterdam, 1986.
19. P. MICHEL, P. PESTIEAU UND J.-F. THISSE, Regional Allocation of Investment with Distributive Objectives, *Journal of Regional Science* 23 (1983), 199-209.



20. Y. OHTSUKI, Regional Allocation of Public Investment in an  $n$ -Region Economy, *Journal of Regional Science* 11 (1971), 225-233.
21. A. RAHMAN, Regional Allocation of Investment, An Aggregative Study in the Theory of Development Planning, *Quarterly Journal of Economics* 77 (1963), 26-39.
22. A. RAHMAN, Regional Allocation of Investment: The Continuous Version, *Quarterly Journal of Economics* 80 (1966), 159-160.
23. N. SAKASHITA, Regional Allocation of Public Investment, *Papers of the Regional Science Association* 19 (1967), 161-182.
24. R.W. SHEPHARD, "Theory of Cost and Production Functions," Princeton University Press, Princeton, 1970.
25. A. TAKAYAMA, Regional Allocation of Investment: A Further Analysis, *Quarterly Journal of Economics* 81 (1967), 330-337.
26. A. TAKAYAMA, Regional Allocation of Investment: Corrigendum, *Quarterly Journal of Economics* 82 (1968), 526-527.
27. H.Y. WAN, JR., "Economic Growth," Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

Seit 1989 erschienene Diskussionsbeiträge:  
Discussion papers released as of 1989/1990/1991/1992/1993:

- 1-89 **Klaus Schöler**, Zollwirkungen in einem räumlichen Oligopol
- 2-89 **Rüdiger Pethig**, Trinkwasser und Gewässergüte. Ein Plädoyer für das Nutzerprinzip in der Wasserwirtschaft
- 3-89 **Rüdiger Pethig**, Calculus of Consent: A Game-theoretic Perspective. Comment
- 4-89 **Rüdiger Pethig**, Problems of Irreversibility in the Control of Persistent Pollutants
- 5-90 **Klaus Schöler**, On Credit Supply of PLS-Banks
- 6-90 **Rüdiger Pethig**, Optimal Pollution Control, Irreversibilities, and the Value of Future Information
- 7-90 **Klaus Schöler**, A Note on "Price Variation in Spatial Markets: The Case of Perfectly Inelastic Demand"
- 8-90 **Jürgen Eichberger and Rüdiger Pethig**, Constitutional Choice of Rules
- 9-90 **Axel A. Weber**, European Economic and Monetary Union and Asymmetries and Adjustment Problems in the European Monetary System: Some Empirical Evidence
- 10-90 **Axel A. Weber**, The Credibility of Monetary Target Announcement: An Empirical Evaluation
- 11-90 **Axel A. Weber**, Credibility, Reputation and the Conduct of Economic Policies Within the European Monetary System
- 12-90 **Rüdiger Ostermann**, Deviations from an Unidimensional Scale in the Unfolding Model
- 13-90 **Reiner Wolff**, Efficient Stationary Capital Accumulation Structures of a Biconvex Production Technology
- 14-90 **Gerhard Brinkmann**, Finanzierung und Lenkung des Hochschulsystems – Ein Vergleich zwischen Kanada und Deutschland
- 15-90 **Werner GÜth and Rüdiger Pethig**, Illegal Pollution and Monitoring of Unknown Quality – A Signaling Game Approach
- 16-90 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen in einem zweidimensionalen räumlichen Wettbewerbsmarkt
- 17-90 **Rüdiger Pethig**, International Environmental Policy and Enforcement Deficits
- 18-91 **Rüdiger Pethig and Klaus Fiedler**, Efficient Pricing of Drinking Water
- 19-91 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen und Marktstrukturen in einem räumlichen Oligopol

- 20–91 **Axel A. Weber**, Stochastic Process Switching and Intervention in Exchange Rate Target Zones: Empirical Evidence from the EMS
- 21–91 **Axel A. Weber**, The Role of Policymakers' Reputation in the EMS Disinflation: An Empirical Evaluation
- 22–91 **Klaus Schöler**, Business Climate as a Leading Indicator? An Empirical Investigation for West Germany from 1978 to 1990
- 23–91 **Jürgen Ehlgen, Matthias Schlemper, Klaus Schöler**, Die Identifikation branchenspezifischer Konjunkturindikatoren
- 24–91 **Reiner Wolff**, On the Existence of Structural Saddle-Points in Variational Closed Models of Capital Formation
- 25–91 **Axel A. Weber**, Time-Varying Devaluation Risk, Interest Rate Differentials and Exchange Rates in Target Zones: Empirical Evidence from the EMS
- 26–91 **Walter Buhr and Reiner Wolff**, Partial versus Global Optimization in Economic Dynamics: The Case of Recursive Programming
- 27–91 **Klaus Schöler**, Preisvariationen und beschränkte Informationen in einem räumlichen Oligopol
- 28–92 **Jürgen Ehlgen**, Lösen des stochastischen Wachstumsmodells durch Parameterisieren der Entscheidungsfunktion
- 29–92 **Alfred W. Marusev und Andreas Pfingsten**, Zur arbitragefreien Fortrechnung von Zinsstruktur-Kurven
- 30–92 **Jürgen Ehlgen, Matthias Schlemper, Klaus Schöler**, Die Anwendung branchenspezifischer Konjunkturindikatoren
- 31–92 **Klaus Schöler**, Zum strategischen Einsatz räumlicher Preistechniken
- 32–92 **Günter Knieps and Rüdiger Pethig**, Uncertainty, Capacity Costs and Competition in the Electric Power Industry
- 33–92 **Walter Buhr**, Regional Economic Growth by Policy-Induced Capital Flows: I. Theoretical Approach
- 34–92 **Walter Buhr**, Regional Economic Growth by Policy-Induced Capital Flows: II. Policy Simulation Results
- 35–92 **Andreas Pfingsten and Reiner Wolff**, Endowment Changes in Economic Equilibrium: The Dutch Disease Revisited
- 36–92 **Klaus Schöler**, Preiselastische Nachfrage und strategische Preisreaktionen in einem räumlichen Wettbewerbsmarkt
- 37–92 **Rüdiger Pethig**, Ecological Dynamics and the Valuation of Environmental Change
- 38–93 **Reiner Wolff**, Saddle-Point Dynamics in Non-Autonomous Models of Multi-Sector Growth with Variable Returns to Scale

