

Ehlgén, Jürgen

Working Paper

Lösen des stochastischen Wachstumsmodells durch Parameterisieren der Entscheidungsfunktion

Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 28-92

Provided in Cooperation with:

Fakultät III: Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Universität Siegen

Suggested Citation: Ehlgén, Jürgen (1992) : Lösen des stochastischen Wachstumsmodells durch Parameterisieren der Entscheidungsfunktion, Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 28-92, Universität Siegen, Fakultät III, Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Siegen

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/118731>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

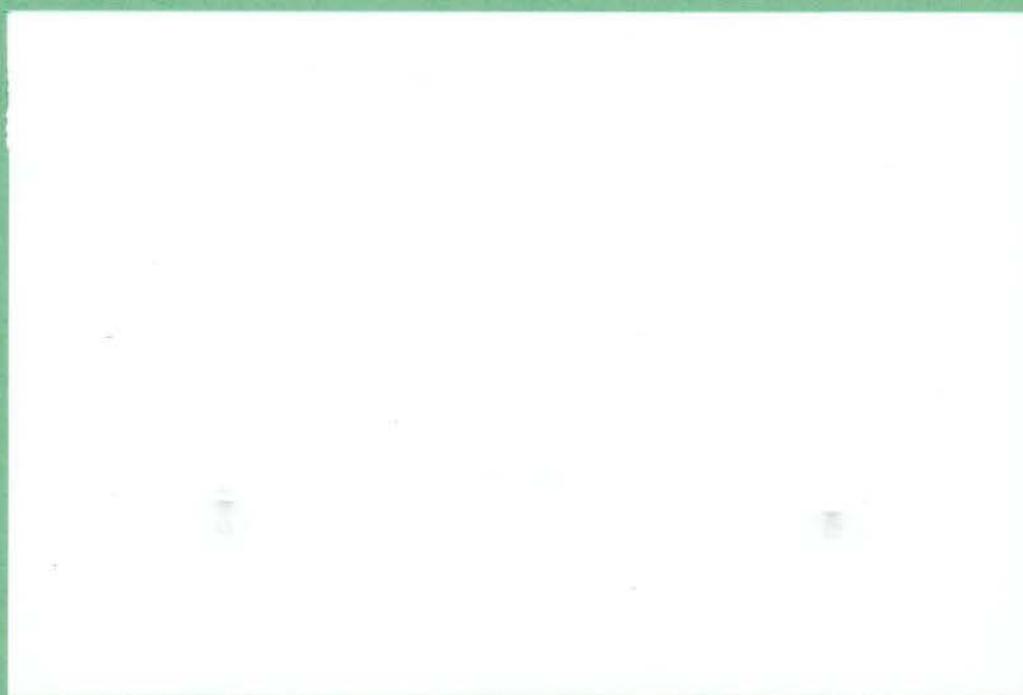
Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

**VOLKSWIRTSCHAFTLICHE
DISKUSSIONSBEITRÄGE**



**UNIVERSITÄT - GESAMTHOCHSCHULE - SIEGEN
FACHBEREICH WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN**

**Lösen des stochastischen Wachstumsmodells durch
Parameterisieren der Entscheidungsfunktion**

Jürgen Ehlgen, Universität - GH Siegen

Diskussionspapier 28-92

Abstract:

Dieser Artikel stellt einen neuen Ansatz zur numerischen Lösung nichtlinearer Modelle mit rationalen Erwartungen vor. Die Methode postuliert eine bestimmte funktionelle Form für die Entscheidungsfunktion und ermittelt dann die Parameter dieser Funktion so, daß die Eulergleichung, die sich aus dem ökonomischen Modell ergibt, möglichst gut erfüllt wird. Die Methode wird auf ein stochastisches Wachstumsmodell angewendet, und die Ergebnisse werden mit denen anderer numerischer Verfahren verglichen.

1. Einleitung

Für ökonomische Modelle existiert in vielen Fällen keine geschlossene Lösung für die einzelnen Variablen. Dies gilt insbesondere für solche, die explizit auf einem Optimierungskalkül beruhen, dynamischer Art sind und rationale Erwartungen beinhalten. Ist die Zielfunktion quadratisch und die Nebenbedingung linear, dann ergibt sich als Lösung eine lineare stochastische Differenzen- oder Differentialgleichung (siehe insbesondere Sargent (1979) für verschiedene Modelle dieser Art). Ferner gilt das Theil'sche certainty-equivalence Prinzip: Geht man von einem stochastischen Modell zu einem deterministischen Modell über, indem man die Zufallsvariablen durch ihre Erwartungswerte ersetzt, erhält man für die Entscheidungsvariablen das gleiche Ergebnis wie im stochastischen Fall. Die Lösung ist also nur von den Erwartungswerten der Zufallsvariablen und nicht von den höheren Momenten abhängig.

Die oben beschriebenen Annahmen sind zwar bequem, aber oft unrealistisch. Dies gilt insbesondere für die Nutzenfunktion, für die eine exponentielle oder isoelastische Form plausibler als eine quadratische ist. Geht man von einer nichtquadratischen Zielfunktion aus, so lassen sich meistens nur noch relativ einfache Modelle lösen. Bei einer komplexeren realistischen Struktur kann man im allgemeinen bestenfalls qualitative Eigenschaften ermitteln, die Lösung des Modells, d.h. die Entscheidungsfunktion für das Wirtschaftssubjekt, läßt sich anscheinend nur noch mit approximativen Methoden bestimmen.¹ Einer dieser Ansätze beruht darauf, die Zielfunktion quadratisch zu approximieren und das Modell mit dieser Funktion zu lösen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Problem mit einem numerischen Verfahren anzugehen.

Taylor und Uhlig (1990) stellen ein stochastisches Wachstumsmodell, für das keine geschlossene Lösung bekannt ist, vor und vergleichen die Ergebnisse, die einige Mitglieder der "Nonlinear Rational Expectations Modelling Group" mit alternativen numerischen Verfahren erhalten haben, miteinander. Die Ansätze lassen sich grob in vier Gruppen einteilen. Christiano (1990) und McGrattan (1990) nehmen eine quadratische Approximation der Nutzenfunktion vor. Dieses Verfahren war auch von Kydland und Prescott (1982) auf das reale Konjunkturmodell angewendet worden. Christiano (1990) und Tauchen (1990) diskretisieren den Zustandsraum und iterieren die Wertefunktion, wie dies in Bertsekas (1976) beschrieben ist. Ingram (1990) und Sims (1990) benutzen das "Backsolving"-Verfahren, wobei eine spezielle Approximation des tatsächlichen Modells gelöst wird. Baxter, Crucini und Rouwenhorst (1990), Coleman (1990), Den Haan und Marcet (1990), Gagnon (1990), und

¹Siehe Sargent (1987) und Stokey und Lucas (1989) für eine Darstellung einer Reihe von dynamischen stochastischen Optimierungsmodellen und Lösungsverfahren, sowie Singleton (1988) speziell zu Konjunkturmodellen.

Labadie (1990) lösen die stochastische Eulergleichung, also die Bedingung erster Ordnung, die sich aus dem Optimierungsproblem ergibt. In den ersten beiden dieser Ansätze wird analog zur Iteration der Wertefunktion die Eulergleichung iteriert, in den anderen dreien wird versucht, den Erwartungswert in der Bedingung erster Ordnung zu bestimmen.

Der Ansatz zur Lösung des stochastischen Wachstumsmodells, der hier vorgestellt wird, stellt in gewisser Weise auch eine Iteration der Eulergleichung dar. Während Baxter, Crucini und Rouwenhorst sowie Coleman den Zustandsraum diskretisieren, wird hier ein bestimmter Funktionstyp für die Entscheidungsregeln postuliert. Die Parameter der Entscheidungsfunktion werden dann so bestimmt, daß die Eulergleichung möglichst genau erfüllt wird.

Der Aufbau des Artikels ist wie folgt: Im zweiten Teil wird das ökonomische Modell beschrieben, darauf folgt die Herleitung der Eulergleichung. In Teil 4 wird der allgemeine Lösungsansatz und in Teil 5 die spezielle Implementation des Verfahrens dargelegt. In Teil 6 werden die Ergebnisse mit denen in Taylor und Uhlig (1990) verglichen. Dann folgen einige Schlußbemerkungen.

2. Modellbeschreibung

Im folgenden wird eine Variante des neoklassischen Ein-Sektor-Wachstumsmodells betrachtet. Es handelt sich um eine Volkswirtschaft mit einem Gut, das entweder konsumiert oder als Input im Produktionsprozess verwendet werden kann. Das repräsentative Wirtschaftssubjekt erzeugt den Output gemäß einer Produktionsfunktion, bei welcher der technische Fortschritt eine stochastische Größe ist, und legt den Konsum so fest, daß der erwartete zukünftige Nutzen maximiert wird.

Sei C_t der Konsum in der Periode t und K_t der Kapitalstock am Ende dieser Periode bzw. zu Beginn des folgenden Zeitabschnitts. In der Periode t tritt ein beobachtbarer Produktivitätsschock θ_t auf; die Höhe der Produktion ist dann $f(K_{t-1}, \theta_t)$. Dabei wird angenommen, daß f stetig und streng monoton steigend in beiden Argumenten sowie konkav in der ersten Variablen ist. Die gesamte Gütermenge, die aus der Produktion und dem Kapitalstock abzüglich Abschreibungen besteht, muß dann von dem Wirtschaftssubjekt in den Konsum und den Kapitalstock für die Produktion in der folgenden Periode aufgeteilt werden. Der Konsum C_t liefert dem Wirtschaftssubjekt in der Periode t einen Nutzen in Höhe von $u(C_t)$; dabei ist die Nutzenfunktion u stetig, monoton steigend und konkav. Das Wirtschaftssubjekt legt den Konsum so fest, daß die erwartete Summe der zukünftigen abdiskontierten Periodennutzen maximiert wird. Der Abdiskontierungsparameter β liegt zwischen Null und Eins. Der Erwartungswert wird bezüglich der gemeinsamen Verteilung der zukünftigen Produktivitätsschocks gebildet. Das Entscheidungsproblem des Wirtschaftssubjektes besteht also darin, für gegebenes K_{-1} , θ_0 und Verteilung von $\{\theta_t, t = 1, 2, \dots\}$

$$E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \right\} \quad (1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$C_t + K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + f(K_{t-1}, \theta_t) \quad , t = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

zu maximieren. Dabei liegt die Abschreibungsrate δ zwischen Null und Eins.

Die speziellen Funktionsformen, die hier untersucht werden, sind wie folgt:

Es wird angenommen, daß das Wirtschaftssubjekt eine isoelastische bzw. CRRA - (constant relative risk aversion) Nutzenfunktion mit Risikoaversionsparameter τ hat:

$$u(C) = \begin{cases} \frac{1}{1-\tau} C^{1-\tau} & 0 < \tau < 1 \quad \text{oder} \quad \tau > 1 \\ \ln C & \tau = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Die Produktionsfunktion ist gegeben durch:

$$f(K, \theta) = \theta K^\alpha \quad (4)$$

mit $0 < \alpha < 1$, und es wird unterstellt, daß der Logarithmus des Produktivitätsschocks einem stationären autoregressiven Prozeß erster Ordnung folgt:

$$\ln \theta_t = \rho \ln \theta_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

wobei ρ zwischen Null und Eins liegt und ε_t eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert Null und Varianz σ_ε^2 ist, die mit ε_{t-j} , $j > 0$, unkorreliert ist.

Für den Fall $\delta=1$, $\rho=0$ und $\tau=1$ gibt es eine einfache Lösung für die Entscheidungsregel des Wirtschaftssubjektes (siehe z.B. Sargent (1987) oder Stokey und Lucas (1989)). Im allgemeinen ist jedoch keine geschlossene Lösung bekannt, und die Entscheidungsregeln können nur approximativ und/oder numerisch bestimmt werden. Das oben beschriebene Modell soll für zehn verschiedene Kombinationen der numerischen Parameterwerte gelöst werden. In allen Fällen ist $\delta=0$, $\alpha=0.33$ und $\rho=0.95$. Die anderen Werte sind 0.95 und 0.98 für β , 0.5, 1.5 und 3 für τ sowie 0.1 und 0.02 für σ_ε . Die einzelnen Kombinationen sind in der Tabelle 1 in Teil 6 angegeben.

3. Die Herleitung der Eulergleichung

Weil der technische Fortschritt einem stationären Markoff-Prozeß erster Ordnung folgt, ist die Verteilung der zukünftigen Produktivitätsschocks eine durch die Realisation des Schocks der aktuellen Periode bedingte Verteilung. Da weiterhin der Planungshorizont unendlich ist und die Nutzen- und Produktionsfunktionen in jeder Periode gleich sind, ist das oben beschriebene Modell stationär in dem folgenden Sinn. Das Wirtschaftssubjekt steht in jeder Periode vor dem gleichen Problem, Entscheidungen für den Konsum und den Kapitalstock zu treffen, so daß der erwartete zukünftige Nutzen maximiert wird. Dabei sind diese Entscheidungen nur von den Zustandsvariablen des Modells und nicht von der Zeit abhängig. Da ferner der Kapitalstock nur vom Kapital und Konsum der Vorperiode sowie dem technischen Fortschritt abhängt und dieser einem Markoff-Prozeß erster Ordnung folgt, ist der Zustand des Systems in einer Periode vollständig durch den Kapitalstock zu Beginn dieser Periode und den Produktivitätsschock, der in diesem Zeitraum auftritt, beschrieben. Das bedeutet, daß zeitunabhängige Entscheidungsfunktionen c und k für den Konsum und den Kapitalstock existieren, die nur vom Kapitalstock zu Periodenbeginn und vom Produktivitätsschock abhängen. Für die optimalen Konsum gilt also $C_t^* = c(K_{t-1}, \theta_t)$ und für den optimalen Kapitalstock $K_t^* = k(K_{t-1}, \theta_t) = F(K_{t-1}, \theta_t) - c(K_{t-1}, \theta_t)$. Dabei stellt F die gesamte zur Verfügung stehende Gütermenge dar, also $F(K, \theta) = (1 - \delta)K + f(K, \theta)$.

Es sei zunächst angenommen, daß die Funktion c bekannt ist. Der maximale erwartete Gesamtnutzen ist dann nach (1) gleich

$$u[c(K_{-1}, \theta_0)] + E \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u[c(K_{t-1}, \theta_t)] \right\},$$

wobei zukünftige Werte des Kapitalstocks und des Produktivitätsschocks durch die Übergangsgleichungen, also die Budgetbedingung (2) und den autoregressiven Prozeß (5) bestimmt werden. Nun wird eine Variation des optimalen Plans betrachtet, bei welcher in der Periode 0 der Konsum um den Betrag x höher ist und in der ersten Periode um genau den Betrag niedriger ist, so daß ab der zweiten Periode wieder der optimale Plan verfolgt werden kann. Der Plan für den Konsum in der ersten Periode ergibt sich dann aus der intertemporalen Budgetbeschränkung als

$$c(K_0, \theta_1) + F(K_0 - x, \theta_1) - F(K_0, \theta_1).$$

Durch diese Variation hat der Haushalt einen Nutzenverlust in Höhe von

$$G(x) = u[c(K_{-1}, \theta_0)] + \beta E \{ u[c(K_0, \theta_1)] \} \\ - u[c(K_{-1}, \theta_0) + x] - \beta E \{ u[c(K_0, \theta_1)] + F(K_0 - x, \theta_1) - F(K_0, \theta_1) \}. \quad (6)$$

Da G an der Stelle $x=0$ minimal wird, ist die erste Ableitung dort gleich Null. Daraus folgt die stochastische Eulergleichung:

$$u'[c(K_{-1}, \theta_0)] = \beta E\{u'[c(K_0, \theta_1)] F_1(K_0, \theta_1)\} , \quad (7)$$

wobei F_1 die Ableitung von F nach dem Kapital ist. Berücksichtigt man die Budgetbedingung, erhält man:

$$u'[c(K, \theta)] = \beta E\{u'[c(F[K, \theta] - c[K, \theta], \Theta)] F_1(F[K, \theta] - c[K, \theta], \Theta)\} , \quad (8)$$

mit $K = K_{-1}$, $\theta = \theta_0$ und $\Theta = \theta_1$. Bei dieser Schreibweise sind die Zeitindizes weggelassen worden, um die Zeitunabhängigkeit der Konsumfunktion und der Eulergleichung zu betonen.

4. Beschreibung des Lösungsalgorithmus

Die Methode zur Lösung des stochastischen Wachstumsmodells, die hier verfolgt wird, setzt an der Eulergleichung an.² Zunächst wird für die Konsumfunktion ein plausibler Funktionstyp gewählt. Dann werden die Parameter dieser Funktion so bestimmt, daß die Eulergleichung möglichst gut erfüllt wird.

Aus der Bedingung erster Ordnung, Gleichung (8), folgt:

$$c(K, \theta) = u'^{-1}\left(\beta E\{u'[c(F[K, \theta] - c[K, \theta], \Theta)] F_1(F[K, \theta] - c[K, \theta], \Theta)\}\right) , \quad (9)$$

wobei u'^{-1} die Umkehrfunktion des Grenznutzens ist. Sei $h(K, \theta; \gamma)$ eine Konsumfunktion, die bei einem festen Koeffizientenvektor γ vom Kapitalstock und dem Produktivitätsschock abhängt. Diese Konsumfunktion wird nun im allgemeinen der obigen Gleichung nicht genau genügen, weil sie für den optimalen Konsum gilt, sondern es ergibt sich eine Residualfunktion:

$$R(K, \theta; \gamma) = h(K, \theta; \gamma) - u'^{-1}\left(\beta E\{u'[h(F[K, \theta] - h[K, \theta; \gamma], \Theta; \gamma)] F_1(F[K, \theta] - h[K, \theta; \gamma], \Theta)\}\right) . \quad (10)$$

Aber je geringer die Residualfunktion ist, desto besser ist die Gleichung erfüllt. Deshalb wird der Koeffizientenvektor γ nun so bestimmt, daß eine geeignete Transformation T der

²Auf die Bedingung zweiter Ordnung wird hier nicht eingegangen. Stokey und Lucas (1989) zeigen jedoch, daß in Modellen der obigen Art die Entscheidungsfunktionen typischerweise eindeutig sind.

Residualfunktion in einem zu spezifizierenden Bereich durchschnittlich möglichst gering wird. Dazu wird die Funktion

$$Z(\gamma) = \int_{K_0, \theta_0}^{K_1, \theta_1} T[R(K, \theta; \gamma)] d\theta dK \quad (11)$$

bezüglich γ minimiert. Sei γ^* der Wert, der Z minimiert. Dann ist $h(K, \theta; \gamma^*)$ die Funktion, welche aus ihrer Klasse die Bedingung erster Ordnung am ehesten erfüllt und wird als optimale Konsumfunktion angesehen.³

In den wenigsten Fällen kann man den Erwartungswert in Gleichung (10) analytisch ermitteln. In diesen Fällen wird der Erwartungswert berechnet, indem man (bei einer stetigen Zufallsvariablen) ein numerisches Integrationsverfahren verwendet. Ebenso wenig läßt sich das Minimum der Funktion Z in (11) analytisch bestimmen. Dann muß ein Verfahren, das Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen minimieren kann, verwendet werden.

5. Implementation des Verfahrens

Implementiert man den Algorithmus, dann ergeben sich verschiedene Fragestellungen, z.B. welche Funktionsform, welche Integrationsmethode oder welches numerische Minimierungsverfahren verwendet werden soll. Einige dieser Punkte sollen in diesem Abschnitt kurz angesprochen werden. Dabei ist es offensichtlich, daß die Probleme auf unterschiedliche Weisen gelöst werden können.

In der hier beschriebenen Implementation hat der Koeffizientenvektor γ drei Elemente und die Konsumfunktion h wird spezifiziert als

$$h(K, \theta; \gamma) = w(K, \theta; \gamma) F(K, \theta) \quad \text{mit} \quad w(K, \theta; \gamma) = \gamma_1 K^{\gamma_2} \theta^{\gamma_3} . \quad (12)$$

Diese Formulierung bietet sich an, weil einerseits bei der oben beschriebenen Parameterkonstellation, für welche eine geschlossene Lösung bekannt ist, das Verhältnis von Konsum und Produktion konstant ist und andererseits $F(K, \theta)$ ohnehin berechnet werden muß. Alternativ wurden auch ein bilinearer Ansatz $w(K, \theta; \gamma) = \gamma_1 + \gamma_2 K + \gamma_3 \theta + \gamma_4 K\theta$, eine Exponentialfunktion $w(K, \theta; \gamma) = \gamma_1 e^{\gamma_2 K + \gamma_3 \theta}$ und eine additive statt einer multiplikativen Form, $w(K, \theta; \gamma) = \gamma_1 K^{\gamma_2} + \gamma_3 \theta^{\gamma_4}$, untersucht. Die Funktionstyp in (12) lieferte jedoch die besten Ergebnisse.

Der Erwartungswert in Gleichung (10):

³Einerseits sollte überprüft werden, ob es weitere Parameterkonstellationen, welche der Eulergleichung approximativ genügen, gibt. Andererseits sollte die Transversalitätsbedingung erfüllt sein. Siehe auch Baxter (1991) zu diesem Problem.

$$E\{u'[h(F[K, \theta] - h[K, \theta; \gamma], \Theta; \gamma)]F_1(F[K, \theta] - h[K, \theta; \gamma], \Theta)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u'[h(F[K, \theta] - h[K, \theta; \gamma], \exp\{\rho \ln \theta + \varepsilon\}; \gamma)]F_1(F[K, \theta] - h[K, \theta; \gamma], \exp\{\rho \ln \theta + \varepsilon\}) \right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)^2\right\} d\varepsilon \quad (13)$$

wird nach der Gauß-Legendreschen Quadraturregel berechnet. Dabei werden 12 Quadraturpunkte verwendet und die Integration erfolgt über das Intervall $[-4\sigma_\varepsilon, 4\sigma_\varepsilon]$. Naheliegender wäre auch eine Gauß-Hermiteische Quadratur, weil die Integration bezüglich einer Normalverteilungsdichte erfolgt.

Die Transformationsfunktion hier ist $T(x) = x^2$, so daß das Integral der quadrierten Residualfunktion R minimiert wird. Statt des Quadrats könnte man auch den absoluten Betrag verwenden oder eine Gewichtungsfunktion benutzen, wenn die Anpassung in bestimmten Bereichen besonders genau sein soll.

Die Funktion T wird wiederum nach der Gauß-Legendreschen 12-Punkte-Formel integriert. Das Rechteck, in dem die Funktion integriert wird, sollte im allgemeinen durch den Bereich der Variablen, für den man sich besonders interessiert, bestimmt sein. Führt man später Simulationen durch, dann sollte etwa der Bereich, in dem sich die Variablen bewegen, eingeschlossen werden. Die Steady-State-Werte im deterministischen Modell sind $\theta^* = 1$ sowie $K^* = 15.49$ für $\beta = 0.95$ und $K^* = 63.68$ für $\beta = 0.98$ (siehe Christiano (1990)). Die Integrationsintervalle werden dann so festgelegt, daß sie diese Steady-State-Werte beinhalten. Dabei werden die Intervalle in den Fällen, in denen die Varianz des Schocks ε größer ist, länger gewählt. Die genauen Integrationsgrenzen für die alternativen Fälle sind in Tabelle 1 in Teil 6 aufgeführt.

Für die Minimierung der Zielfunktion wird ein Quasi-Newton-Algorithmus, bei welchem die Hessesche Matrix nach dem Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Verfahren aufdatiert wird, verwendet. Die Ableitungen werden nach der Finite-Differenzen-Methode berechnet und die optimale Schrittweite nach einem Liniensuchverfahren ermittelt. Der Algorithmus ist vollständig in Dennis und Schnabel (1983) als "Algorithm D6.1.2." beschrieben. Als Startwert für den Koeffizientenvektor wird immer $\gamma^0 = (0.2, 0, 0)$ gesetzt, so daß am Anfang der Konsum gleich einem Fünftel des Outputs ist.

Bei dem Suchverfahren kann jedoch ein Problem auftreten, wenn eine Schrittweite verwendet wird, so daß die Funktion w nicht zwischen Null und Eins liegt. Das würde bedeuten, daß der Konsum entweder negativ oder größer als die gesamte Gütermenge wäre.⁴ In

⁴Dieser Fall ist ökonomisch nicht sinnvoll. Er ist theoretisch in dem obigen Modell ausgeschlossen, weil die Steigung der Nutzenfunktion im Ursprung unendlich groß ist. Es bedarf also hier nicht, wie bei anderen Nutzenfunktionen, expliziter zusätzlicher Nebenbedingungen.

diesem Fall wird der Zielfunktion Z ein extrem großer Wert zugewiesen, so daß diese Schrittlänge eine Verschlechterung bedeutet.

6. Darstellung und Vergleich der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die ermittelten Koeffizienten der Konsumfunktion aufgeführt und einige Ergebnisse einer stochastischen Simulation dargestellt.⁵ Der Simulationsbereich umfaßt 2000 Perioden. Dazu ist für eine gegebene Periode die Realisation einer normalverteilten Zufallsvariablen mit einem Zufallszahlengenerator zu bestimmen und daraus nach der Gleichung für den autoregressiven Prozeß der Produktivitätsschock zu berechnen. Danach wird mit der Konsumfunktion h der Konsum und schließlich aus der Budgetbedingung der Kapitalstock ermittelt. Dann geht man über zu der nächsten Periode. Die Statistiken in den Tabellen 2 und 3 sowie die Abbildungen 1 bis 5 sind das Ergebnis dieser Simulationen.

Tabelle 1
Modellparameter und Koeffizienten der Konsumfunktion

Fall	β	τ	σ_ε	θ_0	θ_1	K_0	K_1	γ_1^*	γ_2^*	γ_3^*
1	0.95	0.5	0.10	0.4	1.6	5	30	0.178057	-0.093346	0.092200
2	0.95	1.5	0.10	0.4	1.6	5	30	0.342868	-0.332756	0.279881
3	0.98	0.5	0.10	0.4	1.6	20	120	0.101463	-0.130595	0.081039
4	0.98	1.5	0.10	0.4	1.6	20	120	0.304546	-0.394283	0.198378
5	0.95	0.5	0.02	0.9	1.1	14	18	0.176086	-0.089967	0.090005
6	0.95	1.5	0.02	0.9	1.1	14	18	0.344245	-0.334704	0.280009
7	0.95	3.0	0.02	0.9	1.1	14	18	0.431766	-0.417926	0.340015
8	0.98	0.5	0.02	0.9	1.1	50	70	0.100494	-0.130800	0.086000
9	0.98	1.5	0.02	0.9	1.1	50	70	0.308771	-0.401532	0.219991
10	0.98	3.0	0.02	0.9	1.1	50	70	0.443163	-0.488690	0.255978

Für alle Fälle gilt $\alpha = 0.33$ und $\rho = 0.95$.

In Tabelle 1 sind für die zehn betrachteten Fälle die Parameterkonstellationen, die Integrationsgrenzen und der Koeffizientenvektor $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$ wiedergegeben. Obwohl die Koeffizienten selbst nicht notwendigerweise aussagekräftig sind, kann man doch feststellen, daß alle Koeffizienten betragsmäßig größer werden, wenn der Risikoaversionsparameter ansteigt. Ferner sieht man, daß die Parameter sich nicht stark ändern, wenn die Varianz des Zufallsschocks variiert wird, die anderen Modellparameter jedoch gleich bleiben, wie etwa

⁵Alle Fälle wurden mit den gleichen Zufallszahlen simuliert.

der Vergleich von Fall 2 und Fall 6 zeigt. Das läßt sich so interpretieren, daß eine erhöhte Unsicherheit keinen großen Einfluß auf die Konsumententscheidung ausübt. Das bedeutet natürlich nicht, daß Unsicherheit keine Rolle in dem Modell spielt. Die Varianz des Zufallschocks beeinflußt die Höhe der Schwankungen aller Variablen in dem Modell. Aber bei gegebenem Produktivitätsschock und Kapitalstock ist der optimale Konsum relativ unabhängig von der Varianz.⁶

Ferner ergibt sich aus den Koeffizienten das erwartete Ergebnis, daß der Konsum positiv vom Kapitalstock und vom Produktivitätsschock abhängt. Diese Aussage gilt zumindest in den Bereichen, die hier analysiert worden sind. Weil in einigen Fällen γ_2^* betragsmäßig größer als α ist, erhält man für die Ableitung der Konsumfunktion nach dem Kapital bei sehr geringen Werten des Kapitalstocks ein negatives Vorzeichen. Das Verfahren hier stellt jedoch nur den Anspruch, in dem Bereich, der durch die Integrationsgrenzen gegeben ist, gute Ergebnisse zu liefern.

Tabelle 2
Kapital- und Konsumententscheidungen bei ausgewählten Werten der Zustandsvariablen

		θ									
		0.4		0.7		1.0		1.3		1.6	
K	5	4.88 0.80	4.80 0.88	5.27 0.92	5.07 1.12	5.67 1.03	5.36 1.34	6.08 1.13	5.65 1.56	6.49 1.24	5.95 1.77
	10	9.42 1.43	9.52 1.34	9.90 1.60	9.84 1.66	10.39 1.74	10.20 1.93	10.90 1.88	10.59 2.19	11.41 2.01	10.98 2.44
	15	13.95 2.03	14.26 1.72	14.47 2.24	14.61 2.11	15.03 2.41	15.02 2.42	15.60 2.58	15.45 2.72	16.18 2.73	15.91 3.00
	20	18.47 2.61	19.01 2.06	19.03 2.85	19.38 2.51	19.63 3.05	19.82 2.87	20.25 3.24	20.29 3.20	20.88 3.42	20.79 3.51
	25	22.99 3.17	23.78 2.38	23.58 3.45	24.15 2.87	24.22 3.68	24.62 3.28	24.88 3.88	25.12 3.64	25.55 4.08	25.66 3.97

Die linken Werte in jedem Feld beziehen sich auf Fall 1, die rechten auf Fall 2. Der obere Wert ist jeweils der Kapitalstock, der untere der Konsum.

In Tabelle 2 sind für die Fälle 1 und 2 die optimalen Konsum- und Kapitalstockentscheidungen für alternative Werte des Kapitals zum Beginn der Periode und des Produktivitäts-

⁶Der Grund für dieses Ergebnis liegt wahrscheinlich darin, daß die Varianz einen relativ geringen numerischen Wert aufweist. Bei Berechnungen mit höheren Werten der Varianz ändern sich die Ergebnisse erheblich.

schocks wiedergegeben. Zunächst stellt man fest, daß sich die optimalen Werte nicht so stark unterscheiden, wie man möglicherweise auf Grund der Koeffizienten der Konsumfunktion erwarten würde.⁷ Zweitens sieht man, daß der Konsum mit steigendem Kapitalstock und steigendem Produktivitätsschock größer wird, jedoch bei der geringeren Risikoaversion (Fall 1) stärker vom Kapitalstock und schwächer vom Produktivitätsschock abhängt als im Fall der höheren Risikoaversion. Vergleicht man die Werte hier mit denen, die sich aus den anderen Verfahren ergeben (Taylor und Uhlig (1990), Tabellen 3 bis 10), so lassen sich die größten Gemeinsamkeiten mit den Ergebnissen von Coleman und Gagnon feststellen.

In Tabelle 3 sind für die alternativen Fälle jeweils vier Modellstatistiken angegeben. Die Größe m ist die sogenannte Den Haan-Marcet-Statistik. Aus der Eulergleichung (7) folgt:

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1}) F_1(K_t, \theta_{t+1}) + \eta_{t+1},$$

wobei der bedingte Erwartungswert von η_{t+1} zum Zeitpunkt t gleich Null ist. Die Prognostizierbarkeit des Eulergleichungsresiduums wird überprüft, indem es auf eine Konstante und jeweils fünf Lags des Konsums und des Produktivitätsschocks θ regressiert wird. Die Teststatistik hat unter der Nullhypothese, daß die Koeffizienten der Regression alle gleich Null sind, asymptotisch approximativ eine $\chi^2(11)$ -Verteilung (siehe Taylor und Uhlig (1990) für eine genaue Beschreibung der Teststatistik). Alle Konsumfunktionen schneiden in dieser Hinsicht gut ab, weil die kritischen Werte eines zweiseitigen Tests

Fall	m	TR^2	R^2	r
1	4	9	0.38	29
2	4	15	0.04	11
3	19	19	0.24	149
4	13	13	0.02	57
5	20	15	0.44	30
6	11	19	0.03	10
7	10	12	0.02	9
8	18	20	0.30	159
9	20	20	0.02	60
10	17	18	0.01	35

zum Signifikanzniveau von 2.5% bei 3.82 bzw. 21.92 liegen. Die Lösungsverfahren, die in Taylor und Uhlig (1990, Tabelle 11) aufgeführt werden, liefern durchweg schlechtere Ergebnisse, abgesehen von den Ansätzen von Ingram und von Sims, bei deren Methode die Eulergleichung notwendigerweise erfüllt sein muß. Lediglich Coleman kommt zu annähernd guten Werten.

Die zweite Testgröße überprüft die Prognostizierbarkeit des Zufallsschocks ε , indem dieser auf eine Konstante und jeweils fünf Lags des Konsums, des Kapitalstocks und des Produktivitätsschocks θ regressiert wird. Die Teststatistik ist die Größe TR^2 dieser Regression,

⁷Vgl. auch die Simulationsergebnisse in Abbildung 5.

wobei T die Anzahl der Beobachtungen ist, und hat asymptotisch eine $\chi^2(15)$ -Verteilung. Die kritischen Werte für einen zweiseitigen Test zum Signifikanzniveau 2.5% sind 6.26 und 27.49. Weil der Schock hier mit einem Zufallszahlengenerator erzeugt wurde, ist dieser Test jedoch nicht aussagekräftig und wird nur aus Vergleichsgründen mit den anderen Studien aufgeführt.

Die Werte in den beiden anderen Spalten sind keine statistischen Testgrößen, sondern dienen dazu, ökonomische Eigenschaften des Modells, die aus den unterschiedlichen Lösungsansätzen resultieren, miteinander zu vergleichen. Zunächst wird die Random-Walk-Hypothese des Konsums, daß Veränderungen der Konsumausgaben nicht prognostizierbar sind (siehe Hall (1978)), überprüft. Diese Eigenschaft ergibt sich bei einem Wirtschaftssubjekt, das eine quadratische Nutzenfunktion aufweist und sich einem exogenen stochastischen Einkommensstrom gegenüber sieht; im allgemeinen gilt dieses Ergebnis nicht. Die dritte Größe ist das R^2 der Regression mit der Veränderung des Konsums als endogene Variable und der vergangene Konsum und der vergangene Kapitalstock als Exogene. Dieses Bestimmtheitsmaß ist gleich Null, wenn die Random-Walk-Hypothese zutrifft. Die Werte stimmen in der Größenordnung mit denen von Coleman, Marcet und Sims überein (siehe Taylor und Uhlig (1990), Tabelle 13) und es läßt sich feststellen, daß das R^2 zurückgeht, wenn die Risikoaversion ansteigt. Dieser Effekt ist jedoch bei einer geringen Risikoaversion wesentlich deutlicher ausgeprägt als bei einer hohen Risikoaversion. Ferner erkennt man, daß in den Fällen mit einer geringeren Varianz das Bestimmtheitsmaß etwas höher ist als in den entsprechenden Fällen mit der größeren Varianz.

Die vierte Größe, r , ist das Verhältnis zwischen der Varianz der Investitionen und der Varianz der Veränderung des Konsums. Dadurch sollen die relativen Schwankungen der Investitionen und des Konsums gemessen werden. Auch hier ergeben sich große Ähnlichkeiten zu Coleman, Marcet und Sims (siehe Taylor und Uhlig (1990), Tabelle 14). Die Varianz des Technologieschocks hat auf r offensichtlich keinen großen Einfluß, während sich das Varianzenverhältnis vervielfacht, wenn β von 0.95 auf 0.98 ansteigt und die anderen Parameter gleichbleiben. Dagegen ist r umso geringer, je größer τ ist.

In der Abbildung 1 ist die Realisation des Konsums und des Kapitalstocks für eine stochastische Simulation der alternativen Fälle festgehalten. Der dargestellte Bereich umfaßt die Perioden 200 bis 800. Hier, wie in den folgenden Abbildungen, ist jedoch auf die möglicherweise unterschiedliche Dimension der Achsen zu achten. Abbildung 2 ist die entsprechende Realisation der Investitionen, also die Veränderung des Kapitalstocks. Abbildung 3 ist die empirische Dichtefunktion des Konsums, berechnet aus einem Histogramm mit 50 gleich langen Intervallen, wobei alle 2000 Realisationen der Simulation verwendet wurden. Abbildung 4 zeigt die empirische Dichtefunktion der Investitionen. Diese hat jedoch einen glatteren Verlauf als die Dichte des Konsums, da hier 25 Intervalle bei der Berechnung verwendet wurden. In Abbildung 5 werden die Realisationen des Konsums für jeweils zwei

Fälle verglichen, um die Auswirkungen einer Änderung eines einzigen Modellparameters zu untersuchen.

Zunächst ist festzustellen, daß in allen Fällen der prinzipielle Verlauf der realisierten Reihen sehr ähnlich ist, obwohl sich die Größenordnungen in einigen Fällen doch stark unterscheiden. Ist die Zeitpräferenzrate gering, dann bewegen sich, analog zum deterministischen Modell, der Kapitalstock und der Konsum auf einem höheren Niveau. Auch die Absolutwerte der Investitionen sind größer. Die kurzfristigen Schwankungen des Konsums fallen jedoch geringer aus als bei einer höheren Zeitpräferenz, wie man bei dem Vergleich der Fälle 1 und 3 sieht. Eine geringere Varianz des Schocks führt dazu, daß alle Reihen niedrigere Schwankungen aufweisen. Die durchschnittliche Höhe des Kapitalstocks und des Konsums ändert sich anscheinend nicht.

Der Einfluß der Risikoaversion ist, wie sich schon in Tabelle 2 andeutete, relativ gering. Lediglich dann, wenn sich der Kapitalschock weit vom Steady-State-Wert entfernt, kann man größere Unterschiede feststellen. Auch kann man in Abbildung 5 erkennen, daß im Fall 2 die Konsumreihe etwas unregelmäßiger verläuft.

7. Schlußbemerkungen

Der hier vorgestellte Algorithmus zur Lösung des stochastischen Wachstumsmodells liefert Ergebnisse, die mit den plausibleren Resultaten in Taylor und Uhlig (1990) übereinstimmen, und zufriedenstellende Teststatistiken. Die Berechnungen erfordern keinen hohen Speicherbedarf und die benötigte Rechenzeit ist geringer als bei den meisten anderen Verfahren. Auf einem Rechner mit einem Intel 80386 Prozessor mit 33 Megahertz Taktfrequenz und einem 80387-33 mathematischen Koprozessor konvergiert der Algorithmus für Fall 1 nach 92 Sekunden. Weil für die Entscheidungsfunktionen eine relativ einfache geschlossene Lösung vorliegt, erfordern die Simulationen eine Rechenzeit von nur etwa zwei Sekunden für die 2000 Perioden.⁸ Ein weiterer Vorteil dieser Methode besteht darin, daß die Simulationen unabhängig von dem Algorithmus erstellt werden können, wenn die Koeffizienten der Entscheidungsfunktion bekannt sind. Bei den Verfahren, die auf einer Diskretisierung des Zustandsraums basieren, werden optimale Entscheidungen für die Knotenpunkte ermittelt. Wollte z.B. eine dritte Person eigene Simulationen durchführen, dann müßte sie für alle diese Punkte die optimalen Werte kennen.

Es ist jedoch zu überprüfen, ob sich der Algorithmus auch bei komplexeren Modellen, insbesondere solchen mit einer größeren Anzahl von Zustandsvariablen, als praktikabel erweisen wird. In Bezug auf den erforderlichen Speicherbedarf wird vermutlich kein Problem auftreten. Weil jedoch sowohl die Anzahl der Variablen, nach denen integriert wird, als

⁸Das Programm ist in der Programmiersprache C++ geschrieben und unter MS-DOS mit Turbo C++ von Borland kompiliert worden. Die Berechnungen erfolgen alle mit doppelter Genauigkeit.

auch die Anzahl der Koeffizienten in der Entscheidungsfunktion ansteigt, wird die benötigte Rechenzeit erheblich ansteigen. Eine entsprechende Kritik gilt aber auch für die anderen Verfahren mit Ausnahme der linear-quadratischen Approximation, bei welcher jedoch der analytische Rechenaufwand mit der Anzahl der Variablen erheblich ansteigt (siehe z.B. Hansen und Sargent (1988))

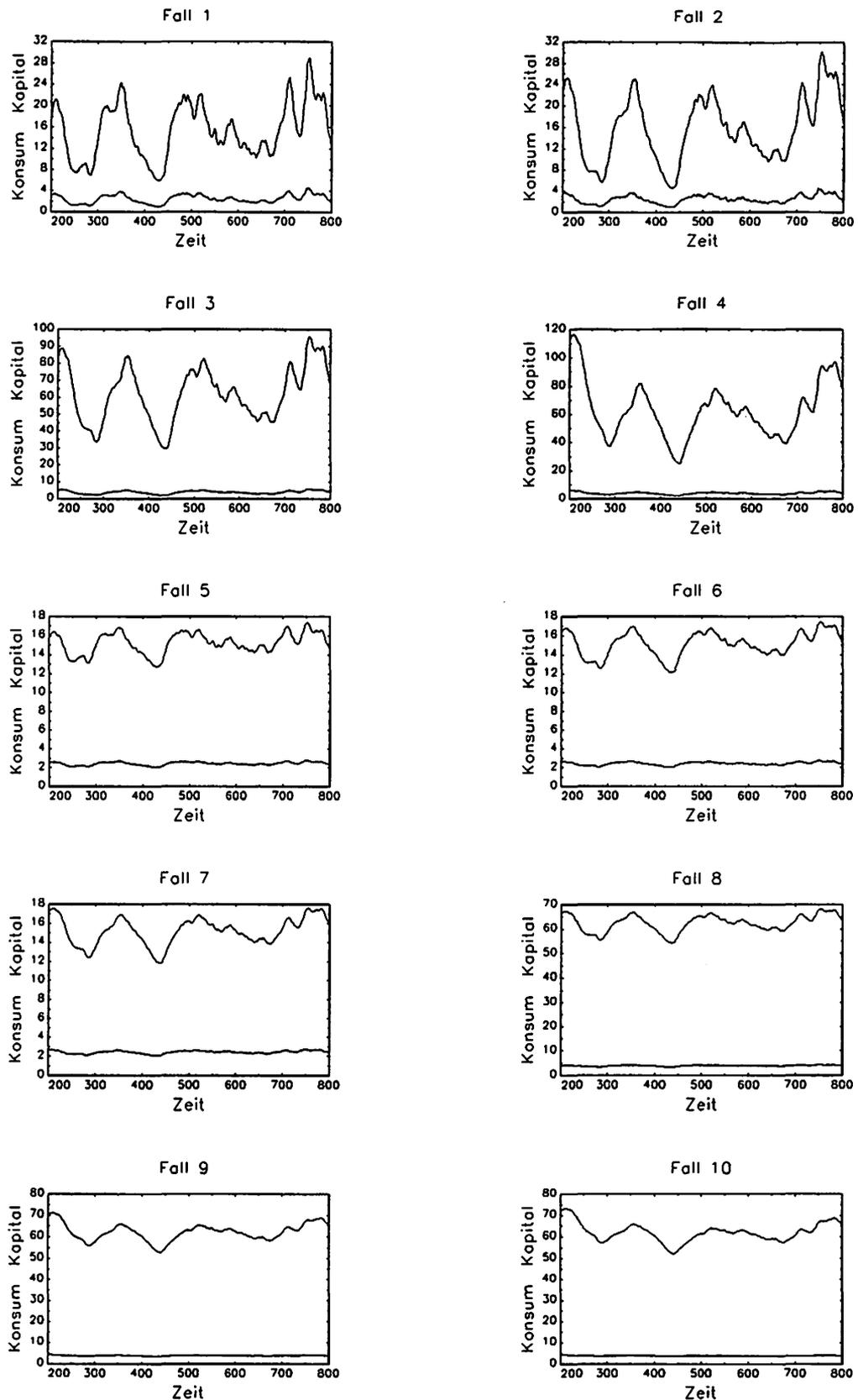


Abbildung 1. Realisation von Konsum (untere Reihe) und Kapitalstock für eine stochastische Simulation der alternativen Fälle von Periode 200 bis 800.

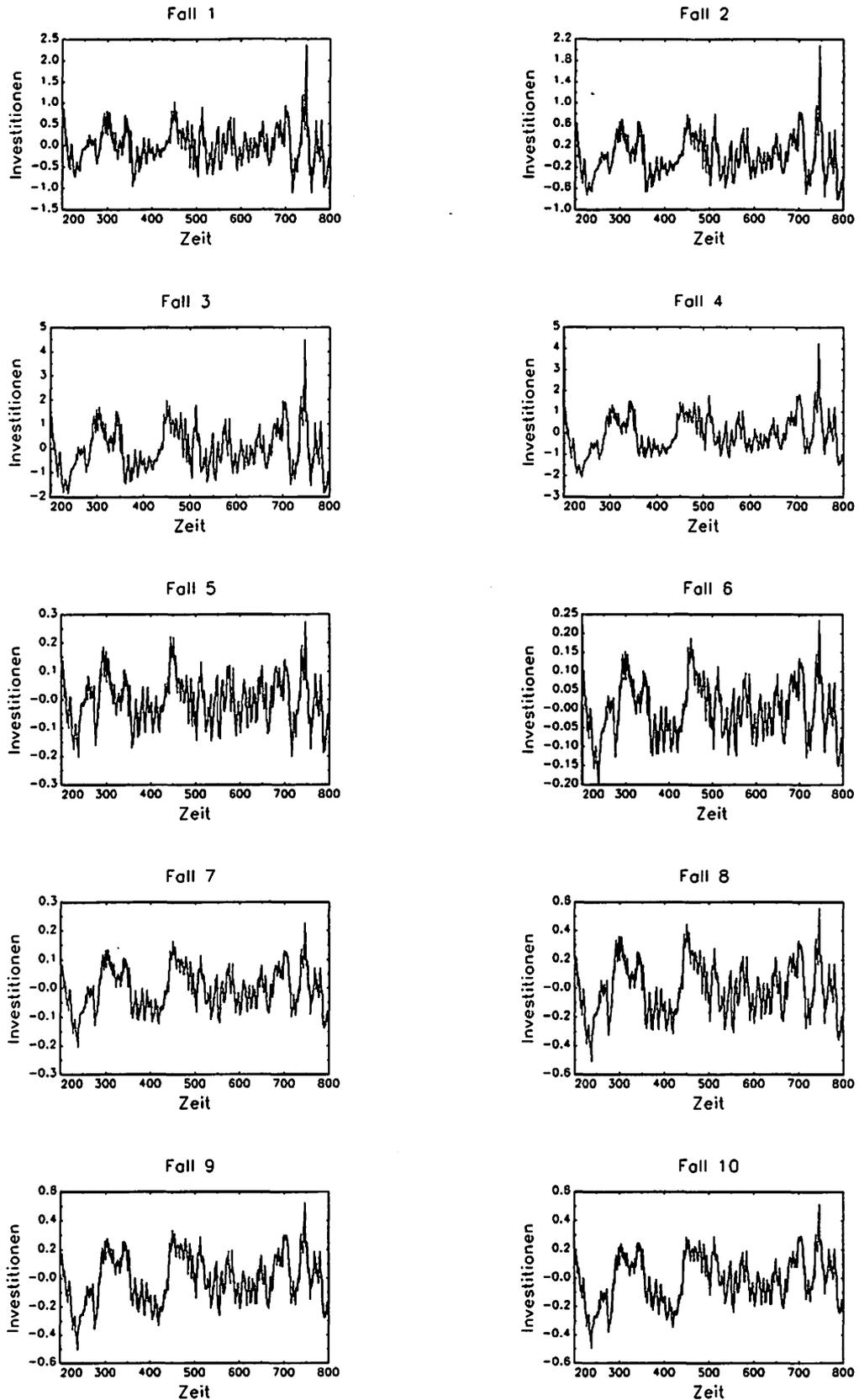


Abbildung 2. Realisation der Investitionen für eine stochastische Simulation der einzelnen Fälle von Periode 200 bis 800.

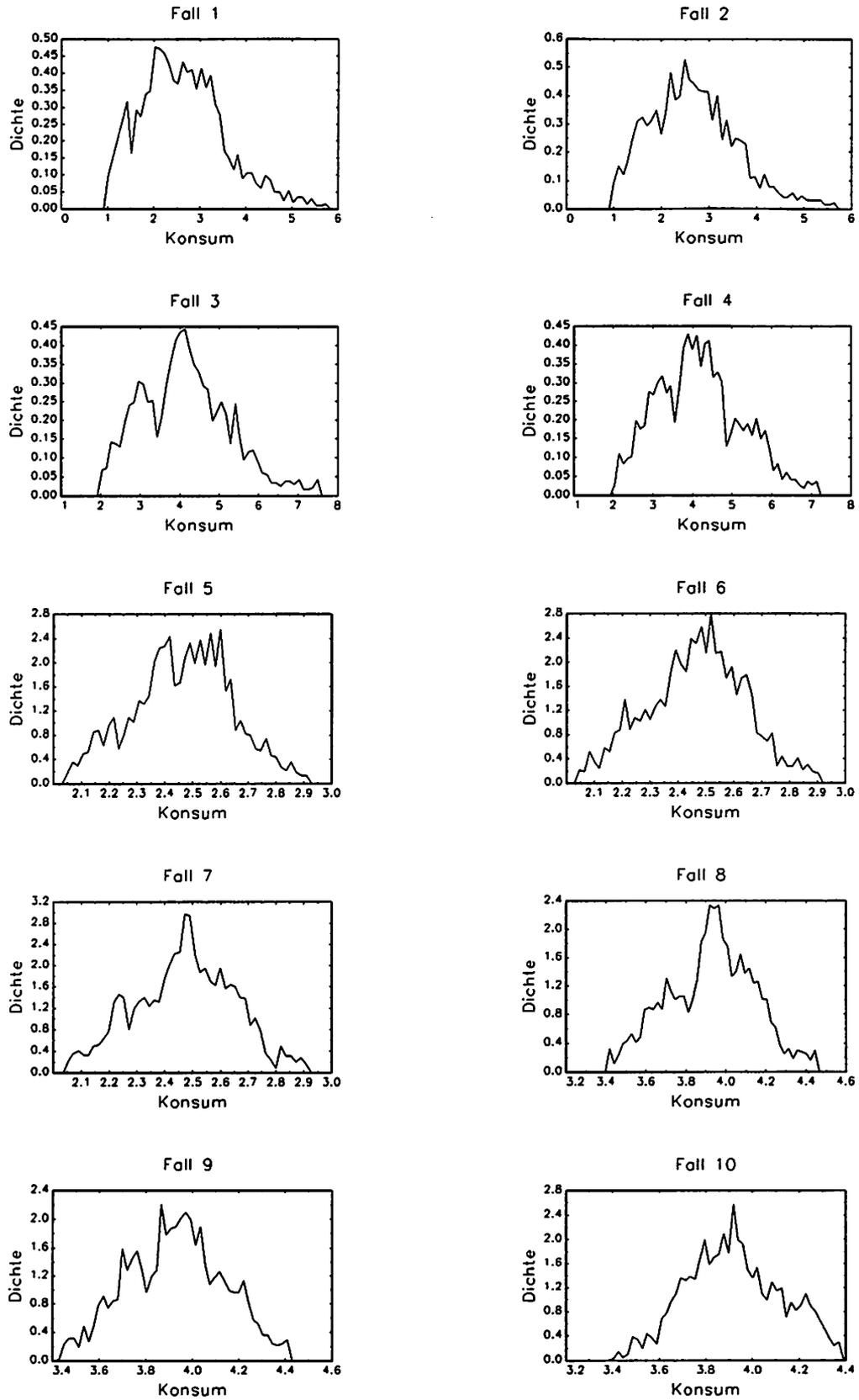


Abbildung 3. Empirische Dichtefunktion des Konsums für eine stochastische Realisation für die alternativen Fälle.

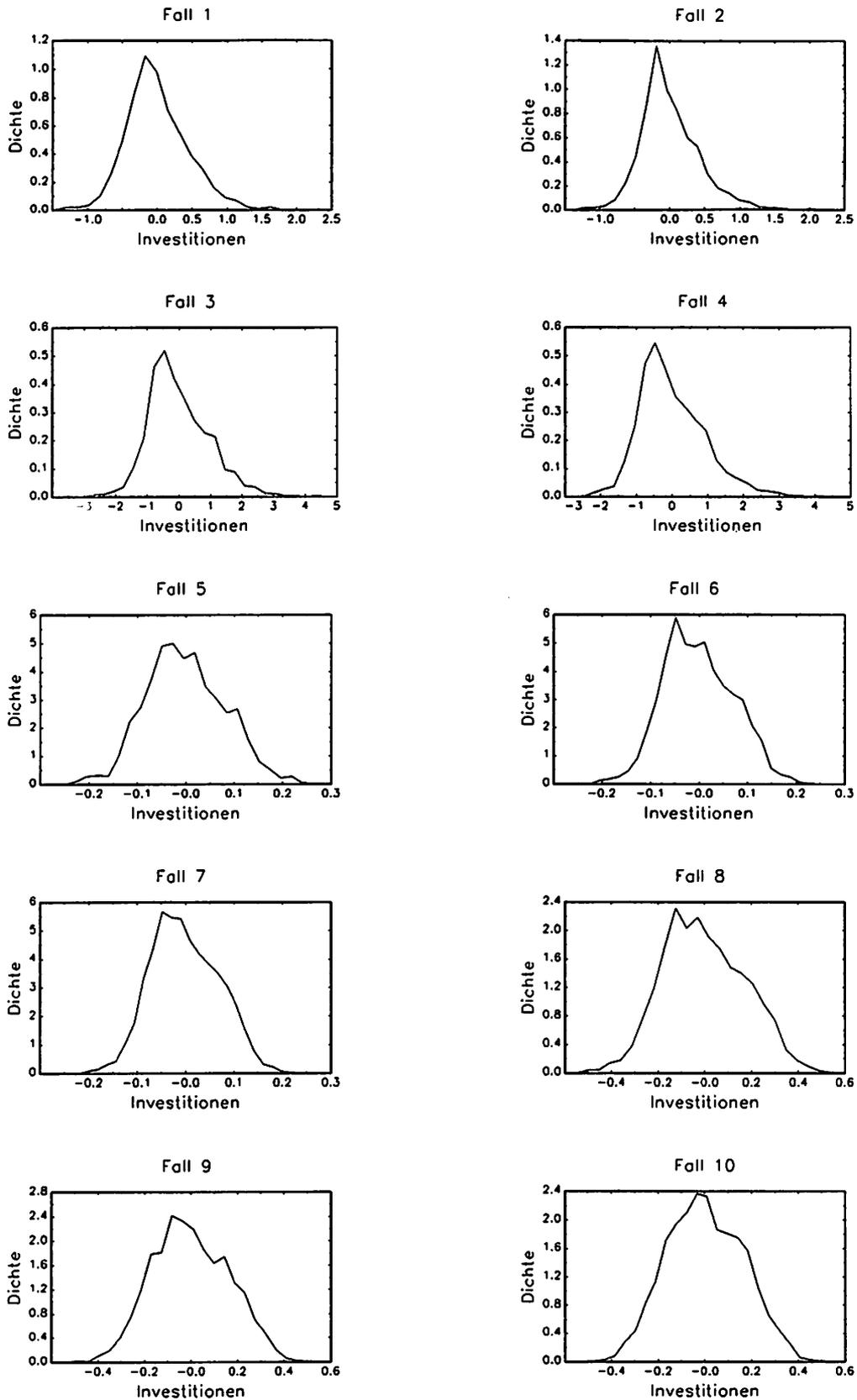


Abbildung 4. Empirische Dichtefunktion der Investitionen für eine stochastische Simulation der alternativen Fälle.

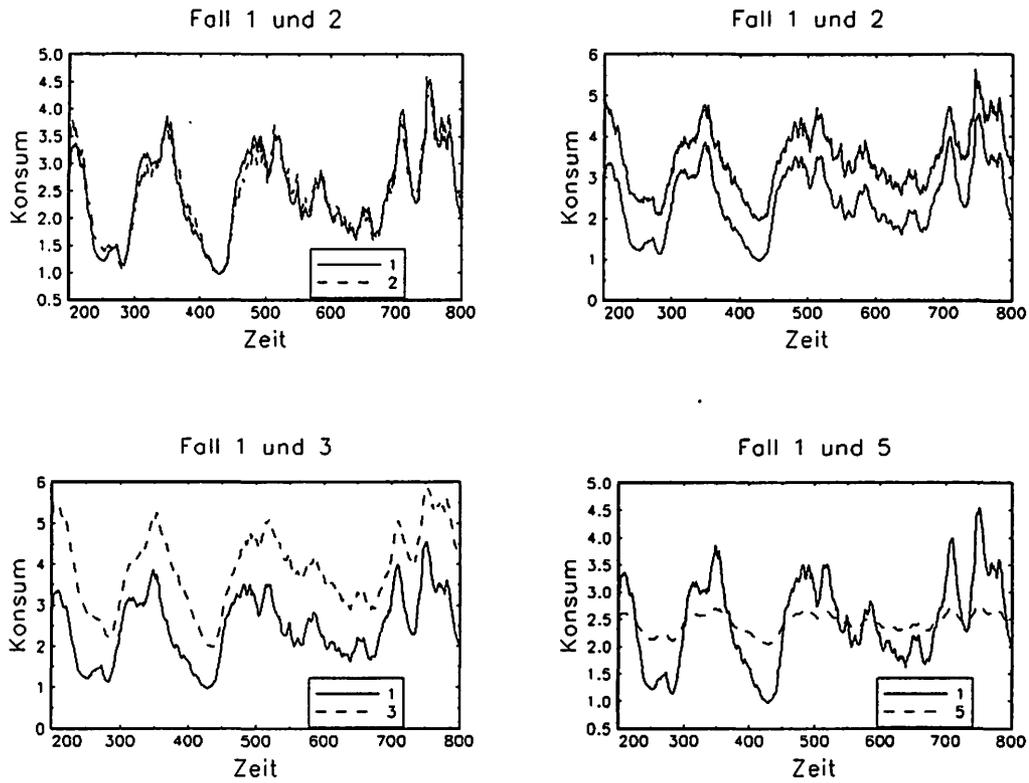


Abbildung 5. Vergleich der Realisation des Konsums für jeweils zwei Fälle. In der Grafik rechts oben ist der Konsum in Fall 2 (die obere Reihe) um eine Einheit nach oben versetzt.

Literatur

- Baxter, M., M.J. Crucini und K.G. Rouwenhorst (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by a Discrete-State-Space, Euler-Equation Approach", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 19-21.
- Baxter, M. (1991), "Approximating Suboptimal Dynamic Equilibria", *Journal of Monetary Economics*, 27, 173-200.
- Bertsekas, D. (1976), *Dynamic Programming and Stochastic Control*, New York.
- Christiano, L.J. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation and by Value-Function Iteration", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 23-26.
- Coleman, W.J. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Policy-Function Iteration", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 27-29.
- Den Haan, W.J. und A. Marcet (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Parameterizing Expectations", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 31-34.
- Dennis, J.E. und R.B. Schnabel (1983), *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Englewood Cliffs.
- Gagnon, J.E. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Deterministic Extended Path", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 35-36.
- Hall, R.E. (1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanet Income Hypothesis: Theory and Evidence", *Journal of Political Economy*, 86, 971-987.
- Hansen, G.D. und T.J. Sargent (1988), "Straight Time and Overtime Equilibrium", *Journal of Monetary Economics*, 21, 281-308.
- Ingram, B.F. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Backsolving With an Expanded Shock Space", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 37-38.
- Kydland, F. und E. Prescott (1982), "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50, 1345-1370.
- Labadie, P. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Using a Recursive Mapping Based on Least Squares Projection", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 39-40.
- McGrattan, E. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 41-44.
- Sargent, T.J. (1979), *Macroeconomic Theory*, New York.
- Sargent, T.J. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge.
- Sims, C.A. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Backsolving With a Particular Nonlinear Form for the Decision Rule", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 45-47.
- Singleton, K.J. (1988), "Econometric Issues in the Analysis of Equilibrium Business Cycle Models", *Journal of Monetary Economics*, 21, 361-386.
- Stokey, N. und R.E. Lucas (1989), *Recurive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge.

- Tauchen, G. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Using Quadrature Methods and Value-Function Iterations", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 49-51.
- Taylor, J.B. und H. Uhlig (1990), "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 1-17.

Seit 1989 erschienene Diskussionsbeiträge:
Discussion papers released as of 1989/1990/1991:

- 1-89 **Klaus Schöler**, Zollwirkungen in einem räumlichen Oligopol
- 2-89 **Rüdiger Pethig**, Trinkwasser und Gewässergüte. Ein Plädoyer für das Nutzerprinzip in der Wasserwirtschaft
- 3-89 **Rüdiger Pethig**, Calculus of Consent: A Game-Theoretic Perspective. Comment
- 4-89 **Rüdiger Pethig**, Problems of Irreversibility in the Control of Persistent Pollutants
- 5-90 **Klaus Schöler**, On Credit Supply of PLS-Banks
- 6-90 **Rüdiger Pethig**, Optimal Pollution Control, Irreversibilities, and the Value of Future Information
- 7-90 **Klaus Schöler**, A Note on "Price Variation in Spatial Markets: The Case of Perfectly Inelastic Demand"
- 8-90 **Jürgen Eichberger and Rüdiger Pethig**, Constitutional Choice of Rules
- 9-90 **Axel A. Weber**, European Economic and Monetary Union and Asymmetries and Adjustment Problems in the European Monetary System: Some Empirical Evidence
- 10-90 **Axel A. Weber**, The Credibility of Monetary Target Announcement: An Empirical Evaluation
- 11-90 **Axel A. Weber**, Credibility, Reputation and the Conduct of Economic Policies Within the European Monetary System
- 12-90 **Rüdiger Ostermann**, Deviations from an Unidimensional Scale in the Unfolding Model
- 13-90 **Reiner Wolff**, Efficient Stationary Capital Accumulation Structures of a Biconvex Production Technology
- 14-90 **Gerhard Brinkmann**, Finanzierung und Lenkung des Hochschulsystems - Ein Vergleich zwischen Kanada und Deutschland
- 15-90 **Werner Güth and Rüdiger Pethig**, Illegal Pollution and Monitoring of Unknown Quality - A Signaling Game Approach
- 16-90 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen in einem zweidimensionalen räumlichen Wettbewerbsmarkt
- 17-90 **Rüdiger Pethig**, International Environmental Policy and Enforcement Deficits
- 18-91 **Rüdiger Pethig and Klaus Fiedler**, Efficient Pricing of Drinking Water
- 19-91 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen und Marktstrukturen im räumlichen Oligopol

- 20-91 **Axel A. Weber**, Stochastic Process Switching and Intervention in Exchange Rate Target Zones: Empirical Evidence from the EMS
- 21-91 **Axel A. Weber**, The Role of Policymakers' Reputation in the Ems Disinflations: An Empirical Evaluation
- 22-91 **Klaus Schöler**, Business Climate as a Leading Indicator? An Empirical Investigation for West Germany from 1978 to 1990
- 23-91 **Jürgen Ehlgen/Matthias Schlemper/Klaus Schöler**, Die Identifikation branchenspezifischer Konjunkturindikatoren
- 24-91 **Reiner Wolff**, On the Existence of Structural Saddle-Points in Variational Closed Models of Capital Formation
- 25-91 **Axel A. Weber**, Time Varying Devaluation Risk, Interest Rate Differentials and Exchange Rates in Target Zones: Empirical Evidence from the EMS
- 26-91 **Walter Buhr/Reiner Wolff**, Partial versus Global Optimization in Economic Dynamics: The Case of Recursive Programming
- 27-91 **Klaus Schöler**, Preisvariationen und beschränkte Informationen in einem räumlichen Oligopol
- 28-91 **Jürgen Ehlgen**, Lösen des stochastischen Wachstumsmodells durch Parametrisieren der Entscheidungsfunktion

