

Dechert, Andreas

**Working Paper**

## Fraktionale Kointegrationsbeziehungen zwischen Euribor-Zinssätzen

W.E.P. - Würzburg Economic Papers, No. 93

**Provided in Cooperation with:**

University of Würzburg, Department of Economics

*Suggested Citation:* Dechert, Andreas (2014) : Fraktionale Kointegrationsbeziehungen zwischen Euribor-Zinssätzen, W.E.P. - Würzburg Economic Papers, No. 93, University of Würzburg, Department of Economics, Würzburg

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/104965>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

# W. E. P.

---

**Würzburg Economic Papers**

No. 93

## Fraktionale Kointegrationsbeziehungen zwischen Euribor-Zinssätzen

Andreas Dechert<sup>(a)</sup>

<sup>(a)</sup>University of Würzburg  
November 2014

University of Würzburg  
Department of Economics  
Chair of Econometrics  
Sanderring 2, D-97070 Würzburg  
andreas.dechert@uni-wuerzburg.de

**Postal Address**

Andreas Dechert  
University of Würzburg, Department of Economics, Sanderring 2,  
97070 Würzburg, Germany  
Email: [andreas.dechert@uni-wuerzburg.de](mailto:andreas.dechert@uni-wuerzburg.de)

# Fraktionale Kointegrationsbeziehungen zwischen Euribor-Zinssätzen

Andreas Dechert

Julius–Maximilians–Universität Würzburg  
Volkswirtschaftliches Institut – Lehrstuhl für Ökonometrie

Erste Version: 18. April 2011

Diese Version: 25. November 2014

## Zusammenfassung

Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit sind Euribor-Zinssätze, zwischen denen wir fraktionale Kointegrationsbeziehungen vermuten. Dazu klären wir im ersten Schritt den Begriff der fraktionalen Integration und stellen sowohl semiparametrische als auch nicht-parametrische Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der Kointegrationsbeziehungen vor. Des Weiteren geben wir eine Möglichkeit zur Schätzung der Kointegrationsbeziehungen an. Diese Methoden dienen dazu, die Markterwartungshypothese zu überprüfen, da diese nach Campbell und Shiller (1987) bei  $p$  Anzahl nicht-stationären Zinszeitreihen  $p - 1$  Kointegrationsbeziehungen impliziert.

JEL-Classification: C32, C14, E43

Stichwörter: Fraktionale Integration, Fraktionale Kointegration, Markterwartungshypothese, Polynomiale Trends.

## 1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir uns mit der Modellierung von Zinssätzen im europäischen Interbankenhandel beschäftigen. Hierzu bietet das Feld der Zeitreihenanalyse ein weites Spektrum an Methoden an, um das Verhalten der Zinssätze und deren Beziehungen zueinander zu untersuchen und zu modellieren. Solche Modelle stellen ein wichtiges Instrument dar, um z.B. Aktionen von Zentralbanken zu beurteilen und deren Auswirkungen zu prognostizieren. Die Europäische Zentralbank kann zum einen das Verhalten von kurzfristigen Zinssätzen durch die Festlegung des Hauptrefinanzierungssatzes beeinflussen. Eine Frage ist nun, ob sich diese Beeinflussung auf längerfristige Zinssätze auswirkt bzw. wie sie sich auswirkt. Deswegen untersuchen wir in dieser Arbeit Zinssätze für Termingelder, die in einer Woche ab Abschluss fällig werden bis zu einer Fälligkeit in einem Jahr und versuchen, mit Hilfe der Zeitreihenanalyse deren Beziehung zueinander zu bestimmen. Ein theoretisches Modell über die Beziehungen zwischen Zinssätzen entwickelte Fisher mit der Markterwartungshypothese. Diese besagt, dass längerfristige Zinssätze sich als Durchschnitt der Erwartungswerte von kurzfristigen Zinssätzen zuzüglich einer Risikoprämie ergeben.

Wichtig in der Zeitreihenanalyse ist der Begriff der Integration. Man sagt, dass ein Prozess integriert ist vom Grad  $d$  (kurz  $I(d)$ ), falls dieser nach  $d$ -maliger Differenzenbildung einen stationären Prozess darstellt, also ein Prozess mit endlichem Erwartungswert

und einer Autokovarianz, die nur noch von der jeweiligen Ordnung abhängt. Im klassischen Sinn nimmt man an, dass  $d$  dabei eine ganze Zahl darstellt. Wir wollen in dieser Arbeit das Konzept der fraktionalen Integration vorstellen, die von dieser Annahme abrückt und annimmt, dass  $d$  jede beliebige reelle Zahl sein kann. Die sich daraus ergebenden Implikationen stellen wir u.a. im zweiten Abschnitt dieser Arbeit vor. Weiterhin geben wir mit dem Whittle-Schätzer eine Methode zur Bestimmung eines nicht-ganzzahligen Integrationsgrads an.

Im dritten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Modellierung der Beziehungen zwischen zweien und mehreren Zeitreihen. Dazu verwenden wir das Konzept der Kointegration, die besagt, dass die Linearkombination von nicht-stationären Zeitreihen ein stationäres Gleichgewicht umschreibt. Dieses von Engle und Granger (1987) entworfene Modell stellt wohl eines der meisten empirisch angewandten Methoden der Zeitreihenanalyse dar. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt insbesondere mit der Möglichkeit der fraktionalen Kointegration, d.h. dass wir auch hier für den Integrationsgrad der Linearkombinationen von nicht-stationären Zeitreihen keine ganze Zahl erwarten, was eine Verallgemeinerung des von Engle und Granger vorgeschlagenen Modells darstellt. Wir werden Methoden kennenlernen, wie man die Anzahl der Linearkombinationen schätzen und testen kann. Dazu verwenden wir die von Robinson und Yajima (2002) vorgeschlagene Rangschätzungs- und Rangselektionsmethode in der von Nielsen und Shimotsu (2007) weiterentwickelten Version, die auf einer multivariaten Version des im zweiten Abschnitt vorgestellten Whittle-Schätzers aufbaut. Neben diesen semiparametrischen Verfahren verwenden wir in dieser Arbeit auch mit dem VR-Ansatz ein nicht-parametrisches Verfahren, das von Nielsen (2010) vorgeschlagen wurde. Dieser bietet u.a. auch die Möglichkeit, die Parameter der jeweiligen Kointegrationsbeziehung zu schätzen. In einer Monte-Carlo-Simulation untersuchen wir anschließend speziell die Eigenschaften des VR-Ansatzes.

Im vierten Abschnitt versuchen wir, die Markterwartungshypothese mit dem Konzept der Kointegration zu verbinden. Campbell und Shiller (1987) gehörten zu den ersten, die dies zeigen konnten und anwendeten. Falls Zinssätze nicht-stationäre Einheitswurzelprozesse darstellen, müssen unter Gültigkeit der Markterwartungshypothese kurz- und langfristige Zinssätze kointegriert sein. Diesen Gedanken werden wir in Anlehnung an die Arbeit von Hall, Andersen und Granger (1992) versuchen, im vierten Abschnitt nachzuvollziehen. Dies dient auch zur Erwartungsbildung für den fünften Abschnitt, in dem wir die vorgestellten Verfahren auf Euribor-Zinssätze anwenden werden.

## 2 Fraktionale Integration

### 2.1 Definition

In diesem Abschnitt wollen wir uns einen kurzen Überblick verschaffen, was fraktionale Integration bedeutet und wie man den Integrationsparameter  $d$  mit Hilfe des Whittle-Schätzers bestimmen kann. Ansatzpunkt der fraktionalen Integration ist das bekannte ARIMA-Modell nach Box und Jenkins (1976). Ein Prozess  $y_t$  kann demnach durch die Prozessgleichung

$$\theta(L)\Delta^d y_t = \phi(L)\varepsilon_t \tag{1}$$

beschrieben werden. Dabei gilt, dass  $\varepsilon_t \sim IID$ ,  $\theta(L)$  ist die Autoregressive und  $\phi(L)$  die Moving-Average Struktur des Prozesses.  $d$  ist der Integrationsgrad und kann nach Box

und Jenkins nur die ganzzahligen Ausprägungen 0,1,2... annehmen. Unabhängig voneinander hatten Hosking (1981) und Granger (1980) die Idee, dass der Integrationsgrad eines Prozesses jede beliebige Zahl annehmen kann. Nehmen wir z.B. ein fraktional integriertes Rauschen an, d.h. die Prozessgleichung soll weder AR- noch MA-Terme haben. Somit kann man für ein fraktional integriertes Rauschen folgende MA( $\infty$ )-Struktur mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung finden:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \Delta^{-d} \varepsilon_t = \varepsilon_t + d\varepsilon_{t-1} + \frac{d(d+1)}{2!} \varepsilon_{t-2} + \frac{d(d+1)(d+2)}{3!} \varepsilon_{t-3} + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^t \frac{\Gamma(d+k)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} \cdot \varepsilon_{t-k}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

In Abbildung 1 vergleichen wir die jeweiligen Terme der MA( $\infty$ )-Darstellung von zwei fraktional integrierten Prozessen mit  $d = 0,5$  und  $d = 0,3$  mit einem AR(1)-Prozess, dessen partieller Autokorrelationsparameter 0,9 beträgt.

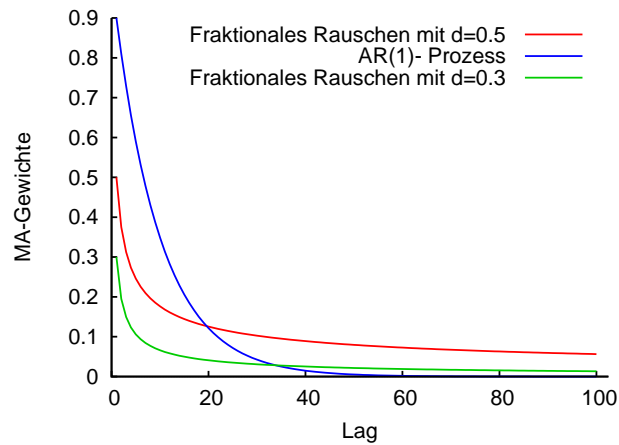


Abb. 1: Vergleich der Gewichte der Moving-Average-Darstellung

Bei einem fraktional integrierten Rauschen haben selbst tendenziell weit zurückliegende Schocks ein größeres Gewicht auf den gegenwärtigen Wert von  $y_t$  als bei dem AR-Prozess. Man spricht deswegen auch von einer größeren Persistenz bei fraktional integrierten Prozessen. Die Persistenz nimmt mit steigendem  $d$  zu, wie man beim Vergleich der beiden fraktional integrierten Rauschen in Abbildung 1 feststellen kann. Um dies zu illustrieren sind in den Abbildungen 2 bis 5 Beispiele für fraktional integrierte Prozesse abgebildet, die als Integration des gleichen standardnormalverteilten Störterms  $\varepsilon_t$  entstanden sind.

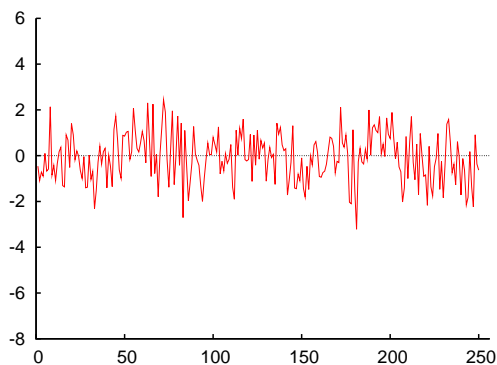


Abb. 2:  $y_t = \Delta^{-0,3}\varepsilon_t$

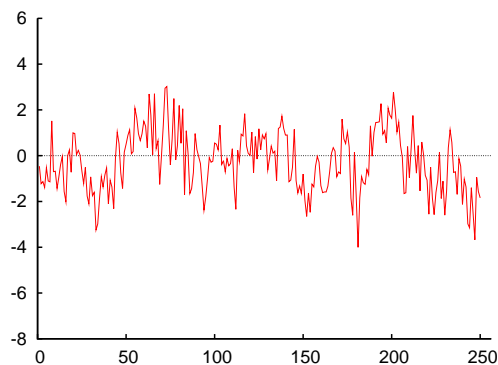


Abb. 3:  $y_t = \Delta^{-0,5}\varepsilon_t$

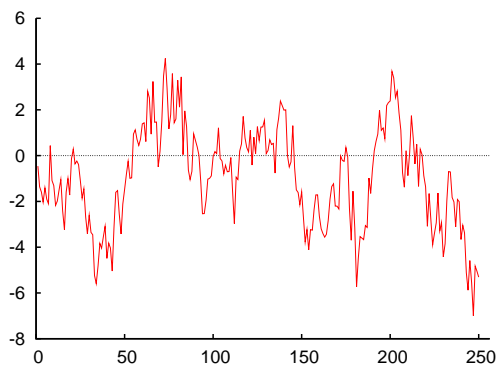


Abb. 4:  $y_t = \Delta^{-0,8}\varepsilon_t$

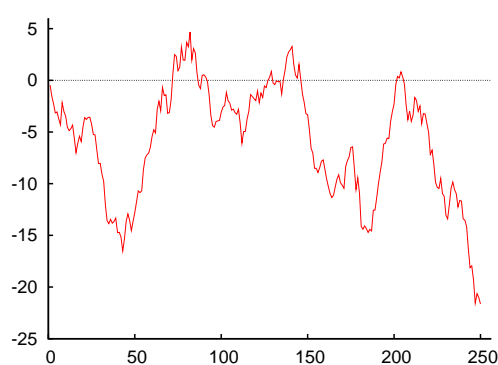


Abb. 5:  $y_t = \Delta^{-1,2}\varepsilon_t$

Fraktional integrierte Prozesse werden auch als Prozesse mit langem Gedächtnis bezeichnet oder als Long-Memory Prozesse. Diese Eigenschaft wird an dem Kriterium festgemacht, dass die Summe über alle absoluten Autokovarianzen gegen unendlich wächst. Dies gilt für alle Prozesse, deren Integrationsgrad größer als null ist. Beträgt er 0, so hat der Prozess überhaupt kein Gedächtnis. Für die Fälle  $d > 0,5$  ist ein Prozess nicht-stationär, aber er besitzt eine Mittelwerttendenz, so lange der Integrationsgrad kleiner als 1 ist. Granger (1981) gibt als Grund für das Vorliegen eines langen Gedächtnis an, dass Individuen nicht perfekt auf neue Information reagieren können und dass es deswegen unter Umständen lange Zeit benötigt, bis Innovationen korrekt eingepreist worden sind. Auch können Spekulationen von Marktteilnehmern als Grund für lange Anpassungsprozesse angenommen werden.

## 2.2 Der Whittle-Schätzer

Da der Integrationsgrad einer Zeitreihe in der Praxis unbekannt ist, müssen wir versuchen, diesen zu schätzen. Dazu existieren verschiedene Schätzmethoden, wobei wir uns hier auf den approximativen Whittle-Schätzer konzentrieren, der einen Maximum-Likelihood Schätzer darstellt. Viele empirische Studien verwenden dabei die lokale semiparametrische Version nach Robinson (1995). Diese hat aber das Problem, dass er nur für stationäre Zeitreihen anwendbar ist. Im Folgenden wollen wir den exakten lokalen Whittle (ELW)-Schätzer nach Shimotsu und Phillips (2006) vorstellen, der für alle Werte von  $d$  anwendbar

und somit auch für nicht-stationäre Zeitreihen gilt. Dazu definieren wir in Abhängigkeit der Fourierfrequenz  $\lambda_j$  die diskrete Fouriertransformation  $w_y(\lambda_j)$  und das Periodogramm  $I_y(\lambda_j)$  einer Zeitreihe  $y_t$  für  $t = 1, \dots, T$ :

$$w_y(\lambda_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{t=1}^T y_t \exp(it\lambda_j), \quad \lambda_j = \frac{2\pi j}{T}, \quad j = 0, 1, \dots, T \quad (3)$$

$$I_y(\lambda_j) = w_y(\lambda_j) \overline{w_y(\lambda_j)}. \quad (4)$$

Das Spektrum  $f_y(\lambda)$  einer Zeitreihe stellt das theoretische Analogon zum empirischen Periodogramm dar und kann durch dieses geschätzt werden. ARFIMA( $p, d, q$ )-Prozesse haben dabei die Eigenschaft, dass die Spektraldichte im Bereich  $\lambda \rightarrow 0+$  folgende Konvergenz aufweist

$$f_y(\lambda) \sim G \cdot \lambda^{-2d}. \quad (5)$$

Die Abbildungen 6 und 7 versuchen dies anhand des logarithmierten Spektrums zu zeigen. Das logarithmierte Spektrum eines ARFIMA-Prozesses setzt sich aus der Summe des logarithmierten ARMA-Spektrums und des Spektrums des fraktionalen Prozesses zusammen. Schränken wir aber den Teil des zu betrachtenden Spektrums auf  $\lambda \rightarrow 0+$  ein, dann hängt das Spektrum in diesem engen Bereich nur vom Spektrum des fraktionalen Teils ab, das wiederum im Wesentlichen von  $d$  getrieben wird. Die ARMA( $p, q$ )-Bestandteile des Gesamtspektrums degenerieren zu einer konstanten Größe  $G$ .

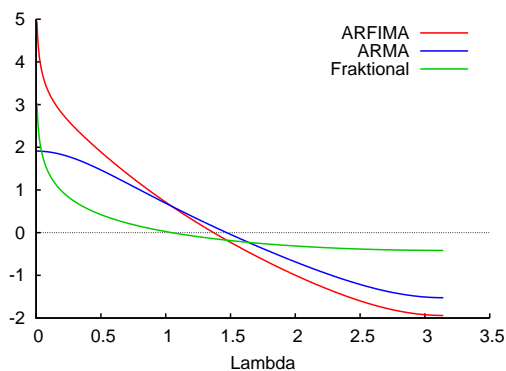


Abb. 6: Log. Spektrum für  $\lambda \in [0, \pi]$

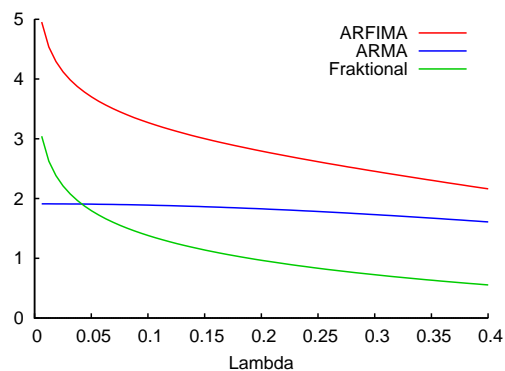


Abb. 7: Log. Spektrum für  $\lambda \rightarrow 0+$

Der ELW-Schätzer macht sich diesen Umstand zunutze und lässt sich wie folgt konstruieren:

$$\hat{d} = \arg \min R(d), \quad R(d) = \log \hat{G}(d) - 2d \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \lambda_j, \quad \hat{G}(d) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I_{\Delta^d y}(\lambda_j). \quad (6)$$

In einem engen Bereich wird das Spektrum in Abhängigkeit des Parameters  $d$  an das Periodogramm über eine Bandbreite  $m$  angepasst.  $m$  stellt dabei die Anzahl der für die Schätzung verwendeten Fourierfrequenzen dar. Für den Schätzwert  $\hat{d}$  gelten dann folgende asymptotische Eigenschaften:

$$\sqrt{m}(\hat{d} - d) \sim N(0; 1/4). \quad (7)$$



Bei dem ELW-Schätzer handelt es sich um einen semiparametrischen Schätzer, da die Ordnungen  $p$  und  $q$  nicht a priori bekannt sein müssen. Die Konsistenz des Schätzers wird durch eine geeignete Wahl des Bandbreitenparameters  $m$  gewährleistet. Dabei gilt, dass die Varianz des ELW-Schätzers mit steigendem  $m$  abnimmt, die Konsistenz aber bei einem ARFIMA-Prozess nicht mehr gewährleistet ist. Der Schätzer ist anfällig für das Vorliegen von Trends, deswegen schlägt Shimotsu (2010) vor, die zu untersuchende Zeitreihe vor der Schätzung durch eine Regression auf eine Konstante und einen Trend zu bereinigen. In Simulationen konnte er feststellen, dass die Konsistenz des ELW-Schätzers nicht durch die Überspezifizierung der Trendordnung beeinträchtigt wird. Probleme existieren nur, falls kein Trend berücksichtigt wird.

### 3 Fraktionale Kointegration

Im klassischen Sinn versteht man unter Kointegration, dass mindestens eine bis maximal  $p - 1$  Linearkombinationen bei Anzahl  $p$  nicht-stationären  $I(1)$ -Variablen existieren, die stationär und damit  $I(0)$  sind. Wir bezeichnen mit  $r$  die Anzahl der Kointegrationsbeziehung bzw. den Kointegrationsrang. Die Parameter der  $r$  Linearkombinationen fassen wir in der  $p \times r$ -dimensionalen Kointegrationsmatrix  $\beta$  zusammen und die beobachteten Zeitreihen im Vektor  $\mathbf{y}_t$ . Die Multiplikation  $\beta' \mathbf{y}_t$  ergibt dann die Abweichung vom Gleichgewicht der Variablen im kointegrierten System. Wir bezeichnen diese auch kurz als Residuum. Diesen Ansatz versuchen wir nun mit Hilfe der fraktionalen Integration zu verallgemeinern. Nehmen wir nun für den  $p$ -dimensionalen vektoriellen Prozess  $\mathbf{y}_t$  die Form

$$\Delta(L; d_1, \dots, d_p) \mathbf{y}_t = \mathbf{u}_t = \mathbf{C}(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (8)$$

an. Dabei ist  $\Delta(L; d_1, \dots, d_p) = \text{diag} \left[ (1 - L)^{d_1}, \dots, (1 - L)^{d_p} \right]$ . In dieser Definition ist es also möglich, dass die einzelnen Komponenten von  $\mathbf{y}_t$  einen unterschiedlichen Integrationsparameter haben. Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Komponenten  $I(d)$  sind, was zum einen die Analyse erheblich vereinfacht und keine Einschränkung für die im empirischen Teil zu untersuchenden Zeitreihen darstellt. Zusätzlich nehmen wir an, dass  $\mathbf{u}_t$  ein stationärer stochastischer vektorieller Prozess mit einer Spektralmatrix  $\mathbf{f}_u(\lambda)$  und  $\mathbf{f}_u(0) = \mathbf{G}$  beschreibt. Des Weiteren soll die Kovarianzmatrix von  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  vollen Rang haben. Die Matrix  $\mathbf{C}(L)$  soll eine mögliche Autokorrelation von  $\mathbf{y}_t$  berücksichtigen. Für die Matrix  $\mathbf{C}(1)$  nehmen wir an, dass sie den Rang  $p - r \leq p$  besitzt. Wie im klassischen Modell lässt sich aussagen, dass  $r$  Kointegrationsbeziehungen existieren und dass das System  $\mathbf{y}_t$  durch  $p - r$  Anzahl gemeinsamer stochastischer Trends getrieben wird. Es lässt sich folgender Modellrahmen in Anlehnung an Phillips aufstellen:

$$\begin{aligned} \Delta^{d-b}(\mathbf{y}_{1t} - \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{y}_{2t}) &= \boldsymbol{\nu}_{1t} \\ \Delta^d \mathbf{y}_{2t} &= \boldsymbol{\nu}_{2t} \quad \text{für } t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (9)$$

Der Vektor  $\mathbf{y}_{1t}$  hat dabei  $r$  Komponenten und  $\mathbf{y}_{2t}$   $p - r$ . Der Parameter  $b$  stellt in diesem Kontext den Kointegrationsgrad dar, d.h. wie stark der Grad der Integration des Systems durch das Kointegrationsmodell reduziert werden kann. Falls wirklich Kointegration vorliegt, muss  $d > b > 0$  sein und für  $d = b = 1$  befinden wir uns wieder im klassischen Modell. Damit stellt die fraktionale Kointegration eine Verallgemeinerung der klassischen dar. Für das Modell (9) lautet die Kointegrationsmatrix  $\beta = [\mathbf{I}_r, -\boldsymbol{\gamma}]'$ .

### 3.1 Der multivariate Whittle-Ansatz

Auf der Grundlage der multivariaten Erweiterung des Whittle-Schätzers haben Robinson und Yajima (2002) ein Schätzverfahren für den Kointegrationsrang  $r$ , das in seinen Grundzügen auf der Arbeit von Phillips und Ouliaris (1988) aufbaut. Die Bestimmung des Kointegrationsrangs mit dem Whittle-Ansatz birgt die Vorteile, dass nicht wie bei anderen Verfahren die Residuen der Kointegrationsbeziehung bestimmt werden müssen. Damit kann man den Problemen bei der Anwendung von Schätzprinzipien im fraktionalem Kontext aus dem Weg gehen. Des Weiteren können wir den Ansatz wie bei der univariaten Bestimmung des Integrationsgrads semiparametrisch anwenden und damit dem Problem der Autokorrelation entgegentreten.

Betrachten wir ein System von Zeitreihen  $\mathbf{y}$ , dessen Bestandteile  $j$  den möglicherweise ungleichen Integrationsparameter  $d_j$  besitzen, dann lässt sich die Spektralmatrix von  $\mathbf{y}$  annähern mit

$$\mathbf{f}(\lambda) \sim \mathbf{\Lambda}(\lambda)\mathbf{G}\mathbf{\Lambda}^*(\lambda) \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0+, \quad (10)$$

wobei  $\mathbf{\Lambda}(\lambda) = \text{diag} \left[ \exp(i\pi d_1/2)\lambda^{-d_1}, \dots, \exp(i\pi d_p/2)\lambda^{-d_p} \right]$ . Dieser Ausdruck vereinfacht sich erheblich, falls jede Komponente von  $\mathbf{y}_t$  den gleichen Parameter  $d$  aufweist:

$$\mathbf{f}(\lambda) \sim \mathbf{G} \cdot \lambda^{-2d} \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0+. \quad (11)$$

Die Spektralmatrix  $\mathbf{f}(\lambda)$  degeneriert ähnlich wie im univariaten Fall gegen eine konstante Matrix  $\mathbf{G}$  und hängt nur noch vom gemeinsamen Integrationsparameter  $d$  ab. Mit dieser Kenntnis konnten Nielsen und Shimotsu (2007) eine gemeinsame Verteilung für die univariaten Schätzergebnisse  $\hat{d}_j$  angeben mit

$$\sqrt{m}(\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d}) \sim N \left( \mathbf{0}, 1/4 \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{G} \odot \mathbf{G})\mathbf{D}^{-1} \right), \quad (12)$$

wobei  $\mathbf{D} = \text{diag} [G_{11}, \dots, G_{pp}]$  und  $\odot$  das Hadamard-Produkt von Matrizen darstellt. Für die in aller Regel unbekannt Matrix  $\mathbf{G}$  verwenden wir die Schätzfunktion  $\hat{\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{d}}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \text{Re} \left[ \mathbf{I}_{\Delta(L; \hat{\mathbf{d}})} \mathbf{y}(\lambda_j) \right]$ .

#### 3.1.1 Test auf Gleichheit der Integrationsparameter

Da wir in unserer Modellbeschreibung davon ausgegangen sind, dass der Integrationsparameter  $d$  für alle Komponenten des Systems  $\mathbf{y}_t$  gleich ist, bietet es sich an, die geschätzten Integrationsparameter auf Gleichheit zu prüfen. Hierfür stehen uns zwei Testansätze zur Verfügung. Zum einen ein paarweiser Test mit der Hypothese

$$H_{ij} : \quad d_i = d_j \quad \text{für } i, j = 1, \dots, p \quad ; \quad i \neq j$$

mit der Teststatistik

$$\hat{T}_{ij} = \frac{\sqrt{m}(\hat{d}_i - \hat{d}_j)}{\sqrt{\{1/2[1 - \hat{G}_{ij}^2/(\hat{G}_{ii}\hat{G}_{jj})]\} + h(n)}}. \quad (13)$$

$h(n)$  ist dabei eine Funktion in Abhängigkeit der verwendeten Bandbreite  $m$  und wird in dieser Arbeit mit  $m^\nu$ ;  $\nu \in [-0,45; -0,05]$  bestimmt. Diese Spezifikation genügt den

Regularitätsanforderungen nach Robinson und Yajima (2002) bzw. Nielsen und Shimotsu (2007). Auch lässt sich ein gemeinschaftlicher Test mit der Hypothese

$$H_0 : d_j = d^* \quad \text{mit } j = 1, \dots, p$$

angeben, der sich dann wie folgt berechnet:

$$\widehat{T}_0 = m(\mathbf{S}\widehat{\mathbf{d}})' \left[ \mathbf{S} \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{D}}^{-1} (\widehat{\mathbf{G}} \odot \widehat{\mathbf{G}}) \widehat{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{S}' + h(n)^2 \mathbf{I}_{p-1} \right]^{-1} (\mathbf{S}\widehat{\mathbf{d}}) \quad (14)$$

mit der Matrix  $\mathbf{S} = [\mathbf{I}_{p-1}, -\boldsymbol{\iota}]'$  und dem  $(p-1)$ -dimensionalen Vektor  $\boldsymbol{\iota} = [1, \dots, 1]'$ . Dabei ist zu beachten, dass die Verteilung der beiden möglichen Testansätze vom Vorliegen einer oder mehrerer Kointegrationsbeziehungen abhängen. Liegt mindestens eine Beziehung vor, dann konvergieren  $\widehat{T}_{ij}$  und  $\widehat{T}_0$  gegen 0. Ist dies hingegen nicht der Fall, so gilt

$$\widehat{T}_{ij} \sim N(0; 1) \quad \text{und} \quad \widehat{T}_0 \sim \chi_{p-1}^2. \quad (15)$$

### 3.1.2 Die Bestimmung des Kointegrationrangs

Wir nehmen nun weiterhin an, dass die einzelnen Komponenten integriert vom Grad  $d^*$  sind. Bspw. kann man für  $d^*$  den Mittelwert der Komponenten von  $\widehat{\mathbf{d}}$  verwenden. Dann können wir  $\mathbf{G}$  schätzen mit

$$\widehat{\mathbf{G}}(d^*) = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} \text{Re} \left[ \mathbf{I}_{\Delta(L; d^*)} \mathbf{y}(\lambda_i) \right] \quad (16)$$

mit  $I_{\Delta(L; d^*)} \mathbf{y}(\lambda_i)$  als Periodogramm von  $[\Delta^{d^*} y_{1t}, \dots, \Delta^{d^*} y_{pt}]'$ . Der Schätzer  $\widehat{\mathbf{G}}(d^*)$  verwendet dabei einen weiteren Bandbreitenparameter  $m_1$ , um den Komplikationen entgegen zu treten, die bei der Schätzung von  $\mathbf{G}$  auftreten.

Aufgrund des Zusammenhangs zwischen  $r$  und  $\text{Rg}(\mathbf{G}) = p - r$ , lässt sich auf Basis  $\widehat{\mathbf{G}}(d^*)$  der Kointegrationsrang direkt schätzen.

Seien  $\widehat{\delta}_1 \geq \widehat{\delta}_2 \geq \dots \geq \widehat{\delta}_p$  die geschätzten Eigenwerte von  $\widehat{\mathbf{G}}(d^*)$ , dann können wir für die hypothetischen Kointegrationsränge  $r_0 = 1, \dots, p - 1$  folgende Statistiken  $r$  ermitteln:

$$\widehat{\pi}_{r_0} = \frac{\sum_{a=p-r_0+1}^p \widehat{\delta}_a}{\sum_{a=1}^p \widehat{\delta}_a} \quad (17)$$

$$s_{r_0}^2 = \frac{\left( \sum_{a=p-r_0+1}^p \widehat{\delta}_a \right)^2 \sum_{a=1}^{p-r_0} \widehat{\delta}_a^2 + \left( \sum_{a=1}^{p-r_0} \widehat{\delta}_a \right)^2 \sum_{a=p-r_0+1}^p \widehat{\delta}_a^2}{\left( \sum_{a=1}^p \widehat{\delta}_a \right)^4}. \quad (18)$$

Die Nullhypothese  $r = r_0$  wird angenommen, falls das  $100(1 - \alpha)\%$ -Quantil von  $\pi_{r_0}$

$$CI(\alpha, r_0) = \widehat{\pi}_{r_0} + s_{r_0} z_\alpha / m_1 \quad (19)$$

kleiner als der Schwellenwert  $0,1/p$  ist.  $z_\alpha$  steht für das  $100(1 - \alpha)\%$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

Alternativ haben Robinson und Yajima (2002) ein Rangselektionsverfahren vorgeschlagen.  $r$  wird dabei geschätzt durch

$$\widehat{r} = \arg \min_{u=0, \dots, p-1} L(u), \quad (20)$$

wobei die Zielfunktion  $L(u)$  durch

$$L(u) = v(n)(p - u) - \sum_{a=1}^{p-u} \hat{\delta}_a \quad (21)$$

definiert ist. Beide Methoden wurden von Nielsen und Shimotsu (2007) in Simulationen getestet mit dem Ergebnis, dass die direkte Rangschätzungsmethode den Kointegrationsrang eher unterschätzt, da der Konfidenzwert  $CI$  bei  $r \geq 2$  selten unter dem Schwellenwert liegt. Die Rangselektionsmethode schneidet hingegen besser ab. Sie hängt aber relativ stark vom gewählten Parameter  $v(n)$  ab und Nielsen und Shimotsu (2007) empfehlen, die Selektionsmethode mit mehreren Parameterkonstellationen durchzuführen.

### 3.2 Der Varianzverhältnistest-Ansatz

Nielsen (2010) schlägt mit dem Varianzverhältnistest-Ansatz (VR-Ansatz) einen nicht-parametrischen Testansatz vor, um den Kointegrationsrang zu bestimmen. Sein Vorschlag basiert auf seiner 2008 veröffentlichten Arbeit, in der er einen nicht-parametrischen Einheitswurzeltest entwickelte. Nehmen wir an, dass wir eine Zeitreihe  $y_t \sim I(d)$  mit  $d > 0,5$  und damit einen nicht-stationären Prozess beobachten. Dieser genügt unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen für  $\varepsilon_t$  und  $\sigma_y > 0$ , falls  $T \rightarrow \infty$ :

$$T^{1/2-d} y_{\lfloor sT \rfloor} \Rightarrow \sigma_y W_d(s), \quad 0 < s \leq 1. \quad (22)$$

$W_d(s)$  umschreibt hierbei die fraktionale Standard-Brownsche Bewegung nach Typ II mit dem Integrationsparameter  $d$ , welche von Marinucci und Robinson (1999) definiert wurde. Der Parameter  $\sigma_y$  stellt dabei einen Störparameter dar, der abhängig ist von der genauen Modellspezifikation von  $y_t$ , d.h. von möglichen AR- und MA-Teilen in der Prozessgleichung. Weiterhin definieren wir den Prozess  $\tilde{y}_t = \Delta^{d_1} y_t$  mit  $d_1 > 0$ . Dieser ist eine fraktionale Integration von  $y_t$  und ist per Konstruktion integriert vom Grad  $d + d_1$ . Für diesen gilt dementsprechend auch die in (22) beschriebene Konvergenz. Diese kann man dazu verwenden, um einen Grenzwert für das zweite unzentrierte Moment von  $y_t$  und  $\tilde{y}_t$  anzugeben. Die Division dieser beiden Momente ergibt den Varianzverhältnistest  $\rho(d_1)$

$$T^{2d} \sum_{t=1}^T y_t^2 \xrightarrow{D} \sigma_y^2 \int_0^1 W_d(s)^2 ds \quad (23)$$

$$\rho(d_1) = T^{2d_1} \frac{\sum_{t=1}^T y_t^2}{\sum_{t=1}^T \tilde{y}_t^2} \xrightarrow{D} \frac{\int_0^1 W_d(s)^2 ds}{\int_0^1 W_{d+d_1}(s)^2 ds}. \quad (24)$$

Das Erfreuliche an der Teststatistik ist, dass der Störparameter  $\sigma_y^2$  durch die Division der beiden zweiten Momente verschwindet. Somit muss kein Parameter spezifiziert werden, um eine mögliche Autokorrelation zu berücksichtigen, wie z.B. beim erweiterten Dickey-Fuller Test.

Der Parameter  $d_1$  bestimmt die Verteilung des durchgeführten Tests. Nielsen (2008) kam zu dem Schluss, dass die Wahl  $d_1 = 0,1$  am besten ist, da dann die Macht des Tests am größten ist. Interessant ist noch  $d_1 = 1$ , da dann die Teststatistik dem LM-Test nach Breitung und Hassler (2002) entspricht.

Betrachten wir nun wieder Fall, dass der vektorielle Prozess  $\mathbf{y}_t$  möglicherweise kointegriert ist. Dann lässt sich die Statistik berechnen

$$\mathbf{R}_T(d_1) = \mathbf{A}_T \mathbf{B}_T^{-1}, \quad (25)$$

die sich aus den gemischten Produkten  $\mathbf{A}_T = \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t'$  und  $\mathbf{B}_T = \sum_{t=1}^T \tilde{\mathbf{y}}_t \tilde{\mathbf{y}}_t'$  zusammensetzt. Seien  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$  die aufsteigend sortierten Eigenwerte von  $\mathbf{R}_T(d_1)$ , die sich als Lösung des Eigenwert-Problems

$$|\lambda \mathbf{B}_T - \mathbf{A}_T| = 0 \quad (26)$$

bestimmen lassen. Sei  $\boldsymbol{\eta}_j$  der zum Eigenwert  $\lambda_j$  gehörende Eigenvektor, dann ergeben sich die Eigenwerte als

$$\lambda_j = \frac{\boldsymbol{\eta}_j' \mathbf{A}_T \boldsymbol{\eta}_j}{\boldsymbol{\eta}_j' \mathbf{B}_T \boldsymbol{\eta}_j}, \quad \text{für } j = 1, \dots, p. \quad (27)$$

Das Verhalten der einzelnen Eigenvektoren lässt sich dahingehend charakterisieren, dass, wenn der Vektor  $\boldsymbol{\eta}_j$  nicht zu dem Kointegrationsraum aufspannenden Vektorraum gehört, der Eigenwert  $\lambda_j$  gegen 0 geht mit der Konvergenzrate  $O_P(T^{-2d_1})$ , ansonsten konvergiert er gegen 0 mit der Rate  $O_P(T^{\max(2d-2b+2d_1, 1)})$  für den Fall  $d-b < 0,5$  und  $O_P(T^{-2d_1})$  für  $d-b > 0,5$ . Damit erwarten wir, dass die Teststatistik lediglich für den Fall geeignet ist, dass das Residuum der Kointegrationsbeziehung stationär ist, da ansonsten die einzelnen Eigenvektoren, die zum Kointegrationsraum gehören, nicht identifizierbar sind. In einer Simulation konnte Nielsen (2010) zeigen, dass die Teststatistik aber auch in Situationen mit  $d-b < 0,5$  eine gewisse Macht hat, Kointegrationsbeziehungen aufzuzeigen.

Dieses Statistik lässt sich bei Vorliegen eines deterministischen Trends oder eines Driftparameters korrigieren, indem man vorher eine Regression der Zeitreihe auf eine Konstante und einen Trend durchführt und die Statistik auf Basis der daraus entstandenen Residuen berechnet.

Damit lässt sich nun eine Teststatistik einführen

$$\Lambda_{p,r}(d_1) = T^{2d_1} \sum_{j=1}^{p-r} \lambda_j, \quad r = 0, 1, \dots, p-1, \quad (28)$$

mit der man den Kointegrationsrang  $r$  testen kann. Die Verteilung konnte von Nielsen (2010) in Abhängigkeit des Parameters  $d_1$  und des Vorliegens von deterministischen Trends angegeben werden mit

$$\Lambda_{p,r}(d_1) \xrightarrow{D} \text{tr} \left\{ \int_0^1 \mathbf{B}_d^{p-r}(s) \mathbf{B}_d^{p-r}(s)' ds \left[ \mathbf{B}_{d+d_1}^{p-r}(s) \mathbf{B}_{d+d_1}^{p-r}(s)' \right]^{-1} \right\}. \quad (29)$$

$\mathbf{B}_d^{p-r}(s)$  stellt dabei eine  $(p-r)$ -dimensionale Brownsche Bewegung mit dem Integrationsparameter  $d$ . Diese ist je nach Situation, ob ein Mittelwert ungleich 0 oder eines linearen Trends ist, durch eine Regression bereinigt. Nielsen (2010) gibt kritische Werte für die Fälle, dass keine deterministischen Terme in  $\mathbf{y}_t$  enthalten sind, sowie ein Niveauparameter und einen linearen Trend an. Im empirischen Teil dieser Arbeit nehmen wir für die Euribor-Zinssätze einen polynomialen Trend an. Für diese Situation ermitteln wir kritische

Werte mit einer Simulation mit 100.000-facher Wiederholung. Diese ist so aufgebaut, dass wir  $p - r$  Anzahl unabhängige standardnormalverteilte Störterme erzeugen und diese mit dem Parameter  $d = 1$  integrieren. Danach führen wir einzelne KQ-Regressionen auf die  $p - r$  Einheitswurzelprozesse durch mit den Regressoren  $\delta^q = [1, t, t^2]$  für die Situation mit quadratischem Trend und  $\delta^c = [1, t, t^2, t^3]$  mit einem kubischen Trend. Danach ermitteln wir die Teststatistik (28). Die kritischen Werte sind in den Tabellen 1 und 2 angegeben.

Tab. 1: Kritische Werte bei Vorliegen eines quadratischen Trends

$d_1$	$\alpha$	$p - r$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0,1	10%	2,04	4,02	6,05	8,12	10,24	12,41	14,62	16,87
	5%	2,08	4,09	6,12	8,20	10,32	12,50	14,70	16,95
	1%	2,18	4,21	6,26	8,35	10,48	12,65	14,87	17,13
1	10%	431,42	998,70	1802,5	2910,9	4378,2	6247,6	8558,1	11368
	5%	530,59	1154,9	2025,9	3207,5	4748,5	6721,2	9121,6	12038
	1%	781,00	1521,3	2517,8	3863,0	5554,9	7744,6	10287	13458

Tab. 2: Kritische Werte bei Vorliegen eines kubischen Trends

$d_1$	$\alpha$	$p - r$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0,1	10%	2,12	4,19	6,29	8,43	10,61	12,83	15,09	17,39
	5%	2,17	4,25	6,36	8,51	10,69	12,91	15,17	17,47
	1%	2,25	4,36	6,50	8,65	10,84	13,07	15,34	17,64
1	10%	677,28	1494,6	2579,8	4002,4	5846,5	8109,0	10899	14202
	5%	817,75	1701,5	2868,3	4363,8	6289,4	8661,3	11543	14983
	1%	1146,9	2175,0	3486,8	5177,2	7245,1	9830,2	12873	16582

Festzuhalten bleibt, dass auch der VR-Ansatz lediglich einen Testansatz für die Anzahl der vorliegenden Kointegrationsbeziehungen  $r$  darstellt. Es lässt sich zwar aus den Eigenvektoren der  $r$  größten Eigenwerte des Problems (26) ein Kointegrationsraum bestimmen, doch bietet der VR-Ansatz keine Möglichkeit, die Parameter zu testen wie im klassischen Johansen-Modell. Auch lässt sich die Konsistenz der Schätzung aus diesem Grund nicht zeigen. Dennoch konnte Nielsen (2010) beweisen, dass für  $T \rightarrow \infty$  der Winkel zwischen dem wahren Kointegrationsraum und des durch den VR-Ansatz geschätzten gegen 0 konvergiert und damit eine brauchbare Schätzung liefert. Im empirischen Teil geben wir für die jeweils angenommenen Kointegrationsbeziehungen die geschätzten Parameter an. Dazu wenden wir die Normalisierung nach Phillips an, um die Interpretation zu erleichtern. Seien  $\boldsymbol{\eta}(r) = [\boldsymbol{\eta}_{p-r}, \dots, \boldsymbol{\eta}_p]$  die in einer  $(p \times r)$ -Matrix zusammengefassten Eigenvektoren zu den  $r$  größten Eigenwerten. Dann schätzen wir den Kointegrationsraum mit

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\eta}(r) \left\{ \left[ \mathbf{I}_r, \mathbf{0}_{r \times (p-r)} \right] \cdot \boldsymbol{\eta}(r) \right\}^{-1}. \quad (30)$$

### 3.3 Monte-Carlo Simulationen

Im folgenden Abschnitt wollen wir die Eigenschaften des bereits vorgestellten VR-Ansatzes in mehreren Simulationen untersuchen. Wir nehmen ein bivariates fraktional integriertes System von Zeitreihen an

$$\begin{aligned}
 y_{1,t} &= \Delta^{-d}u_{1,t} \\
 y_{2,t} &= y_{1t} + \Delta^{-(d-b)}u_{2,t} \quad \text{für } t = 1, \dots, T \\
 u_{j,t} &= 0,5u_{j,t-1} + \varepsilon_{j,t} \quad \varepsilon_{j,t} \sim IID(0;1) \quad \text{für } j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Die Störterme sollen einen AR(1)-Prozess mit  $\theta = 0,5$  beschreiben. Für beide Zeitreihen fixieren wir  $d = 1$  und simulieren das System jeweils 10.000-mal in Abhängigkeit des Parameters  $b$ . Die Ergebnisse in den Tabellen 3 und 4 bezeichnen mit  $\Lambda_{2,0}(0,1)$  die relative Häufigkeit der Annahme einer Kointegrationsbeziehung zwischen  $y_{1,t}$  und  $y_{2,t}$  bei einer angenommenen Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% und dem Testparameter  $d_1 = 0,1$ . Die Spalte  $\hat{\beta} - \beta$  bezeichnet die Abweichung des mit dem VR-Ansatz geschätzten  $\beta$  vom wahren Wert. In den weiteren Spalten geben wir den geschätzten Parameter  $b$  an, den wir auf Basis einer ELW-Schätzung der Residuen und unter Annahme, dass wir  $d = 1$  wissen, ermittelt haben. Dazu verwenden wir die beiden Bandbreiten  $m = T^{0,5}$  und  $m = T^{0,6}$ . Für alle geschätzten Werte geben wir auch die jeweilige geschätzte Standardabweichung (SD) an.

Tab. 3: Simulation mit dem VR-Ansatz bei  $T = 1000$

$b$	$\Lambda_{2,0}(0,1)$	$\hat{\beta} - \beta$	$SD(\hat{\beta})$	$\hat{b}_{0,5} - b$	$SD(\hat{b}_{0,5})$	$\hat{b}_{0,6} - b$	$SD(\hat{b}_{0,6})$
0,00	4,4%			-0,0065	0,1084	0,0310	0,0713
0,15	9,8%	0,7089	71,702	0,0495	0,1215	0,0829	0,0876
0,25	16,9%	0,4928	33,179	0,0674	0,1331	0,0970	0,1041
0,35	34,1%	0,0283	4,6599	0,0635	0,1435	0,0903	0,1127
0,45	61,8%	0,0142	1,6220	0,0470	0,1411	0,0746	0,1077
0,55	88,3%	-0,0076	1,2376	0,0289	0,1285	0,0572	0,0928
0,65	99,1%	0,0003	0,0272	0,0118	0,1167	0,0440	0,0771
0,75	100%	0,0000	0,0120	0,0022	0,1114	0,0376	0,0735
0,85	100%	0,0000	0,0063	-0,0023	0,1130	0,0335	0,0730
0,95	100%	0,0000	0,0034	-0,0069	0,1140	0,0305	0,0735

Tab. 4: Simulation mit dem VR-Ansatz bei  $T = 2000$

$b$	$\Lambda_{2,0}(0,1)$	$\hat{\beta} - \beta$	$SD(\hat{\beta})$	$\hat{b}_{0,5} - b$	$SD(\hat{b}_{0,5})$	$\hat{b}_{0,6} - b$	$SD(\hat{b}_{0,6})$
0,00	4,1%			-0,0123	0,0877	0,0135	0,0567
0,15	10,7%	-0,0401	32,324	0,0439	0,1004	0,0655	0,0745
0,25	20,3%	-0,0095	5,8117	0,0607	0,1144	0,0763	0,0915
0,35	41,4%	-0,0287	4,3126	0,0548	0,1246	0,0687	0,1002
0,45	72,0%	-0,0159	1,2494	0,0407	0,1203	0,0532	0,0924
0,55	94,6%	-0,0004	0,1180	0,0207	0,1057	0,0358	0,0734
0,65	99,9%	0,0004	0,0166	0,0058	0,0945	0,0242	0,0603
0,75	100%	0,0000	0,0069	-0,0022	0,0902	0,0196	0,0579
0,85	100%	0,0000	0,0034	-0,0052	0,0900	0,0177	0,0575
0,95	100%	0,0000	0,0017	-0,0094	0,0903	0,0156	0,0579

Als Ergebnis lässt sich festhalten, dass der VR-Ansatz durchaus Kointegrationsbeziehungen mit nicht-stationären Residuen erkennen kann. Dennoch ist der Test bei einem Kointegrationsgrad von  $b > 0,5$  am mächtigsten, so wie die Konvergenzraten der Eigenwerte es vermuten lassen. Ähnlich verhält es sich bei der Schätzung des Kointegrationsraums. Für nicht-stationäre Kointegrationsresiduen ist die Varianz sehr hoch und lässt kaum eine brauchbare Schätzung vermuten. Dennoch ist der Mittelwert der Schätzung  $\hat{\beta}$  sehr nahe am wahren  $\beta$  ab  $b = 0,35$ . Die hohe Varianz lässt sich dadurch erklären, dass es in diesem Bereich einige sehr hohe Ausreißer bei der Schätzung gibt. Dies bestätigt sich auch dadurch, dass der Parameter  $b$  trotz der hohen Varianz von  $\hat{\beta}$  gut geschätzt werden kann. Hier schneidet erwartungsgemäß der ELW-Schätzer mit der geringeren Bandbreite  $m = T^{0,5}$  besser ab im Mittel aufgrund der Autokorrelation des Kointegrationsfehlers. Auch kann man feststellen, dass für einen steigenden Beobachtungsumfang die Standardabweichung von  $\hat{b}$  nicht sehr von der asymptotischen Standardabweichung bei der ELW-Schätzung verschieden ist. Für  $\hat{b}_{0,5}$  erwarten wir bei  $T = 1000$  eine geschätzte Standardabweichung von 0,0889 und bei  $T = 2000$  0,0748, während die asymptotischen Standardabweichungen für  $\hat{b}_{0,6}$  0,0629 und 0,0511 betragen. Somit geht die beobachtete Standardabweichung tendenziell gegen die asymptotische.

## 4 Die Markterwartungshypothese und Kointegration

Hall et al. (1992) stellen die Gleichungen von Hicks und Fisher als den zentralen Ansatzpunkt der Markterwartungshypothese dar:

$$R_t(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} E_t[R_{t+j}(1)] + \Phi(k) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, p, \quad (32)$$

wobei  $R_t(k)$  der Zinssatz zum Zeitpunkt  $t$  mit einer Laufzeit  $k$  darstellt. Der Zinssatz  $R_t(1)$  mit Fälligkeit in einer Periode soll für den Zinssatz mit der kürzesten Fälligkeit stehen. Längerfristige Zinssätze können nach (32) als Durchschnitt der erwarteten Rendite von zukünftigen kurzfristigen Zinspapieren angegeben werden. Der Erwartungswertoperator  $E_t$  ergibt sich dabei aus den verfügbaren Informationen zum Zeitpunkt  $t$  und  $\Phi(k)$  stellt eine Risikoprämie dar, die die Investoren aufgrund der Unsicherheit der zukünftigen Zinsentwicklung erwarten. Diese Prämie soll nicht vom Zeitpunkt  $t$  abhängen, sondern nur von der



Dauer der Laufzeit  $k$ . Hall et al. (1992) nehmen zwar eine zeitlich abhängige Risikoprämie an, machen aber die Einschränkung, dass diese stationär sein soll. Aufgrund der Ergebnisse von zahlreichen empirischen Studien können wir annehmen, dass Zinssätze i.d.R. nicht-stationäre Zeitreihen sind. Dies wiederum impliziert, dass zwischen den Zinssätzen eine Reihe von Kointegrationsbeziehungen bestehen müssen, falls die Markterwartungshypothese angenommen wird. Hall et al. (1992) zeigen dies, indem sie die Gleichung (32) umformen zu:

$$R_t(k) - R_t(1) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i E_t [R_{t+j}(1) - R_{t+j-1}(1)] + \Phi(k). \quad (33)$$

Falls nun der Zinssatz  $R_t(1)$  eine  $I(1)$ -Zeitreihe darstellt, dann ist die rechte Seite der Gleichung (33) stationär, da dies den erwarteten Zinsveränderungen entspricht zuzüglich dem Mittelwert konstanter Risikoprämien. Daraus folgt, dass die Zinsdifferenz  $R_t(k) - R_t(1)$  ebenfalls stationär sein sollte und damit die beiden Zinssätze  $R_t(k)$  und  $R_t(1)$  kointegriert sind mit dem Kointegrationsvektor  $(1, -1)'$ . Dies gilt demnach für alle am Markt gehandelten Zinspapiere unter der Gültigkeit der Markterwartungshypothese. Nehmen wir nun an, dass am Markt Zinspapiere mit  $p$  Anzahl verschiedener Laufzeiten  $1, k_2, \dots, k_p$  existieren. Dann sollten  $p - 1$  Anzahl Kointegrationsbeziehungen bestehen für den  $p$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{y}_t = [R_t(k_2), \dots, R_t(k_p), R_t(1)]'$ . Wir erwarten dann folgende  $p \times (p - 1)$ -Kointegrationsmatrix für  $\mathbf{y}_t$ :

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p-1} \\ -\mathbf{1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Die  $p - 1$  Kointegrationsbeziehungen  $\beta_0 \mathbf{y}_t$  bestehen demnach aus der Differenz der einzelnen beobachteten Zinssätze zum kurzfristigsten Papier. Somit müssen Systeme mit Zinsen unterschiedlicher Laufzeit kointegriert sein mit  $r = p - 1$ , wobei sich die Spalten der Kointegrationsmatrix zu null addieren müssen, falls keine Normierung wie in Gleichung (34) oder eine andere Sortierung des zu untersuchenden Vektors  $\mathbf{y}_t$  erfolgt.

Diese Implikationen bieten die Basis für die Überprüfung der Markterwartungshypothese in der Empirie. Die meisten Studien kommen dabei zum Schluss, dass die Markterwartungshypothese abzulehnen ist. Campbell und Shiller (1987) untersuchten z.B. ein bivariates System aus einmonatigen und 20-jährigen amerikanischen Staatsanleihen und kamen zum Ergebnis, dass diese kointegriert sind und der Kointegrationsvektor sehr nahe an dem erwarteten  $(1, -1)'$  liegt. Dennoch lehnen sie die Markterwartungshypothese ab, da sie in einer Testregression feststellten, dass die gegenwärtige Zinsdifferenz zukünftige Zinsveränderung signifikant negativ beeinflusst. Dies sahen sie als ein Indiz, dass die Marktteilnehmer auf neue Informationen meistens überreagieren und eine im Durchschnitt zu starke zukünftige Zinsveränderung annehmen. Hall et al. (1992) untersuchen Zinssätze mit mehreren Laufzeiten und wenden dabei das multivariate Johansen-Verfahren an, das u.a. eine Testmöglichkeit für den Kointegrationsraum  $\beta$  liefert. Sie stellen dabei fest, dass die Zinssätze kointegriert sind und dass der erwartete Kointegrationsraum  $\beta_0$  nicht abgelehnt werden kann.

Mit der Möglichkeit von fraktional integrierten Residuen untersuchten bisher Chen und Hurvich (2003) amerikanische Staatsanleihen und Iacone (2009) US\$-Libor-Daten. Chen und Hurvich (2003) kamen dabei zu dem Ergebnis, dass der Kointegrationsrang nicht  $p-1$  betrug, sondern einen geringeren Rang hatte. Dies führten sie u.a. auf das stark persistente Verhalten von langfristigen Zinsdifferenzen zurück. Iacone (2009) hingegen untersuchte ein System von drei Zinssätzen mit Fälligkeiten in einem, drei und sechs Monaten mit Hilfe der Rangschätzungs- und Rangselektionsmethode und konnte einen Rang von zwei ermitteln. Er verwendete dabei als Basis die von Robinson und Yajima (2002) vorgeschlagene Methode und nicht wie wir die neuere Version von Shimotsu und Nielsen (2007). Er schätzte den Kointegrationsraum in Einzelgleichungen mit Hilfe des von Marinucci und Robinson (2001) vorgeschlagenen KQ-Schätzers im Frequenzbereich. Dabei wird für die Schätzung, ähnlich wie bei dem Whittle-Schätzer, eine bestimmte Bandbreite  $m$  von Fourierfrequenzen gewählt. Dieser Schätzer schneidet bei fraktional integrierten Störtermen wesentlich besser ab als der klassische KQ-Schätzer wie Marinucci und Robinson (2001) in Simulationen gezeigt haben. Insgesamt kam Iacone (2009) dabei zu einer Annahme der Markterwartungshypothese und begründete seinen positiven Befund gegenüber der großen Anzahl der Ablehnungen, die mehrheitlich das Modell der klassischen Kointegration verwendeten, dass der Parameter  $b$  nicht immer auf den Wert 1 vereinheitlicht werden kann und es somit zu einer Fehlspezifikation kommt. Anzumerken ist, dass er bei seiner Untersuchung nur Zinssätze mit relativ kurzen Laufzeitunterschieden untersuchte. Somit konnte er keine Aussage zu längerfristigen Zinssätzen machen.

## 5 Anwendung auf Euribor-Zinssätze

Die empirische Anwendung der vorgestellten Methoden bezieht sich auf den Zinssatz für Termingelder im Interbankenmarkt in Euro (weiterhin: Euribor). Wir betrachten hierzu die Euribor-Sätze zu den Fälligkeiten in einer Woche (W1), in einem bis sechs Monaten (M1, M3 und M6) und einem Jahr (Y1). Die erhobenen Daten erstrecken sich über einen Zeitraum vom 3. Januar 2000 bis 30. Juni 2008, in dem jeweils täglich 2171 Beobachtungen gemacht werden konnten. Die Daten entstammen den Internetseiten der Deutschen Bundesbank und sind in Abbildung 8 dargestellt. Dabei fällt auf, dass die Reihen bis ungefähr Mitte 2005 einen leicht fallenden und dann einen steigenden Trend haben. Dies korrespondiert mit dem Wechsel der Geldpolitik der EZB, die am 6. Dezember 2005 zum ersten Mal nach einer fünfjährigen Zinssenkungsphase den Hauptrefinanzierungssatz angehoben hatte. Daraufhin wurde dieser Satz schrittweise bis zu seinem vorläufigen Höchststand am 6. Oktober 2008 angehoben. Mit Beginn der Finanzkrise verfolgte die EZB dann wieder eine expansivere Geldpolitik. Aus diesem Grund nehmen wir für den Beobachtungszeitraum einen polynomialen Trend dritter Ordnung an. In der Abbildung 5 ist ein angepasster kubischer Trend enthalten, der das Trendverhalten der Zeitreihen relativ gut beschreibt.

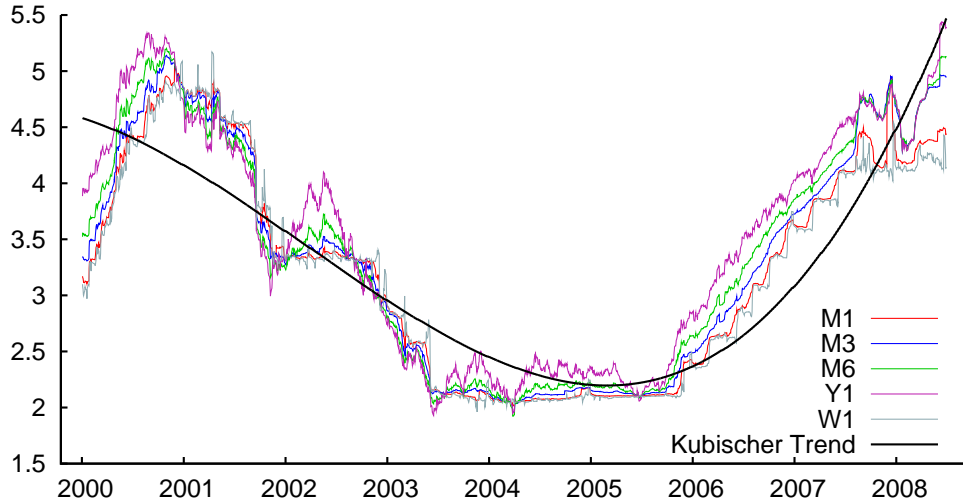


Abb. 8: Euribor-Zinssätze im Zeitraum 3.1.2000 bis 30.6.2008

Im ersten Schritt unserer Analyse wollen wir den Integrationsgrad der Zinszeitreihen mit Hilfe der ELW-Methode, die wir im zweiten Abschnitt vorgestellt haben, schätzen. Dazu bereinigen wir in einem ersten Schritt die Zeitreihen um einen polynomialen Trend dritter Ordnung, indem wir eine Regression der Zeitreihen auf die Regressormatrix  $\delta^c$  durchführen und dann für die weitere Analyse die Residuen verwenden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 5 für verschiedene mögliche Bandbreiten zusammengestellt.

Tab. 5: ELW-Schätzung des Integrationsgrads der Euribor-Zinssätze

Bandbreite	$m = T^{0,5} = 47$	$m = T^{0,55} = 69$	$m = T^{0,6} = 101$
M1	1,0000	0,9425	0,9952
M3	1,0753	1,0369	1,0658
M6	1,0458	1,0204	1,0538
Y1	0,9924	0,9657	1,0185
W1	1,0000	0,9725	0,9748
Mittelwert	1,0227	0,9876	1,0216
a.SD	0,0729	0,0602	0,0498

Die Schätzergebnisse zeigen, dass sich für keine der Zinssätze eine signifikante Abweichung von  $d = 1$  ergibt. Der Mittelwert der geschätzten Parameter liegt für alle Bandbreiten nahe bei 1. Diese Ergebnisse decken sich mit den Ergebnissen von Iacone (2009), der für monatliche US\$-Libor-Zinssätze ebenfalls keine signifikante Abweichung von einer Einheitswurzel schätzen konnte. Im nächsten Schritt testen wir, ob die Zinssätze alle den gleichen Integrationsparameter haben. Die gemeinschaftliche Teststatistik ergibt  $\hat{T}_0 = 2,2220$  und hat bei der Annahme einer  $\chi_4^2$ -Verteilung einen p-Wert von 0,6950. Also kann bei dieser Statistik nicht abgelehnt werden, dass die Zeitreihen einen unterschiedlichen Integrationsgrad aufweisen. Auch die paarweise Durchführung des Tests auf Gleichheit von  $d$ , dessen Ergebnisse in Tabelle 6 abgetragen sind, ergibt für kein Paar von Zinssätzen eine Ablehnung dieser Hypothese. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass der gemeinsame

Integrationsgrad  $d^* = 1,0216$ , also der Mittelwert der Bandbreite  $m = 101$ , sein soll.

Tab. 6: Paarweiser Test auf Gleichheit des Integrationsgrads

$\hat{T}_{ij}$	M1	M3	M6	Y1	W1
M1	-	-1,0199	-0,7874	-0,2930	0,2400
M3	1,0199	-	0,2589	0,8229	1,1900
M6	0,7875	-0,2589	-	0,7255	1,0488
Y1	0,2930	-0,8229	-0,7255	-	0,5774
W1	-0,2400	-1,1900	-1,0488	-0,5774	-

Als nächstes beginnen wir mit der multivariaten Analyse des Datenmaterials. Im vierten Abschnitt hatten wir gesehen, dass die Markterwartungshypothese stationäre Differenzen zwischen kurz- und langfristigen Zinssätzen impliziert. Dabei nehmen wir an, dass W1, also der Zinssatz mit der kürzesten Laufzeit, die Rolle von  $R_t(1)$  übernimmt. Zuerst wollen wir die deskriptiven Statistiken der Zinsdifferenzen betrachten. Der Mittelwert der Differenzen lässt sich als die Risikoprämie  $\Phi(k)$  interpretieren, falls diese als zeitlich konstant angenommen wird. Dies steigt erwartungsgemäß mit steigendem Laufzeitunterschied. Ebenso steigt auch die Schwankungsbreite der Differenzen erkennbar an der höheren Standardabweichung und den größer werdenden Minima und Maxima.

Tab. 7: Deskriptive Statistiken der Zinsdifferenzen

Zinsdifferenz	Mittelwert	SD	Minimum	Maximum
M1-W1	0,0355	0,0982	-0,3900	0,8600
M3-W1	0,1138	0,1974	-0,5030	0,8790
M6-W1	0,1606	0,2596	-0,6270	1,0070
Y1-W1	0,2651	0,3528	-0,7250	1,3140

Die Stationarität überprüfen wir zum einen mit zwei herkömmlichen Tests, nämlich dem erweiterten Dickey-Fuller Test (ADF) und dem KPSS-Test. Diese ergeben zum Teil widersprüchliche Ergebnisse. Während der KPSS-Test für alle Zeitreihen die Hypothese der Stationarität ablehnt, wird beim ADF-Test für die Differenzen M1-W1 und M3-W1 die Nicht-Stationarität bei  $\alpha = 1\%$  abgelehnt. Die Reihen M6-W1 und Y1-W1 sind nach dem ADF-Test bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% stationär. Diese Widersprüchlichkeit scheint mit der Möglichkeit einer fraktionalen Integration begründbar, da mit diesem Konzept Prozesse zwischen den klassischen Begriffen der Stationarität und Nicht-Stationarität modelliert werden.

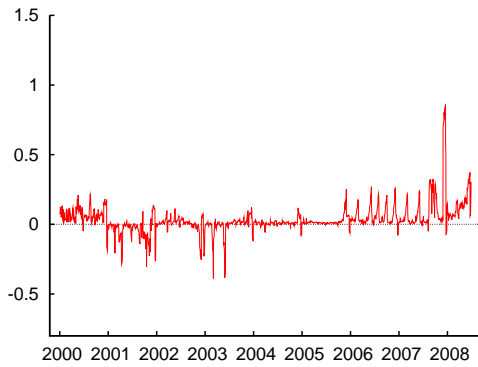


Abb. 9: Zinsdifferenz M1 und W1

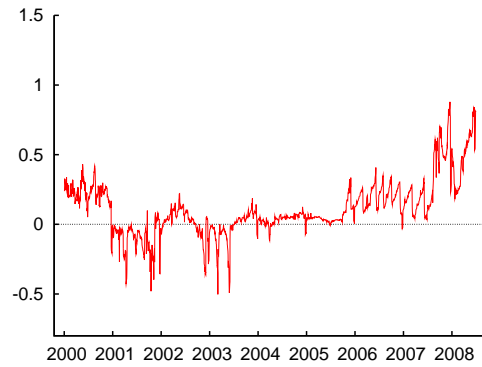


Abb. 10: Zinsdifferenz M3 und W1

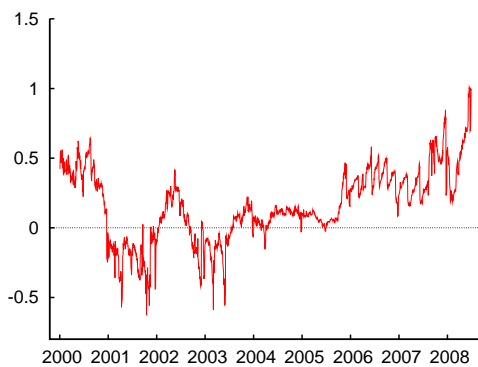


Abb. 11: Zinsdifferenz M6 und W1

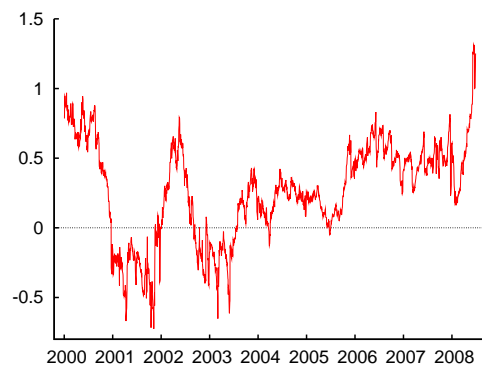


Abb. 12: Zinsdifferenz Y1 und W1

Tab. 8: ELW-Schätzung des Integrationsgrads der Zinsdifferenzen

Zinsdifferenz	$m = 47$	$m = 69$	$m = 101$	ADF <sup>a</sup>	KPSS <sup>b</sup>
M1-W1	0,3115	0,3070	0,3635	-9,0470***	2,0167***
M3-W1	0,6869	0,6949	0,7569	-3,5445***	2,3447***
M6-W1	0,7998	0,8075	0,8574	-2,7475*	2,0393***
Y1-W1	0,9620	0,9516	0,9792	-2,7095*	1,3490***

<sup>a</sup>Der erweiterte Dickey-Fuller-Test überprüft  $H_0$  : Prozess ist nicht-stationär. Asymptotische kritische Werte: 1%: -3,4386 5%: -2,8651 10%: -2,5687

<sup>b</sup>Der KPSS-Test überprüft  $H_0$  : Prozess ist stationär. Asymptotische kritische Werte: 1%: 0,739; 5%: 0,463; 10%: 0,347

Die Schätzung des freien Integrationsgrads mit Hilfe der ELW-Methode ergibt für die Differenzen bei längeren Laufzeitunterschieden einen höheren Integrationsgrad und damit eine größere Persistenz von Schocks. Dies scheint auch mit dem Eindruck der Zeitreihenverläufe in den Abbildungen 9 bis 12 übereinzustimmen. Umso länger der Laufzeitunterschied ist, desto länger dauert es, bis nach einem Schock sich eine Korrektur zum Mittelwert vollzieht. Lediglich der Integrationsgrad von M1-W1 kann signifikant im stationären Bereich  $d < 0,5$  geschätzt werden. Für alle Reihen gilt, dass der Parameter  $d$  signifikant von 0 verschieden für alle Bandbreiten ist. Somit haben alle Differenzen ein langes Gedächtnis. Die restlichen Differenzen sind allesamt im nicht-stationären Bereich. M3-W1 und M6-W1 haben aber hier eine Mittelwerttendenz, da für alle Bandbreiten  $d = 1$  abgelehnt werden

kann. Nur für die Differenz Y1-W1 kann eine Einheitswurzel nicht abgelehnt werden. Dies wiederum macht die Gültigkeit der Markterwartungshypothese unwahrscheinlich für das Gesamtsystem, da alle Differenzen stationär sein sollten. Im nächsten Schritt untersuchen wir die Zeitreihen auf Vorliegen von Kointegrationsbeziehungen. Die Rangschätzungsmethode deutet auf zwei Kointegrationsgleichungen für die Euribor-Zinssätze hin, da das Konfidenzband  $CI(5\%, r_0 = 2)$  gerade noch unter dem Schwellenwert  $0,1/5 = 0,02$  liegt. Für  $r = 3$  liegt der Wert über diesem und somit können wir die Möglichkeit von drei Kointegrationsbeziehungen mit dieser Methode verwerfen. Die Teststatistiken basieren auf den Eigenwerten der geschätzten Matrix  $\hat{\mathbf{G}}(d^*)$ , für die wir verschiedene Bandbreiten  $m_1$  verwendet haben. Das Ergebnis war, dass sich die Ergebnisse sowohl für die Rangschätzungs- als auch für die Rangselektionsmethode qualitativ kaum unterscheiden. Die in dieser Arbeit angegebenen Werte beziehen sich auf die Wahl  $m_1 = 101$ , also die gleiche Bandbreite, die wir bei der Bestimmung von  $d^*$  verwendet haben.

Tab. 9: Ergebnisse der Rangschätzungsmethode für das Gesamtsystem

$r_0$	$\hat{\pi}$	$\hat{s}$	$CI(5\%, r_0)$
1	$8,74 \cdot 10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-6}$	<b>0,0009</b>
2	0,0109	$1,86 \cdot 10^{-4}$	<b>0,0109</b>
3	0,0628	0,0054	0,0637
4	0,1443	0,0221	0,1479
$\hat{r}$			2

Die Rangselektionsmethode ergibt hingegen keinen eindeutigen Aufschluss über den Kointegrationsrang der Euribor-Zinssätze. Der größte Wert für  $v(n) = m_1^{-0,05}$  impliziert zwar vier Kointegrationsbeziehungen, alle anderen aber entweder zwei oder drei. Dies erscheint eher plausibel, da wir für die Zinsdifferenz Y1-W1 eine Einheitswurzel nicht verwerfen können und damit bei dieser Beziehung keine Reduktion des Integrationsgrads vorgenommen wird.

Tab. 10: Rangselektionsmethode für das Gesamtsystem

$r_0/v(n)$	$m_1^{-0,45}$	$m_1^{-0,35}$	$m_1^{-0,25}$	$m_1^{-0,15}$	$m_1^{-0,05}$
0	-4,3733	-4,6603	-4,2675	-3,4207	-1,5948
1	-4,4938	-4,7233	-4,4091	-3,7316	-2,2710
2	<b>-4,5665</b>	<b>-4,7386</b>	<b>-4,5030</b>	-3,9949	-2,8994
3	-4,4525	-4,5672	-4,4101	<b>-4,0714</b>	-3,3411
4	-4,1963	-4,2537	-4,1751	-4,0058	<b>-3,6406</b>
$\hat{r}$	2	2	2	3	4

Die Ergebnisse des nicht-parametrischen VR-Tests sind in Tabelle 11 dargestellt. Wir verwenden hierzu die beiden Testparameter  $d_1 = 0,1$  bzw.  $d_1 = 1$ . Hier ergibt sich eine signifikante Ablehnung der Kointegrationsränge 0 und 1 bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% für beide Testparameter. Somit können wir annehmen, dass der Kointegrationsrang zumindest zwei beträgt.  $r = 2$  kann hingegen nur bei  $\alpha = 10\%$  und  $d_1 = 0,1$  abgelehnt werden.

Tab. 11: VR-Test für den Kointegrationsrang

$r_0$	$\Lambda_{5,r_0}(0,1)$	$\Lambda_{5,r_0}(1)$
0	12,084***	39921***
1	8,8327***	4745,9***
2	6,3292*	2425,0
3	3,9592	1022,2
4	1,8704	217,51

Nun wollen wir mit dem VR-Ansatz die einzelnen Kointegrationsräume für  $r = 1$ ,  $r = 2$  und  $r = 3$  schätzen. Jede der Spalten der Kointegrationsräume stellt dabei eine Kointegrationsgleichung dar. Für das Residuum aus dieser Gleichung führen wir die bekannte ELW-Schätzung von  $d$  durch mit den gleichen Bandbreiten wie in der Tabelle 12. Der Kointegrationsgrad  $b$  ergibt sich dann als Differenz zwischen  $d^* = 1,0216$  und des geschätzten Integrationsgrads des Residuums. Für sämtliche Kointegrationsräume ergeben sich - wie zu erwarten war - signifikant von 0 verschiedene Schätzwerte von  $b$ . Für  $r = 1$  und für die erste Gleichung von  $r = 2$  haben wir aber keine signifikante Abweichung von  $b = 1$  und somit keine Ablehnung des klassischen Kointegrationsmodells. Bei der zweiten Gleichung von  $r = 2$  ist  $b$  hingegen signifikant von 1 verschieden. Wir nehmen dabei an, dass die asymptotische Standardabweichung von  $\hat{b}$  gleich ist wie bei der Schätzung von  $d$  und vernachlässigen eine mögliche Verzerrung, die durch die vorherige Schätzung der Kointegrationsbeziehung entstehen könnte. Die Monte-Carlo Simulationen im vorherigen Abschnitt lassen eine geringfügig höhere Standardabweichung bei der Schätzung von  $b$  vermuten.

Tab. 12: Schätzung des Kointegrationraums mit dem VR-Ansatz

	$r = 1$	$r = 2$		$r = 3$		
M1	1	1	0	1	0	0
M3	-0,480	0	1	0	1	0
M6	0,174	-0,362	-1,115	0	0	1
Y1	-0,052	0,135	0,389	-0,057	-0,205	-0,533
W1	-0,649	-0,764	-0,240	-0,925	-0,735	-0,445
$\Sigma$	-0,007	0,009	0,035	0,017	0,060	0,023
$\hat{b}(m = 47)$	1,0216	1,0024	0,2603	0,7228	0,3066	0,3292
$\hat{b}(m = 69)$	1,0216	0,9841	0,3034	0,7320	0,3096	0,3254
$\hat{b}(m = 101)$	1,0159	0,8829	0,2435	0,6772	0,2534	0,2738

In Tabelle 13 geben wir auch den geschätzten Kointegrationsraum für  $r = 4$  an. Hier fällt auf, dass für die vierte Gleichung  $b$  nicht signifikant von 0 verschieden ist. Damit haben wir ein weiteres Indiz, dass der Kointegrationsrang nicht vier ist, auch wenn wir bei der Schätzung der Kointegrationsgleichungen eine hohe Varianz vermuten müssen. Als Ergebnis unserer Analyse nehmen wir  $r = 3$  an. Damit lässt sich aussagen, dass das System der Euribor-Zinssätze durch zwei stochastische Trends getrieben wird, was ein Widerspruch zur Markterwartungshypothese ist, wo wir nur einen erwarten. Wir vermuten,

dass die beiden Trends zum einen die kurzfristige Entwicklung darstellt und zum anderen die langfristige, die sich durch die Erwartungen der Marktteilnehmer über die zukünftige Zinsentwicklung ergibt. Die Summe der Koeffizienten der drei Kointegrationsbeziehungen ist relativ nahe bei 0, so dass die Zinssätze M1, M3 und M6 durch einen gewichteten Mittelwert von Y1 und W1 angegeben werden können. Interessant ist dabei, dass das Gewicht von Y1 für die einzelnen Gleichungen zunimmt, während das von W1 abnimmt. Dies überrascht aber wenig, da die Laufzeiten für jede Gleichung ansteigen und somit z.B. für den längerfristigen Zinssatz M6 ein höheres Gewicht der langfristigen stochastischen Komponente zu erwarten ist.

Tab. 13: Schätzung des Kointegrationsraums mit dem VR-Ansatz

	$r = 4$			
M1	1	0	0	0
M3	0	1	0	0
M6	0	0	1	0
Y1	0	0	0	1
W1	-0,972	-0,902	-0,879	-0,815
$\Sigma$	0,028	0,098	0,121	0,185
$\hat{b}(m = 47)$	0,6396	0,2555	0,1594	0,0216
$\hat{b}(m = 69)$	0,6549	0,2567	0,1592	0,0383
$\hat{b}(m = 101)$	0,6087	0,2054	0,1141	0,0006

Abschließend sei noch angemerkt, dass es auch versucht wurde, den Kointegrationsrang für das System M1, M3, M6 und W1 zu bestimmen. Aber auch hier kamen wir zu dem Ergebnis, dass hier der VR-Ansatz  $r = 3$  ablehnt. Dies mag u.a. darin liegen, dass die Differenz zwischen M6 und W1 stark persistent ist aufgrund des hohen Integrationsgrads. Der VR-Ansatz hat, wie auch bei den Simulationen zu sehen ist, in dieser Situation nicht genügend Macht, um diese Kointegrationsbeziehung signifikant zu testen.

## 6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit konnten wir die klassische Markterwartungshypothese nicht annehmen, da das System der Euribor-Zinssätze nicht den Kointegrationsrang  $p - 1$  besitzt und damit nicht nur durch einen einzigen stochastischen Trend getrieben wird. Wir konnten feststellen, dass insgesamt zwei stochastische Trends das Verhalten der Zinssätze bestimmt. Ein Grund hierfür liegt darin, dass insbesondere die Entwicklung von kurzfristigen einwöchigen und längerfristigen einjährigen Zinsen im Zeitablauf auseinander geht, da Marktteilnehmer auf lange Sicht weitere Zinsschritte erwarten. Als Empfehlung an die EZB kann man geben, dass eine möglichst große Transparenz über die zukünftige Zinsentwicklung mögliche Übertreibungen am Geldmarkt für längerfristige Termingelder vermeiden kann. Somit wären die Zinsen besser für die Zentralbank steuerbar. Dies vermindert die Unsicherheit der Marktteilnehmer über die zukünftige Zinsentwicklung und erhöht wahrscheinlich die Investitionstätigkeiten der gesamten Volkswirtschaft. Campbell und Shiller (1987) konnten feststellen, dass diese Unsicherheit tendenziell in eine Übertreibung für zukünftige Zinsen führt.



Als verwendete Methode für die Untersuchung von fraktionalen Kointegrationsbeziehungen liefert der VR-Ansatz einen brauchbaren Testansatz zur Bestimmung des Kointegrationsrangs und eine Möglichkeit, den Kointegrationsraum zu schätzen. Eine Testmöglichkeit für den Kointegrationsraum bei fraktional kointegrierten Systemen ist wünschenswert und liefert z.B. die von Johansen und Nielsen (2011) vorgeschlagenen Likelihood-Ratio Tests auf Basis des fraktionalen Repräsentationstheorems von Johansen (2008). Dieser Ansatz hat aber den Nachteil, dass bei der Schätzung ein gleicher Kointegrationsgrad  $b$  für alle Kointegrationsbeziehungen angenommen wird und somit auch auf den hier vorliegenden Fall nicht anwendbar ist, da wir unterschiedliche Werte für  $b$  schätzen konnten. Eine Anwendung wäre dann für die Untersuchung der einzelnen Zinsdifferenzen, also bei einem bivariaten System, denkbar.

## Literatur

- [1] Box, G. E. P. und Jenkins, G. (1976): Time series analysis: Forecasting and control. Holden-Day, San Francisco.
- [2] Breitung, J., Hassler, U. (2002): Inference on the cointegration rank in fractionally integrated processes. *Journal of Econometrics* 110, 167-185.
- [3] Campbell, J. Y., Shiller, R. J. (1987): Cointegration and tests of present value models. *Journal of Political Economy* 95, 1062-1088.
- [4] Chen, W. W., Hurvich, C. M. (2003): Semiparametric estimation of multivariate fractional cointegration. *Journal of the American Statistical Association* 98, 629-642.
- [5] Dechert, A. (2014): Variance ratio testing for fractional cointegration in presence of trends and trend breaks. *Proceedings of the International Work-Conference on Time Series* 2, 1055-1068.
- [6] Engle, R. F., Granger, C. W. J. (1987): Co-Integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica* 55, 251-276.
- [7] Engsted, T., Tanggaard, C. (1994): Cointegration and the US term structure. *Journal of Banking and Finance* 18, 167-181.
- [8] Granger, C. W. J. (1980): Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics* 14, 227-238.
- [9] Hall, A. D., Anderson, H. M., Granger C. W. J. (1992): A cointegration analysis of treasury bill yields. *Review of Economics and Statistics* 74, 116-126.
- [10] Hosking, J. R. M. (1980): Fractional differencing. *Biometrika* 68, 165-176.
- [11] Iacone, F. (2009): A semiparametric analysis of the term structure of the US interest rates. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 71, 475-490.
- [12] Issing, O. (2001): Einführung in die Geldtheorie. 12. Auflage, Vahlen Verlag, München.
- [13] Johansen, S. (1995): Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models. Oxford University Press, Oxford.

- [14] Johansen, S. (2008): A representation theory for a class of vector autoregressive models for fractional processes. *Econometric Theory* 24, 651-676.
- [15] Johansen, S., Nielsen, M. Ø. (2011): Likelihood inference for a fractionally cointegrated vector autoregressive model. Working Paper.
- [16] Marinucci, D., Robinson, P. M. (1999): Alternative forms of fractional Brownian Motion. *Journal of Statistical Planning and Inference* 80, 111-122.
- [17] Marinucci, D., Robinson, P. M. (2001): Semiparametric fractional cointegration analysis. *Journal of Econometrics* 105, 225-247.
- [18] Nielsen, M. Ø., Shimotsu, K. (2007): Determining the cointegrating rank in nonstationary fractional systems by the exact local Whittle approach. *Journal of Econometrics* 141, 574-596.
- [19] Nielsen, M. Ø. (2008): A powerful test of the autoregressive unit root hypothesis based on a tuning parameter free statistic. *Econometric Theory* 25, 1515-1544.
- [20] Nielsen, M. Ø. (2010): Nonparametric cointegration analysis of fractional systems with unknown integration orders. *Journal of Econometrics* 155, 170-187.
- [21] Phillips, P. C. B., Ouliaris, S. (1988): Testing for cointegration using principal components methods. *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, 205-230.
- [22] Robinson, P. M. (1995): Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *Annals of Statistics* 23, 1630-1661.
- [23] Robinson, P. M., Yajima, Y. (2002): Determination of cointegrating rank in fractional systems. *Journal of Econometrics* 106, 217-241.
- [24] Shimotsu, K., Phillips, P.C.B (2006): Local Whittle estimation of fractional integration and some of its variants. *Journal of Econometrics* 130, 209-333.
- [25] Shimotsu, K. (2010): Exact local Whittle estimation of fractional integration with unknown mean and time trend. *Econometric Theory* 26, 501-540.