

Heilig, Stephan; Schöbel, Rainer

Working Paper

Kontrolle von Chaos am Beispiel des Kaldor-Modells

Tübinger Diskussionsbeiträge, No. 81

Provided in Cooperation with:

University of Tuebingen, Faculty of Economics and Social Sciences, School of Business and Economics

Suggested Citation: Heilig, Stephan; Schöbel, Rainer (1996) : Kontrolle von Chaos am Beispiel des Kaldor-Modells, Tübinger Diskussionsbeiträge, No. 81, Eberhard Karls Universität Tübingen, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Tübingen

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/104929>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

**Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen**

**Kontrolle von Chaos am Beispiel
des Kaldor-Modells**

Stephan Heilig
Rainer Schöbel



Tübinger Diskussionsbeiträge

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

**Kontrolle von Chaos am Beispiel
des Kaldor-Modells**

Stephan Heilig
Rainer Schöbel

Tübinger Diskussionsbeitrag Nr. 81
Oktober 1996

Wirtschaftswissenschaftliches Seminar
Mohlstraße 36, D-72074 Tübingen

Abstract

Am Beispiel des Konjunkturmodells von Kaldor wird gezeigt, wie die Kontrolle eines chaotischen Systems mit begrenzten Ressourcen auch dann noch durchgeführt werden kann, wenn es sich bei dem zu stabilisierenden Gleichgewicht nicht mehr um einen sogenannten Sattelpunkt handelt. Diese Problemstellung hat erhebliche ökonomische Relevanz, da nicht von vornherein unterstellt werden kann, daß wirtschaftspolitisch sinnvolle Gleichgewichte diese Sattelpunkteigenschaft besitzen.

Als Steuergröße wird das staatliche Investitionsvolumen gewählt, eine Größe, die auch in der realen Konjunkturpolitik eine wichtige Rolle spielt.

Im Ergebnis zeigt sich, daß sich die speziellen Eigenschaften eines chaotischen Systems vorteilhaft zur Konjunktursteuerung einsetzen lassen. Es besitzt somit eine Anpassungsflexibilität, die herkömmlichen nichtchaotischen Modellen vorenthalten bleibt.

1 Einleitung

Ein wichtiger Grund für die wachsende Bedeutung der Chaostheorie in der Wirtschaftswissenschaft ist das typischerweise nichtperiodische Verhalten chaotischer Prozesse. Dies bietet völlig neuartige Möglichkeiten der Modellierung. Auf den ersten Blick kann es mit dem Verhalten gewöhnlicher Zufallsprozesse verwechselt werden.¹ Zufallsprozesse werden in aller Regel deshalb in ökonomischen Modellen verwendet, um anders nicht erfäßbare exogene Einflüsse auf die endogenen Variablen zu berücksichtigen. Die Chaostheorie eröffnet hier einen neuen Weg, dieses oftmals nur scheinbar "zufällige" Verhalten endogen, d.h. systembedingt zu modellieren.

Dies allein sollte bereits Anreiz genug sein, sich intensiver mit den wirtschaftswissenschaftlichen Implikationen der Chaostheorie zu beschäftigen. Noch interessanter wäre es jedoch, stünde zusätzlich ein Instrumentarium zur Verfügung, welches die Steuerung chaotischer Systeme erlaubt. Beginnend mit der Arbeit von Ott, Grebogi und Yorke (1990) verfügen wir über solche Ansätze, die es ermöglichen, das aperiodische Verhalten chaotischer Systeme zu stabilisieren bzw. zu kontrollieren. Holyst, Hagel, Haag und Weidlich (1996) zeigen in einer richtungsweisenden Arbeit die Anwendung des Kontrollansatzes von Ott, Grebogi und Yorke (1990) auf ein Modell von Feichtinger (1992), in dem zwei Wettbewerber mit unterschiedlichen Strategien um Marktanteile konkurrieren. Der dort verwendete Kontrollansatz ist jedoch nur dann einsetzbar, wenn das zu stabilisierende Gleichgewicht in der Umgebung des chaotischen Attraktors ein Sattelpunkt ist, der zumindest eine stabile Mannigfaltigkeit besitzt.

Wie Shinbrot, Grebogi, Ott und Yorke (1993) gezeigt haben, kann die Idee der Kontrolle von Chaos auch dann noch angewendet werden, wenn es sich bei dem zu stabilisierenden Gleichgewicht nicht mehr um einen Sattelpunkt handelt. Dieser allgemeinere Kontrollansatz erlaubt es, unabhängig von der Anzahl stabiler Mannigfaltigkeiten, auch andere instabile Gleichgewichte in der Umgebung eines chaotischen Attraktors zu stabilisieren. Diese Problemstellung hat erhebliche ökonomische Relevanz, da nicht von vornherein unterstellt werden kann, daß wirtschaftspolitisch sinnvolle Gleichgewichte die genannte Sattelpunkteigenschaft besitzen.

Wir zeigen in dieser Arbeit, wie die Kontrolle von Chaos zur gezielten Beeinflußung konjunktureller Schwankungen im chaotischen Bereich des klassischen Konjunkturmodells von Kaldor (1940) verwendet werden kann, wobei das angestrebte Gleichgewicht gerade kein Sattelpunkt ist, die Prämisse einer stabilen Mannigfaltigkeit des zu stabilisierenden Gleichgewichtes also nicht mehr erfüllt werden kann. Als Steuergröße wird dabei das staatliche Investitionsvolumen zur Anwendung kommen, eine Größe, die auch in der realen Konjunkturpolitik des Staates eine wichtige Rolle spielt.

Der Rest der Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Abschnitt 2 stellt die von uns verwendete Variante des Kaldor-Modells dar. Abschnitt 3 erläutert einige wichtige Implikationen chaotischen Verhaltens

¹ Vgl. Savit (1988), S. 287.

innerhalb dieses Modells. Abschnitt 4 zeigt die Methodik des Kontrollansatzes auf und diskutiert die Ergebnisse. Abschnitt 5 schließt mit einer Zusammenfassung.

2 Das Kaldor-Modell

Das Konjunkturmodell von Kaldor (1940) erklärt konjunkturelle Schwankungen des Volkseinkommens Y und des Kapitalstocks K systembedingt, also modellendogen.² Obwohl in der Literatur nicht unumstritten, gilt es heute aufgrund seiner Einfachheit und Eleganz als Prototyp eines nichtlinearen ökonomischen Modells. Das Kaldor-Modell wird von Gabisch und Lorenz (1989), aufbauend auf der Reformulierung durch Chang und Smyth (1971), hinsichtlich seines möglicherweise chaotischen Verhaltens diskutiert. Es kann durch das folgende zweidimensionale Differenzgleichungssystem beschrieben werden:³

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= F^Y(Y_t, K_t) = Y_t + m(I(Y_t, K_t) - S(Y_t)) \\ K_{t+1} &= F^K(Y_t, K_t) = (1 - b)K_t + I(Y_t, K_t). \end{aligned} \tag{1}$$

Kaldor geht in seinem Modell sowohl von einer nichtlinearen Sparfunktion $S(Y_t)$ als auch von einer nichtlinearen Investitionsfunktion $I(Y_t, K_t)$ aus. b gibt die konstante Abschreibungsrate des Kapitalstocks an und m ist die Reaktionsgeschwindigkeit mit der sich das Volkseinkommen an eine Überschußnachfrage $I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t) > 0$ bzw. ein Überschußangebot $I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t) < 0$ anpaßt. Zur Vereinfachung betrachten wir im folgenden lediglich eine bezüglich des Volkseinkommens lineare Sparfunktion

$$S(Y_t) = zY_t$$

mit der Sparquote z . Die Investitionsfunktion hängt ebenfalls vom Volkseinkommen Y und dem Kapitalstock K ab:

$$I(Y_t, K_t) = c2^{-1/(dY_t+n)^2} + eY_t + a(f/K_t)^g.$$

Sie hat hinsichtlich Y einen S-förmigen Verlauf. Die Parameter a, c, d, e, f, g, n dienen der konkreten Beschreibung dieser Investitionsfunktion. Zur Vereinfachung der Darstellung werden wir dieses Gleichungssystem auch in Vektorschreibweise

² Kaldor (1940), S. 78 ff.

³ Wir folgen im wesentlichen der Parametrisierung von Gabisch und Lorenz (1989). Vgl. ebenda, S. 132 ff.

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_t = (Y_t, K_t)'$ und der Abbildungsvorschrift $\mathbf{F} = (F^Y, F^K)'$ notieren.

Die so charakterisierte Investitionsfunktion $I(Y_t, K_t)$ besitzt zwei einkommensunelastische Bereiche für hohes und niedriges Einkommen sowie einen elastischen Bereich bei mittlerem Einkommen. Aufgrund von Überschlußkapazitäten reagiert die Investitionstätigkeit bei niedrigem Einkommen nur schwach auf Einkommensänderungen. Bei hohem Volkseinkommen sind die Investitionen wegen gestiegener Produktions- und Finanzierungskosten einkommensunelastisch.

Ein Gleichgewicht herrscht, wenn Investitions- und Spartätigkeit ausgeglichen sind. Dies ist, wie in Abbildung 1 dargestellt, an den Schnittpunkten der Spar- mit der Investitionsfunktion der Fall. Durch den S-förmigen Verlauf der Investitionsfunktion existieren drei Schnittpunkte A, B und C. Die Gleichgewichte A und C sind wegen $\frac{\partial I}{\partial Y} < \frac{\partial S}{\partial Y}$ stabil, während das Gleichgewicht B bei mittlerem Volkseinkommen wegen $\frac{\partial I}{\partial Y} > \frac{\partial S}{\partial Y}$ instabil ist. Die Investitionstätigkeit in der Umgebung von B reagiert sensitiv auf die Sparneigung, es gilt: $\frac{\partial I}{\partial S} = \frac{\partial I}{\partial Y} / \frac{\partial S}{\partial Y} > 1$, d.h. die Trajektorie entfernt sich von B. Dagegen reagiert die Investitionstätigkeit in den Umgebungen von A und C weniger sensitiv, es gilt: $\frac{\partial I}{\partial S} = \frac{\partial I}{\partial Y} / \frac{\partial S}{\partial Y} < 1$. Punkte in der näheren Umgebung werden von A und C angezogen.

Die Gleichgewichte A und C sind jedoch nur in kurzfristiger Betrachtung, d.h. für konstanten Kapitalstock K , stabil. Langfristig kommt es zu Verschiebungen der Investitionskurve. Befindet man sich in C, kommt es wegen hoher Investitionstätigkeit zu Überkapazitäten, die Nachfrage nach Investitionsgütern verringert sich und die Investitionsfunktion verschiebt sich nach unten. Die Gleichgewichte B und C nähern sich an, bis sie zusammenfallen und C instabil wird. Ein konjunktureller Abschwung tritt solange ein, bis das stabile Gleichgewicht A erreicht ist. Jedoch ist in A die Investitionstätigkeit so gering, daß es zu Kapazitätsengpässen kommt. Eine verstärkte Investitionsgüternachfrage verschiebt im Konjunkturaufschwung die Investitionskurve nach oben, bis die Gleichgewichte A und B zusammenfallen und A instabil wird. Der ausgelöste Boom läßt die Wirtschaft zum stabilen Gleichgewicht C streben, in dem es dann wieder zu Überkapazitäten kommt. Im Ergebnis resultiert ein zyklischer Konjunkturverlauf, der modellendogen verursacht ist. Formal ist dafür eine negative erste Ableitung der Investitionsfunktion nach dem Kapitalstock, $\frac{\partial I}{\partial K} < 0$, verantwortlich.

3 Eigenschaften des Chaos im Kaldor-Modell

3.1 Bifurkation als Weg ins Chaos

Inwieweit das Kaldor-Modell stabile konjunkturelle Schwankungen aufweist hängt von der Wahl der Systemparameter ab. Für die weitere Diskussion wählen wir als Vergleichs- und Referenzpunkt

folgende in der Literatur genannte Parameterwerte für der Investitions- und Sparfunktion:⁴ $a = 5$, $b = 0.05$, $c = 20$, $d = 0.01$, $e = 0.05$, $f = 280$, $g = 4.5$, $n = 0.00001$ und $z = 0.21$. Die Reaktionsgeschwindigkeit m wird variiert.

Eine Möglichkeit zur Analyse des Stabilitätsverhaltens eines Systems bietet die Bifurkationstheorie. Sie untersucht, für welche Parameterwerte sich das Systemverhalten qualitativ ändert. Diese Änderung wird als Bifurkation und der Parameterwert, bei dem die Bifurkation auftritt, als kritischer Wert oder Bifurkationswert bezeichnet.

Für eine Untersuchung der Stabilitätseigenschaft des Fixpunktes in Abhängigkeit von der Reaktionsgeschwindigkeit m wird nun zunächst die Lage des Fixpunktes nach der Gleichung $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$ bestimmt. Es ergibt sich für die vorgegebenen Parameterwerte der Fixpunkt $\mathbf{x}^* = (Y^*, K^*)' = (62.6723, 263.2237)'$. Die Lage dieses Fixpunktes ist unabhängig von der Reaktionsgeschwindigkeit m . Für diesen konkreten Fixpunkt ermitteln wir nun die Jakobimatrix mit den dazugehörigen Eigenwerten. Aus der allgemeinen Darstellung

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^Y}{\partial Y} & \frac{\partial F^Y}{\partial K} \\ \frac{\partial F^K}{\partial Y} & \frac{\partial F^K}{\partial K} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}^*=(Y^*, K^*)} \quad (2)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^Y}{\partial Y} &= 1 + em - zm + mc2^{-1/(dY+n)^2}d(\ln 4)/(dY + 4)^3 \\ \frac{\partial F^Y}{\partial K} &= (-maf g/K^2)(f/K)^{g-1} \\ \frac{\partial F^K}{\partial Y} &= c2^{-1/(dY+n)^2}d(\ln 4)/(dY + 4)^3 \\ \frac{\partial F^K}{\partial K} &= 1 - b - (afg/K^2)(f/K)^{g-1} \end{aligned} \quad (3)$$

ergibt sich am Fixpunkt \mathbf{x}^* die folgende Matrix:

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 + 0.32866559 m & -0.112877232 m \\ 0.242866559 & 0.837122768 \end{pmatrix}$$

⁴ Vgl. Lorenz (1989), S. 130.

Ihre Eigenwerte sind abhängig von m . Für $m < 2.965$ besitzt diese Matrix konjugiert komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2} \text{tr} \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\det \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \frac{1}{4} (\text{tr} \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}})^2}$$

mit einem Modulus von $\text{mod } \lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$. Der Fixpunkt ist ein stabiler Fokus, eine sogenannte Senke. Mit einem Reaktionsparameter von $m < 2.965$ gibt es nur kurzfristig konjunkturelle Schwankungen, bis sich die Trajektorie dem stabilen Gleichgewicht (Y^* , K^*) annähert und dann in diesem verweilt. Permanente Konjunkturschwankungen sind somit nicht für alle Parameterwerte möglich.

Für größere Werte von m wird der Fixpunkt instabil, da der Modulus der konjugiert komplexen Eigenwerte größer als eins wird. Wählt man z.B. $m = 3$, so treten die für ein Konjunkturmodell typischen Zyklen auf. Das Kaldor-Modell besitzt dann einen stabilen Orbit, dem sich die Trajektorien annähern. Diese erste und weitere Bifurkationen, die bei zunehmender Vergrößerung von m auftreten, lassen sich in einem Bifurkations- oder Feigenbaumdiagramm graphisch veranschaulichen. Auf der Abszisse wird der veränderbare Systemparameterwert abgetragen und auf der Ordinate die dazugehörenden Iterationswerte der Systemvariablen. Die Bifurkationsdiagramme des Kaldor-Modells, die Abbildungen 2 und 3, wurden dadurch erzeugt, daß die m -Werte auf der Abszisse in 500 Intervalle geteilt und für jede Intervallmitte 400 Iterationswerte errechnet wurden. Um Störungen der Einschwingphase weitgehend auszuschließen, sind die ersten 300 Iterationswerte im Diagramm ausgeblendet. Wegen der Zweidimensionalität der Bifurkationsdiagramme wird der Einfluß der Systemparameteränderung jeweils auf eine der beiden Systemvariablen, Y bzw. K , dargestellt.

Beginnend mit $m = 2$, besitzt das Kaldor-Modell einen Fixpunkt, der ab einem kritischen m -Wert $m_k = 2.965$ instabil wird. Diese erste Bifurkation läßt sich im Bifurkationsdiagramm nur sehr schwer erkennen. Das liegt zum einen daran, daß in der Umgebung des kritischen Wertes m_k die Einschwingphase sehr viele Iterationen beansprucht (für $m = 2.96$ benötigt sie ca. 30000 Iterationen) und deshalb ein Teil der Einschwingphase im Feigenbaumdiagramm enthalten ist. Zum anderen besteht der entstehende stabile Orbit aus vielen einzelnen Punkten, die alle in der Vertikalen abgetragen werden, weshalb sich die einzelnen Punkte des Orbits nicht erkennen lassen.

Wird m vergrößert, expandiert der Orbit so lange, bis sich durch Bifurkation das Systemverhalten erneut verändert. Die Bifurkationen sind an den Strukturänderungen im Feigenbaumdiagramm erkennbar. Nach der ersten Bifurkation treten kleine Bereiche auf, in denen der Attraktor sein orbitales Verhalten kurzfristig aufgibt, bevor er bei einem Parameterwert von $m \approx 13$ in einen 14er-Zyklus übergeht, der für $m \approx 14$ wieder verschwindet. Ab einem Wert von $m_c \approx 16.5$ beginnt ein chaotischer Bereich, der sich durch Sensitivität der Startbedingungen und antizyklischem Verhalten auszeichnet. Wird m noch weiter erhöht, entsteht plötzlich bei $m \approx 22$ ein stabiler 5er-Zyklus. Durch abermaliges Erhöhen von m , verdoppelt sich der Zyklus auf 10, 20, ... bis man

sich schließlich wieder in einem chaotischen Bereich befindet.

3.2 Sensitivität gegenüber Anfangswertänderungen

Ein Charakteristikum für Systeme im chaotischen Bereich ist die Sensitivität des Systems auf Anfangswertänderungen bzw. exogene Störungen.⁵ Verfolgt man in einem sich chaotisch verhaltenden System die Trajektorien zweier Startwerte, die sich nur gering unterscheiden, so beschreiben sie aufgrund des dissipativen Charakters des Systems nach kurzer Zeit einen völlig unterschiedlichen Verlauf.

Auch die Trajektorie des Kaldor-Modells mit einem Reaktionsparameter von $m = 20$ besitzen diese Sensitivität. Betrachtet man in Abbildung 4 die Trajektorien benachbarter Startwerte des Volkseinkommens $Y_0^1 = 65$ und $Y_0^2 = 65.5$ so verlaufen sie anfänglich parallel, bis sie nach 15 Iterationen völlig unterschiedliche Wege einschlagen. Das gleiche gilt für den Kapitalstock K in Abbildung 5 mit den Startwerten für die Trajektorien $K_0^1 = 265$ und $K_0^2 = 265.5$. Äquivalent zur Sensitivität gegenüber Anfangswertveränderungen ist die Sensitivität auf externe Störungen. Wird eine Trajektorie in einem Zustand leicht gestört, führt die Störung dazu, daß die Trajektorie nach kurzer Zeit einen völlig anderen Weg beschreibt als ohne Störung.

Für das Kaldor-Modell bedeutet dies, daß sich bei einer Meßungenauigkeit von 0.5 Einheiten das Volkseinkommen und der Kapitalstock nur bis zu einem Zeithorizont von $t = 15$ zuverlässig prognostizieren lassen; eine längerfristige Prognose wäre nur zufällig richtig.

3.3 Seltsame Attraktoren

Eine weitere Eigenschaft des Chaos besteht darin, daß die entstehenden Attraktoren weder Fixpunkte noch Zyklen sind. Es sind sogenannte seltsame Attraktoren. Das Vorhandensein seltsamer Attraktoren ist typisch für chaotische Systeme. Sie besitzen wie herkömmliche Attraktoren die Eigenschaft, daß Trajektorien außerhalb des Attraktionsbereiches in diesen hineingezogen werden. Im Gegensatz zu einem Zyklus besitzen die Trajektorien eines seltsamen Attraktors jedoch kein periodisches Verhalten. Wegen dieser Aperiodizität chaotischer Systeme kann die Trajektorie innerhalb des seltsamen Attraktors niemals den gleichen Punkt zweimal erreichen, da sonst aufgrund der Eindeutigkeit der Systemgleichungen die Trajektorie wiederholt die gleiche Bahn einschlagen müßte, und somit der Attraktor doch wieder einen Zyklus besäße.

Aus der bereits erwähnten Anfangswertsensitivität heraus ergibt sich eine weitere Besonderheit seltsamer Attraktoren. Zwei benachbarte Trajektorien divergieren exponentiell.⁶ Da jedoch auch seltsame Attraktoren räumlich begrenzt sind, können die Trajektorien nicht unbeschränkt divergieren: Es kommt zu Faltungen der Trajektorien.⁷ Durch das Falten nähern sich die Trajek-

⁵ Vgl. z.B. Gabisch (1989), S. 580.

⁶ Vgl. Crutchfield, Farmer, Packard und Shaw (1986), S. 51.

⁷ Vgl. Worg (1993), S. 78.

torien, bevor sie wieder auseinanderlaufen. Die genannten Faltungen lassen sich gut im seltsamen Attraktor des Kaldor-Modells der Abbildung 6 erkennen.

4 Kontrolle chaotischer Konjunkturzyklen im Kaldor-Modell

4.1 Prämissen des Kontrollansatzes

Mit Hilfe des Kontrollansatzes von Shinbrot, Grebogi, Ott und Yorke (1993) werden wir nun zeigen, wie sich instabile Gleichgewichte, die in einem seltsamen Attraktor eingebettet sind, stabilisieren lassen. Die Kontrolle greift in das System ein und lenkt, durch Veränderung einer Kontrollgröße, die Trajektorie des Zustandsvektors in die Richtung des gewünschten Fixpunkts oder Zyklus. Wesentlich dabei ist, daß solange mit dem Kontrolleingriff gewartet wird, bis sich die Trajektorie von selbst in der näheren Umgebung des gewünschten Zyklus aufhält. Hierbei wird die Eigenschaft genutzt, daß die instabilen Zyklen im seltsamen Attraktor eingebettet sind. Jede noch so kleine Umgebung eines Punktes auf dem seltsamen Attraktor wird von einem instabilen Zyklus passiert.⁸ Deshalb nähert sich jede Trajektorie im Zeitablauf dem gewünschten Zyklus beliebig nahe. Hierdurch ist es möglich, Kontrolleingriffe in das Modell in Form einer Kontrollgrößenänderung so klein wie nötig zu halten. Aufgrund der Sensitivität des Trajektorienverlaufs bezüglich kleinster Eingriffe im Chaos, kann die Trajektorie auf diese Weise mit minimalem Aufwand in das gewünschte Gleichgewicht geführt werden.

Der Kontrollansatz von Shinbrot, Grebogi, Ott und Yorke (1993) basiert auf den folgenden drei Prämissen:

1. Der zu stabilisierende Fixpunkt bzw. Zyklus ist im seltsamen Attraktor eingebettet.
2. Das Verhalten der Trajektorie in der Umgebung des zu stabilisierenden Fixpunktes bzw. Zyklus kann durch eine lineare Approximation beschrieben werden.
3. Durch geringe Variation der Kontrollgröße verändert sich das Systemverhalten nicht.

Die erste Prämisse ist notwendig, um zu garantieren, daß sich die chaotische Trajektorie dem zu stabilisierenden Fixpunkt bzw. Zyklus annähert und damit die Kontrolle mit minimalen, d.h. ökonomisch sinnvollen, Eingriffen erst möglich wird. Die zweite Prämisse beschränkt die Betrachtung auf einen linearen Kontrollansatz. Die letzte Prämisse stellt sicher, daß durch die Änderung der Kontrollgröße keine Bifurkation auftritt und man sich weiterhin im chaotischen Bereich befindet.

⁸ Vgl. Argyris, Faust und Haase (1994), S. 578.

4.2 Auswahl des zu stabilisierenden Zielzyklus

Zunächst ist der zu stabilisierende Zielzyklus auszuwählen.⁹ Wegen der unbeschränkten Anzahl von Zyklen im Chaos beschränkt man sich auf das Aufspüren von Zyklen niedriger Periodizität. Zyklen höherer Periodizität lassen sich im Prinzip genauso gut kontrollieren, jedoch wollen wir hier annehmen, daß sie für den Entscheidungsträger als Kontrollziel nicht in Frage kommen.

Anschließend wählt der Entscheidungsträger unter allen ermittelten Zyklen den für ihn optimalen aus. Für das sich chaotisch verhaltende Kaldor-Modell mit einer Reaktionsgeschwindigkeit von $m = 20$ soll der instabile Fixpunkt $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$ mit den Koordinaten $\mathbf{x}^* = (62.6723, 263.2237)'$ stabilisiert werden.¹⁰

Die Jakobimatrix sieht im Fixpunkt wie folgt aus:

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1.65733118 & -2.25754463 \\ 0.24286656 & 0.83712277 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Die Eigenwerte der Jakobimatrix $\lambda_{1,2} = 1.24722697 \pm 0.61651978j$ sind konjugiert komplex mit einem Modulus von $\text{mod } \lambda = 1.39128421 > 1$. Der Fixpunkt ist somit kein Sattelpunkt sondern eine Quelle, die nur instabile Mannigfaltigkeiten besitzt. Punkte auf einer instabilen Mannigfaltigkeit nähern sich bei rückwärtigen Zeitverlauf $t \rightarrow -\infty$ dem Fixpunkt. Im normalen Zeitverlauf entsprechend entfernt sich ein Punkt auf der instabilen Mannigfaltigkeit vom Fixpunkt. Da der betrachtete Fixpunkt zwei instabile Mannigfaltigkeiten besitzt entfernen sich alle Punkte in dessen Umgebung in beide Dimensionsrichtungen exponentiell. Aus diesem Grund ist die von Holyst, Hagemel, Haag und Weidlich (1996) angewandte Kontrollmethode in unserem Beispiel nicht anzuwenden, da eine stabile Mannigfaltigkeit fehlt.

Es sei angenommen, der Staat besitze einen wirtschaftspolitischen Spielraum derart, daß er seine Investitionsausgaben nach oben bzw. nach unten um maximal $u_{\max} = 0.3$ verändern kann. Dies entspricht ungefähr 2.3% der gesamten Investitionsausgaben $I(Y^*, K^*) = 13.16118$ im vorgegebenen Fixpunkt.

Der Kontrolleingriff erfolgt nicht, wie von Shinbrot, Grebogi, Ott und Yorke (1993) ursprünglich vorgeschlagen, durch eine Systemparameteränderung, sondern über die indirekte Beeinflussung von Y und K mit Hilfe der Kontrollvariablen u_t , welche die Änderung der staatlichen Investitionsausgaben repräsentiert. Die möglichen Eingriffe des Staates erfordern eine Ergänzung der Differenzgleichungen des Kaldor-Modells durch die Kontrollvariablen u_t :

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= F^Y(Y_t, K_t) = Y_t + m(I(Y_t, K_t) + u_t - S(Y_t)) \\ K_{t+1} &= F^K(Y_t, K_t) = (1 - b)K_t + I(Y_t, K_t) + u_t. \end{aligned} \quad (5)$$

⁹ Vgl. Ott, Grebogi und Yorke (1990), S. 1196.

¹⁰ Um einen k -Zyklus zu stabilisieren, ist das Vorgehen dasselbe wie für einen Fixpunkt. Es ist nur die Gleichung $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}^k(\mathbf{x}^*)$ anstelle von $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$ zu betrachten.

Ohne Eingriffe des Staates wäre u_t stets gleich Null.

4.3 Linearisierung der Fixpunktumgebung

Für den Kontrollansatz wird die Umgebung des Fixpunktes linearisiert. Wir erhalten

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}^* + \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \delta \mathbf{x}_t \quad (6)$$

mit

$$\delta \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}^*$$

und $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}}$ aus (4). Eine lineare Approximation reicht für den Kontrollansatz gewöhnlich aus, da die Kontrolle erst einsetzt, wenn sich die Trajektorie bereits in der nächsten Umgebung des Fixpunktes befindet.

Um den Einfluß der Kontrollvariablen u_t zu ermitteln, die die Trajektorie zum Fixpunkt führt, ergänzen wir Ansatz (6) um den Vektor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^Y}{\partial u_t} \\ \frac{\partial F^K}{\partial u_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten:

$$\delta \mathbf{x}_{t+1} = \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \delta \mathbf{x}_t + \mathbf{w} u_t. \quad (7)$$

Der Summand $\mathbf{w} u_t$ beinhaltet die Änderung des Trajektorienverlaufs aufgrund der Kontrollvariable u_t .

4.4 Steuerungsregel

Gesucht ist nun eine Steuerungsregel zur Bestimmung der Kontrollgrößenänderung u_t , welche die Trajektorie des Abstandsvektors $\delta \mathbf{x}_t$ gegen den gewünschten Zustand Null konvergieren läßt. Da Gleichung (7) linear ist, kann für das Kaldor-Modell eine lineare Steuerungsregel der Form

$$u_t = -\mathbf{k}' \delta \mathbf{x}_t = -(k_1, k_2) \begin{pmatrix} \delta Y_t \\ \delta K_t \end{pmatrix} \quad (8)$$

gefunden werden. ¹¹ Dieser Ansatz zur Steuerung der Trajektorie ist der Steuerungstechnik entlehnt. ¹² Mit dem Steuerungseingriff wird nun solange gewartet, bis die Trajektorie in der

¹¹ Vgl. Ogata (1990), S. 701; Shinbrot, Grebogi, Ott und Yorke (1993), S. 413.

¹² Die Steuerungstechnik entwickelt Ansätze, um dynamische Systeme in einen gewünschten Zielzustand zu lenken. Vgl. Ogata (1990), S.695.

Umgebung des Fixpunktes ist. Die Kontrollregel lautet dann:

$$u_t = \begin{cases} -\mathbf{k}' \delta \mathbf{x}_t & \text{für } |\mathbf{k}' \delta \mathbf{x}_t| \leq u_{\max} \\ 0 & \text{für } |\mathbf{k}' \delta \mathbf{x}_t| > u_{\max} \end{cases} \quad (9)$$

$\mathbf{k}' = (k_1, k_2)$ ist ein konstanter Zeilenvektor, der die Kontrollvariable u_t proportional zum Abstandsvektor $\delta \mathbf{x}_t$ bestimmt. Durch Einsetzen von (8) in (7) erhält man:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{t+1} &= \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \delta \mathbf{x}_t + \mathbf{w}(-\mathbf{k}' \delta \mathbf{x}_t) \\ &= (\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w} \mathbf{k}') \delta \mathbf{x}_t. \end{aligned} \quad (10)$$

Damit der Fixpunkt stabilisiert wird, muß der Abstandsvektor aus Gleichung (10) gegen Null konvergieren: $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}_t = \mathbf{0}$. Dies wird nur erreicht, wenn die reellen Eigenwerte der Matrix $(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w} \mathbf{k}')$ kleiner als eins sind.¹³

4.5 Steuerbarkeit des Kaldor-Modells

Um sicherzustellen, daß sich ein Steuerungsvektor \mathbf{k} bestimmen läßt, muß das System auf seine Steuerbarkeit hin untersucht werden.¹⁴ Ein Differenzgleichungssystem wie das des Kaldor-Modells ist steuerbar, wenn es möglich ist, in einem begrenzten Zeitintervall durch Kontrollsignale u_t einen anfänglichen Zustand $\delta \mathbf{x}_0$ zu jedem Zielzustand zu führen. Wenn jeder beliebige Anfangszustand steuerbar ist, bezeichnet man das System als vollständig zustandssteuerbar.

Um die Steuerbarkeit zu überprüfen, wird zunächst die Trajektorie eines Anfangszustandes $\delta \mathbf{x}_t$ betrachtet. Der Zustand im Zeitpunkt t unter Berücksichtigung der einzelnen Steuerungssignale u_t läßt sich mit Hilfe der Gleichung (7) eindeutig bestimmen:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_1 &= \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \delta \mathbf{x}_0 + \mathbf{w} u_0 \\ \delta \mathbf{x}_2 &= \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} (\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \delta \mathbf{x}_0 + \mathbf{w} u_0) + \mathbf{w} u_1 = \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}^2} \delta \mathbf{x}_0 + \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \mathbf{w} u_0 + \mathbf{w} u_1 \\ &\vdots \\ \delta \mathbf{x}_t &= \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}^t} \delta \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^t \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}^{(t-j)}} \mathbf{w} u_{j-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Der Einfluß der Kontrollvariablen auf den Trajektorienverlauf $\sum_{j=1}^t \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}^{(t-j)}} \mathbf{w} u_{j-1}$ kann additiv zur Trajektorie ohne Steuerungssignal $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}^t} \delta \mathbf{x}_0$ ergänzt werden. Ohne die Allgemeingültigkeit zu verlieren ist es ausreichend, für die Überprüfung der Steuerbarkeit die Erreichbarkeit des Zielzustandes

¹³ Entsprechend muß für konjugiert komplexe Eigenwerte der Modulus kleiner als eins sein.

¹⁴ Für stetige Modelle findet sich in Ogata (1990), S. 701 ff. ein allgemeiner Ansatz zur Überprüfung der Steuerbarkeit.

$\delta \mathbf{x}_t = \mathbf{0}$ festzustellen.¹⁵ Die Gleichung (11) läßt sich nun umformen zu

$$\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} \delta \mathbf{x}_0 = - \sum_{j=1}^t \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} (t-j) \mathbf{w} u_{j-1}.$$

Multipliziert man mit $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-t}$ von links, so ergibt sich

$$\delta \mathbf{x}_0 = - \sum_{j=1}^t \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-j} \mathbf{w} u_{j-1}.$$

Dies läßt sich in Matrixform schreiben:

$$\delta \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \delta x_0^1 \\ \delta x_0^2 \\ \vdots \\ \delta x_0^n \end{pmatrix} = \left(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-1} \mathbf{w} \quad \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-2} \mathbf{w} \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-t} \mathbf{w} \right) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{t-1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Damit Gleichung (12) eindeutig bestimmbar und jeder Startwert $\delta \mathbf{x}_0$ darstellbar ist, muß zum einen das Zeitintervall mindestens soviel Iterationsschritte enthalten wie das Differenzgleichungssystem Dimensionen besitzt, also $t = n$ gelten, zum anderen darf die Matrix $\left(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-1} \mathbf{w} \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-t} \mathbf{w} \right)$ nicht singular sein, d.h. der Rang der Matrix muß gleich der Dimension n sein. Für das zweidimensionale Kaldor-Modell muß gelten: $Rg \left(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-1} \mathbf{w} \quad \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}-2} \mathbf{w} \right) = 2$. Diese Bedingung ist hier erfüllt.

4.6 Pole Placement Methode

Nun sind die Komponenten des Steuerungsvektors \mathbf{k} zu bestimmen. Ihre Auswahl entscheidet über die Eigenwerte der Matrix $(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w} \mathbf{k}')$. Damit der Abstandsvektor $\delta \mathbf{x}_t$ gegen Null konvergiert, reicht es aus, wenn die Eigenwerte betragsmäßig kleiner eins sind. Da eine unbegrenzte Anzahl von Eigenwertkombinationen diese Bedingung erfüllt, werden die gewünschten Eigenwerte vorgegeben und mit der *Pole Placement Methode*¹⁶ die zugehörigen Komponenten des Vektors \mathbf{k}' ermittelt.

Die Eigenwerte der Matrix $(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w} \mathbf{k}')$ sind die Nullstellen seines charakteristischen Polynoms: $\det(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w} \mathbf{k}' - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Für das zweidimensionale Kaldor-Modell werden bei Anwendung der Pole Placement Methode zwei Nullstellen $\mu_{1,2}$ als Eigenwerte vorgegeben:

$$\det \left(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w} \mathbf{k}' - \lambda \mathbf{I} \right) = (\lambda - \mu_1) (\lambda - \mu_2) = 0 \quad (13)$$

¹⁵ Vgl. Ogata (1990), S. 701.

¹⁶ Vgl. Ogata (1990), S.776.

Damit Gleichung (13) erfüllt ist, muß $\text{tr}(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w}\mathbf{k}') = \mu_1 + \mu_2$ und $\det(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w}\mathbf{k}') = \mu_1\mu_2$ gelten. Konkret ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2.494454 - 20k_1 - k_2 &= \mu_1 + \mu_2 \\ 1.935681 - 19k_1 + 3.2k_2 &= \mu_1\mu_2 \end{aligned} \tag{14}$$

Die Komponenten des Vektors $\mathbf{k}' = (k_1, k_2)$ lassen sich aus diesen beiden Gleichungen bestimmen. Mit dem so ermittelten Steuerungsvektor läßt sich die Kontrollregel (9) zur Bestimmung der notwendigen Änderung der staatlichen Investitionsausgaben aufstellen.

Für betragsmäßig kleine Eigenwerte konvergiert der Abstandsvektor $\delta\mathbf{x}_t$ (10) bei einsetzender Kontrolle ($u_t \leq u_{\max}$) schneller gegen Null als für größere Eigenwerte. Das schnellere Konvergieren macht größere Eingriffe notwendig.¹⁷ Dies führt tendenziell zu einem späteren Einsetzen der Chaoskontrolle, da u_{\max} öfters überschritten wird. Unter der Vielzahl möglicher Eigenwertkombinationen wird versucht, durch Simulation die Eigenwerte zu finden, mit denen sich das Gleichgewicht am schnellsten stabilisieren läßt.

4.7 Kontrollergebnisse

Es wurde der Kontrollerfolg für unterschiedliche Startwerte und Steuerungsvektoren untersucht. Zusätzlich wurde untersucht, wie sich eine Veränderung des maximal zulässigen Kontrolleingriffs u_{\max} auswirkt. Wählt man z.B. für die Regel (9) den Steuerungsvektor $\mathbf{k} = (0.11949306, 0.1045926)'$, bei dem die Eigenwerte der Matrix $(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w}\mathbf{k}')$ gleich Null sind, und läßt man einen maximalen Eingriff von $u_{\max} = 0.3$ zu, so ist - wie in Abbildung 7a dargestellt - eine Trajektorie mit dem Startwert ($Y_0 = 65, K_0 = 255$) bei Einführung der Kontrollregel nach 40 Iterationen ($t = 40$) im Fixpunkt stabilisiert. Bereits in $t = 12$ ist die Trajektorie so nahe am Fixpunkt, daß die Kontrolle einsetzen kann. Das Ausmaß der Kontrollen ist in Abbildung 7b gezeigt. Jedoch ist der erste Kontrollversuch erfolglos. Die Trajektorie verläßt die Umgebung des Fixpunktes wieder und die Kontrolle setzt aus, bis sich die Trajektorie in $t = 20$ erneut dem Fixpunkt nähert. Doch erst bei der dritten Annäherung ($t = 35$) läßt sich die Trajektorie endgültig zum Fixpunkt führen und dort stabilisieren.

Die notwendigen mehrmaligen Kontrollversuche erklären sich aus der linearen Approximation des nichtlinearen Verhaltens. Die Eingriffe werden aufgrund der Approximation zum Teil zu ungenau ermittelt, so daß die Trajektorie die Umgebung des Fixpunktes wieder verläßt.

Die Änderungen der staatlichen Investitionsausgaben nach der Erreichung des Fixpunktes sind marginal, so daß sie in Abbildung 7b graphisch nicht mehr zu erkennen sind. Sie dürfen deshalb aber nicht vernachlässigt werden. Wegen der Sensitivität im Chaos verläßt die Trajektorie den Fixpunkt, wenn der Kontrollansatz deaktiviert wird. Dies belegt Abbildung 8. Werden z.B. die

¹⁷ Vgl. Ogata (1990), S. 795.

Eingriffe in $t = 250$ gestoppt, so bleibt die Trajektorie zwar noch eine Zeitlang im Fixpunkt, bevor sie sich ab $t = 300$ wieder chaotisch verhält.

Kumuliert man die gesamten Änderungen betragsmäßig, so ergibt sich insgesamt eine Summe von 0.8227, die notwendig ist, den Startwert $(Y_0 = 40, K_0 = 290)$ mit dem Steuerungsvektor $\mathbf{k} = (0.11949306, 0.1045926)'$ in den Fixpunkt zu führen und dort zu halten. Ein relativ geringer Betrag, wenn man bedenkt, daß der Fixpunkt solange stabil bleibt, wie die Kontrolle aktiviert ist.

Die für die Stabilisierung des Fixpunktes benötigte Zeit hängt sehr stark von den Startwerten ab. So ist z.B. für $(Y_0 = 65, K_0 = 255)$ der Fixpunkt erst nach 75 Iterationen (bei gleichem Steuerungsvektor \mathbf{k}') stabilisiert. Eine schnellere Stabilisierung läßt sich bei diesen Startwerten jedoch erreichen, wenn die vorgegebenen Eigenwerte der Matrix $(\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{F}} - \mathbf{w}\mathbf{k}')$ geändert werden. Wählt man statt $\lambda_{1,2} = 0$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 0.4$ und $\lambda_2 = 0.5$, ist der Fixpunkt zum Zeitpunkt $t = 30$ stabilisiert. Wird zusätzlich zur Veränderung der Eigenwerte die maximale Variation der staatlichen Investitionsausgaben auf $u_{\max} = 0.1$ reduziert, stellt man überraschenderweise eine Verkürzung der Zeit bis zur erfolgreichen Stabilisierung auf $t = 20$ fest. Dies widerspricht der Annahme, daß die Stabilisierung um so schneller erfolgt, je größer der maximale erlaubte Eingriff ist.

Auch dieses Phänomen erklärt sich aus der linearen Approximation der Umgebung des Fixpunktes. Vergrößert man die linear approximierte Umgebung des Fixpunktes durch ein größeres u_{\max} wird auch der Fehler bei der Ermittlung des Eingriffs u_t größer. Der Fehler kann eine Größe annehmen, die die Trajektorie entgegen der Absicht vom Fixpunkt fortbewegt. Ein kleinerer maximaler Eingriff stabilisiert dann den Fixpunkt schneller. Ein zu großes u_{\max} kann sogar dazu führen, daß sich der Fixpunkt nicht stabilisieren läßt: Für ein $u_{\max} = 0.9$, einen Startwert $(Y_0 = 40, K_0 = 290)$ und vorgegebene Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0.1$ führen die Eingriffe zu einem oszillierenden Verhalten von Y und K . Es wird dabei allerdings kein Zyklus stabilisiert, sondern der Trajektorie wird durch permanente Kontrolleingriffe ein zyklisches Verhalten aufgezwungen.

Der Handlungsspielraum für die Änderung der staatlichen Investitionsausgaben wird durch u_{\max} vorgegeben. Er ist um so größer, je größer u_{\max} gewählt wird. Es ist deshalb möglich, u_{\max} zu reduzieren, um in Einzelfällen eine schnellere Stabilisierung zu erreichen, ohne dabei die anfangs gesetzte Schranke für die maximalen Eingriffe zu überschreiten. Für jeden Einzelfall muß überprüft werden ob eine Verringerung von u_{\max} vorteilhaft ist. Eine Vergrößerung ist annahmebedingt ausgeschlossen, da der Staat seine Investitionsausgaben nicht uneingeschränkt verändern kann.

Aus den durchgeführten Simulationen ist kein einzelner Steuerungsvektor \mathbf{k}' und kein maximaler Eingriff u_{\max} feststellbar, der alle Trajektorien gleichmäßig schnell zum Fixpunkt führt. Es lassen sich jedoch zwei Tendenzen erkennen: (i) Je höher die Obergrenze der staatlichen Investitionsausgaben u_{\max} gesetzt werden kann, um so wahrscheinlicher ist eine schnelle Stabilisierung des Fixpunktes. (ii) Negative Eigenwerte führen meist zu einer langsameren Stabilisierung als positive Eigenwerte.

5 Zusammenfassung

Methodisch revolutionär an der Arbeit von Ott, Grebogi und Yorke (1990) ist die Erkenntnis, daß Chaos unter bestimmten Voraussetzungen bereits mit minimalem Aufwand kontrolliert werden kann. Entscheidungsträger, die nur in begrenztem Umfang in chaotische Systeme eingreifen können, besitzen somit ein Instrumentarium, mit dem sie ein sich chaotisch verhaltendes System stabilisieren können.

Wir konnten am Beispiel des Kaldor-Modells zeigen wie an sich instabile Gleichgewichte im ökonomischen Chaos stabilisiert werden können. Hierbei mußten wir uns nicht wie Holyst, Hagel, Haag und Weidlich (1996) auf die Stabilisierung von Sattelpunktgleichgewichten beschränken sondern erreichen mit dem allgemeineren Kontrollansatz von Shinbrot, Grebogi, Ott und Yorke (1993) die Stabilisierung beliebiger instabiler Fixpunkte oder Zyklen.

Chaos muß nicht mehr ein unerwünschter Systemzustand sein, der durch seine mangelnde Prognosefähigkeit Kosten verursacht. Vielmehr lassen sich die speziellen Eigenschaften des Chaos vorteilhaft nutzen, indem man sich aus unterschiedlichen instabilen Zyklen einen zur Stabilisierung auswählt. Diese Flexibilität bleibt nichtchaotischen Systemen vorenthalten. In Systemen mit stabilen Fixpunkten oder Zyklen können vorhandene instabile Gleichgewichtszustände nicht durch kleine Kontrolleingriffe stabilisiert werden. Kleinere Kontrolleingriffe würden die Trajektorien nur kurzfristig vom stabilen Gleichgewicht ablenken.¹⁸

Interessante zusätzliche Perspektiven bietet die Untersuchung nichtlinearer, chaotischer Systeme mit stochastischen Störeinflüssen. Es eröffnet sich ein weites Feld neuartiger Möglichkeiten der ökonomischen Modellbildung.

¹⁸ Vgl. Ott, Grebogi und Yorke (1990), S. 1197.

Literatur

- ARGYRIS, JOHN, GUNTER FAUST UND MARIA HAASE: *Die Erforschung des Chaos - Eine Einführung für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Braunschweig 1994.
- CHANG, W. W., UND D. J. SMYTH: The Existence and Persistence of Cycles in a Non-linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined. *Review of Economic Studies* 38 (1971), 37–44.
- CRUTCHFIELD, JAMES P., J. DOYNE FARMER, NORMAN H. PACKARD UND ROBERT S. SHAW: Chaos. *Scientific American* 254 (1986), 46–57.
- FEICHTINGER, GUSTAV: (1992) Further Examples for Chaos in Social Sciences. in *Economic Evolution and Demographic Change: Formal Models in Social Sciences*, ed. by G. Haag, U. Müller UND K. G. Troitzsch. Berlin/Heidelberg/New York.
- GABISCH, GÜNTHER: Konjunktur und Chaos. *Das Wirtschaftsstudium* 18 (1989), 577–582.
- GABISCH, G., UND H.-W. LORENZ: *Business Cycle Theory*, 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1989.
- HOLYST, JANUSZ A., TILO HAGEL, GÜNTER HAAG UND WOLFGANG WEIDLICH: How to Control a Chaotic Economy?. *Journal of Evolutionary Economics* 6 (1996), 31–42.
- KALDOR, NICHOLAS: A Model of the Trade Cycle. *Economic Journal* 50 (1940), 78–92.
- LORENZ, HANS-WALTER: *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1989.
- OGATA, KATSUHIKO: *Modern Control Engineering*, 2. Auflage. Englewood Cliffs, NJ 1990.
- OTT, EDWARD, CELSO GREBOGI UND JAMES A. YORKE: Controlling Chaos. *Physical Review Letters* 64 (1990), 1196–1199.
- SAVIT, ROBERT: When Random is Not Random: An Introduction to Chaos in Market Prices. *Journal of Futures Markets* 8 (1988), 271–289.
- SHINBROT, TROY, CELSO GREBOGI, EDWARD OTT UND JAMES A. YORKE: Using Small Perturbations to Control Chaos. *Nature* 363 (1993), 411–417.
- WORG, ROMAN: *Deterministisches Chaos - Wege in die nichtlineare Dynamik*. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien/Zürich 1993.

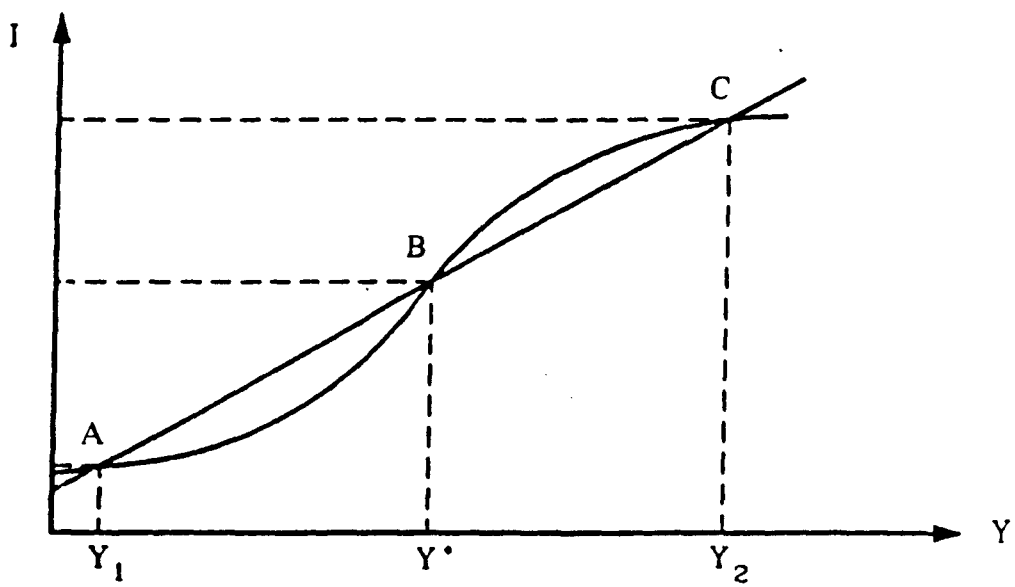


Abbildung 1: Schnittpunkte der S-förmigen Investitions- mit der Sparfunktion

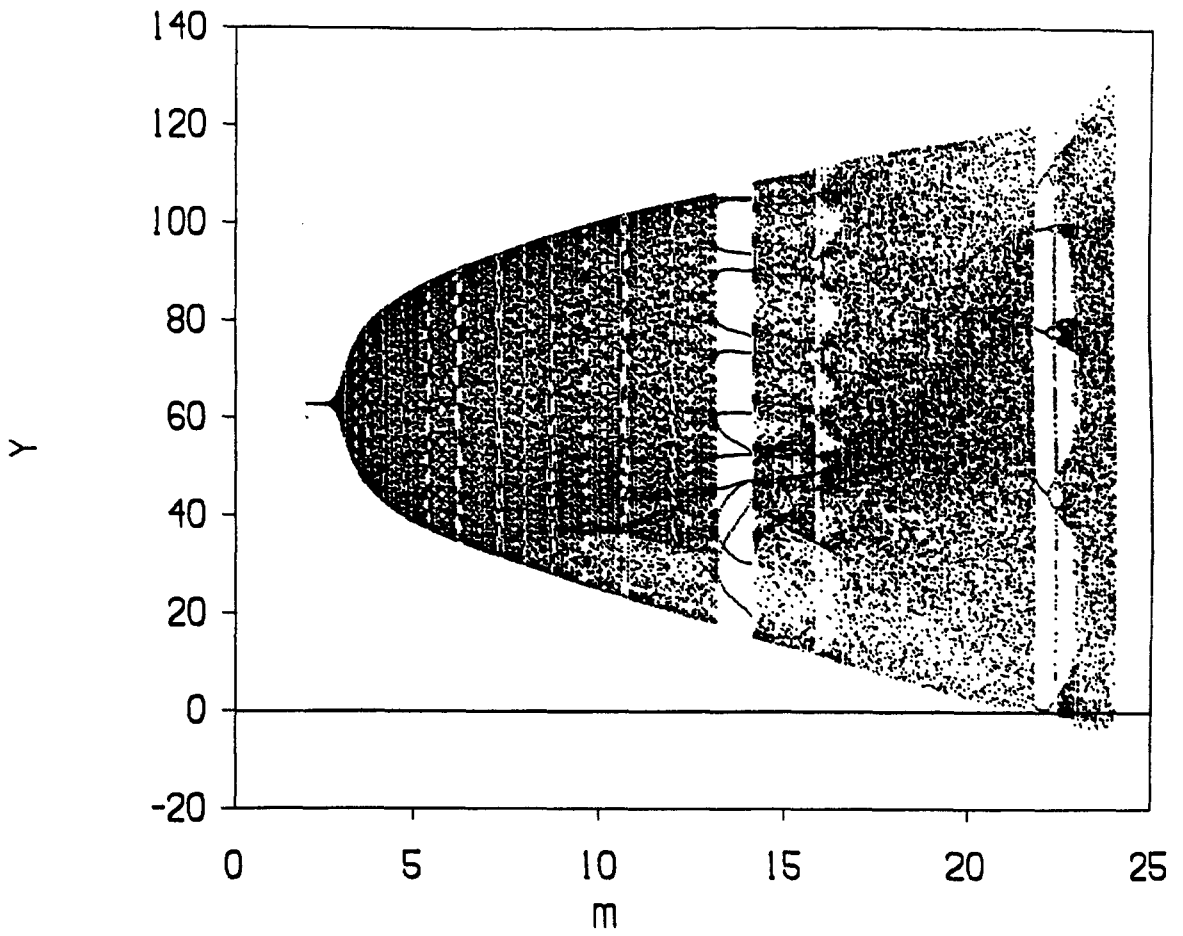


Abbildung 2: Bifurkationsdiagramm des Volkseinkommens Y

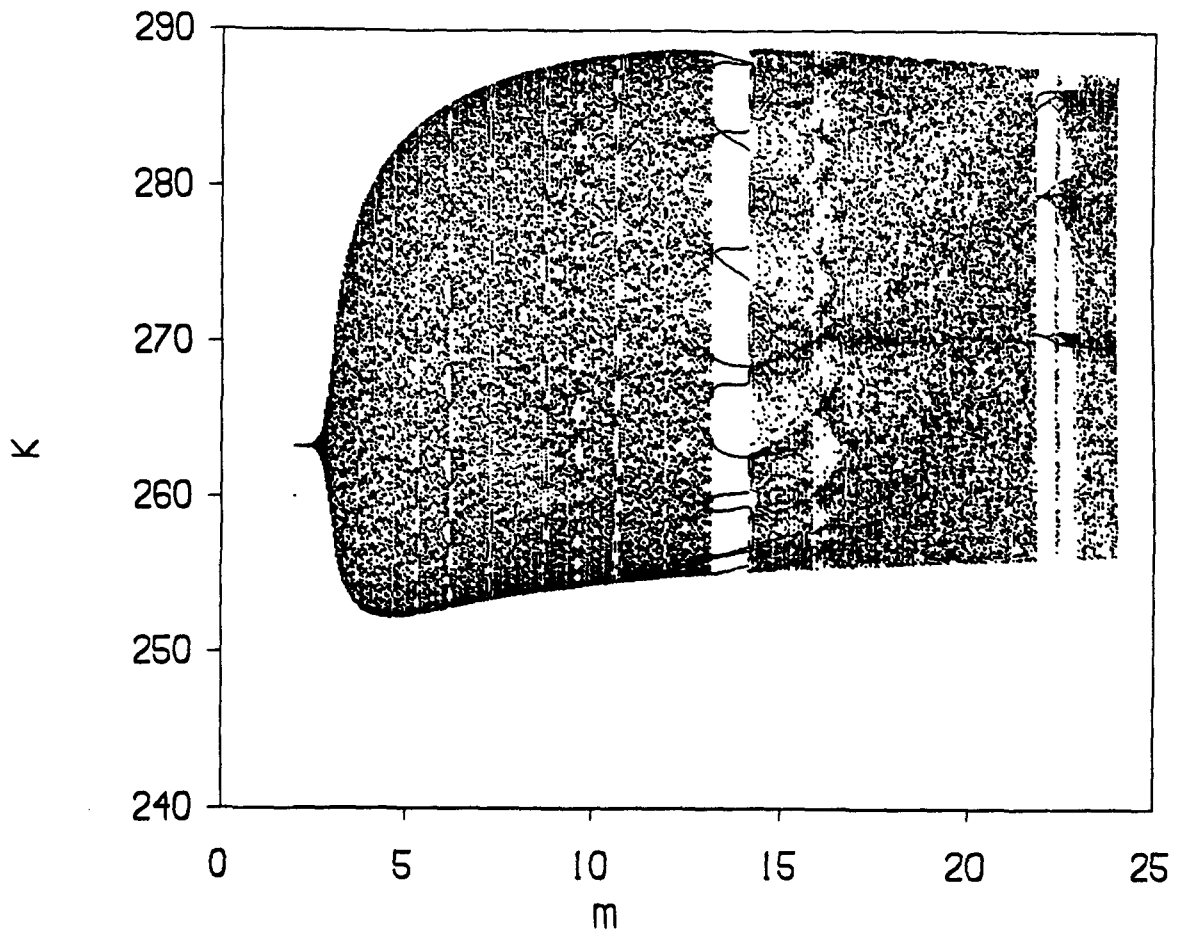


Abbildung 3: Bifurkationsdiagramm des Kapitalstocks K

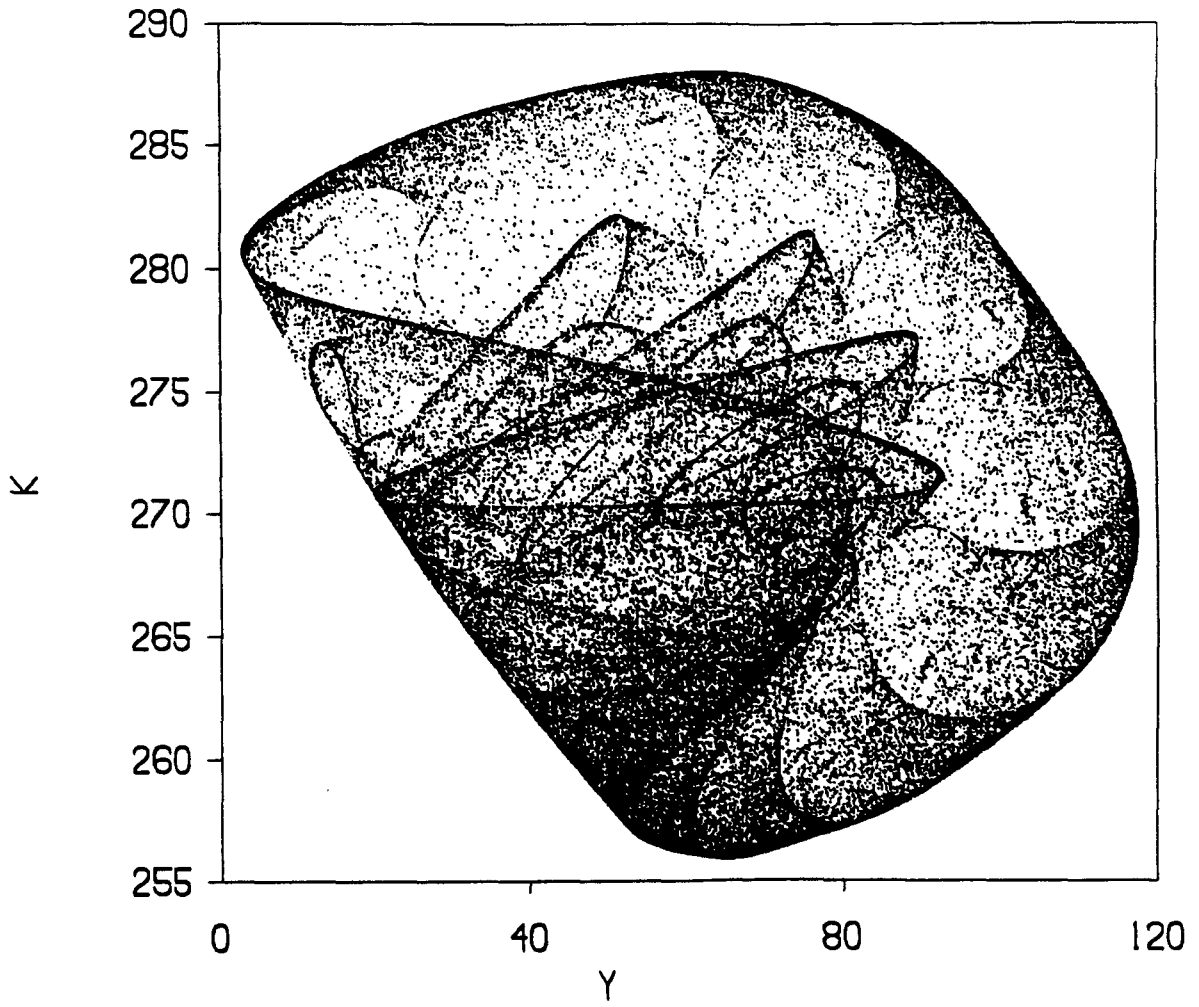


Abbildung 6: Seltsamer Attraktor

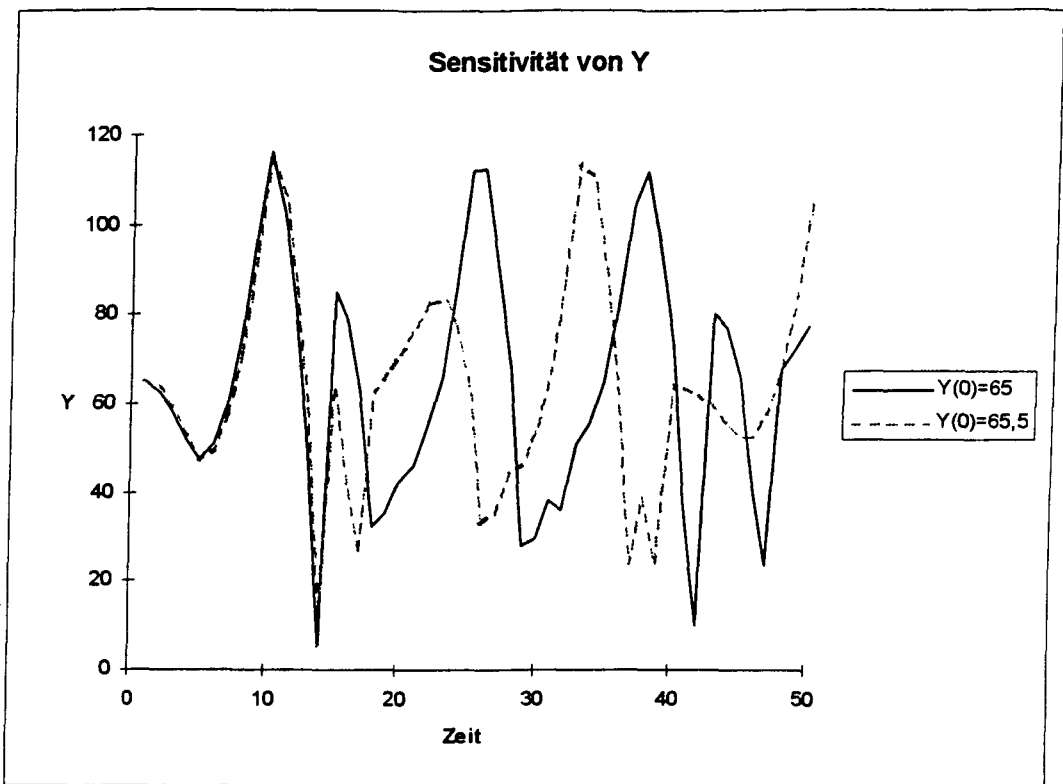


Abbildung 4: Sensitivität des Volkseinkommens Y

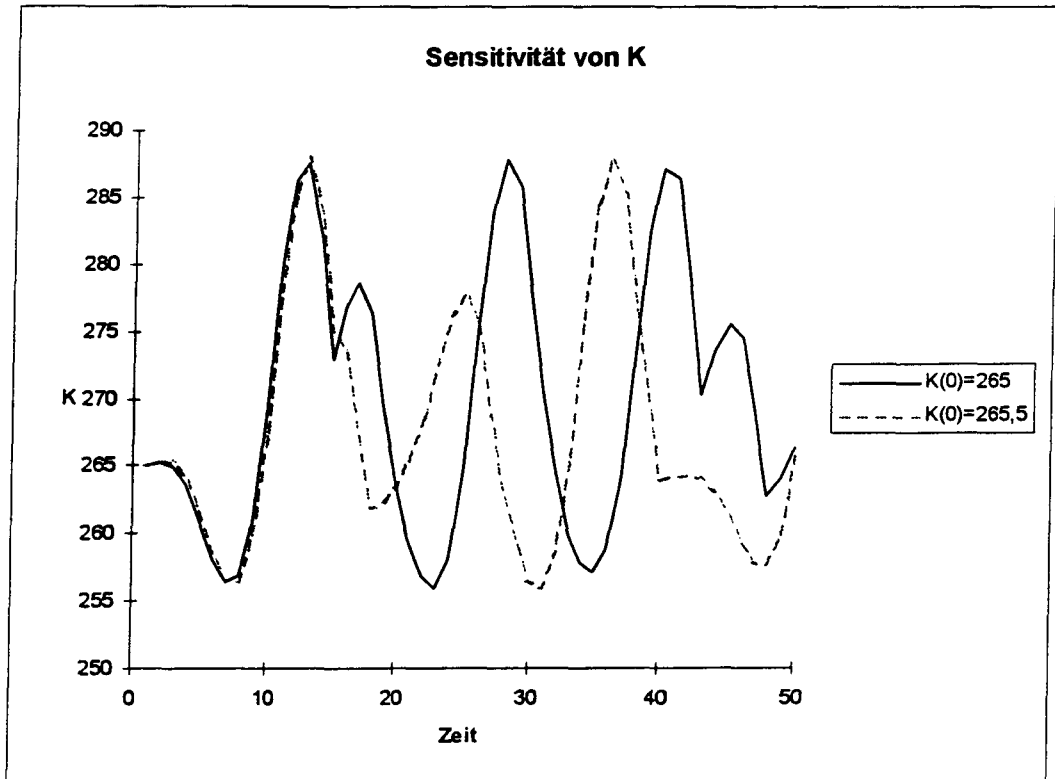


Abbildung 5: Sensitivität des Kapitalstocks K

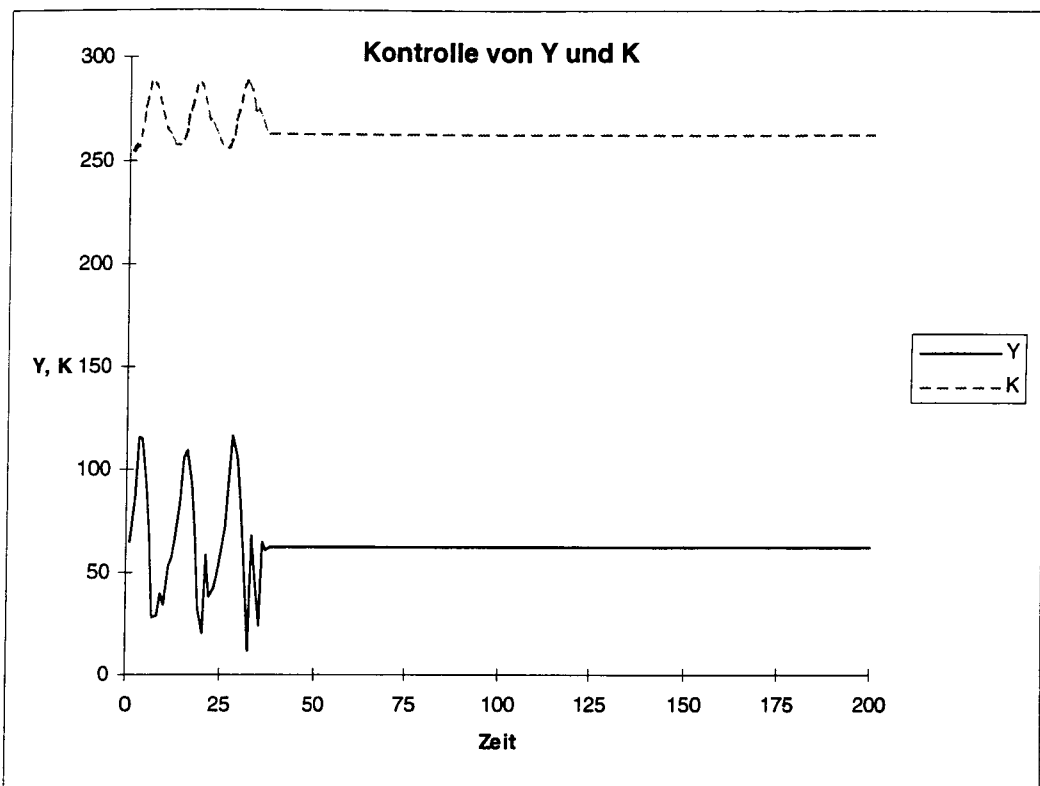


Abbildung 7a: Entwicklung von Volkseinkommen und Kapitalstock bei eingeschalteter Kontrolle

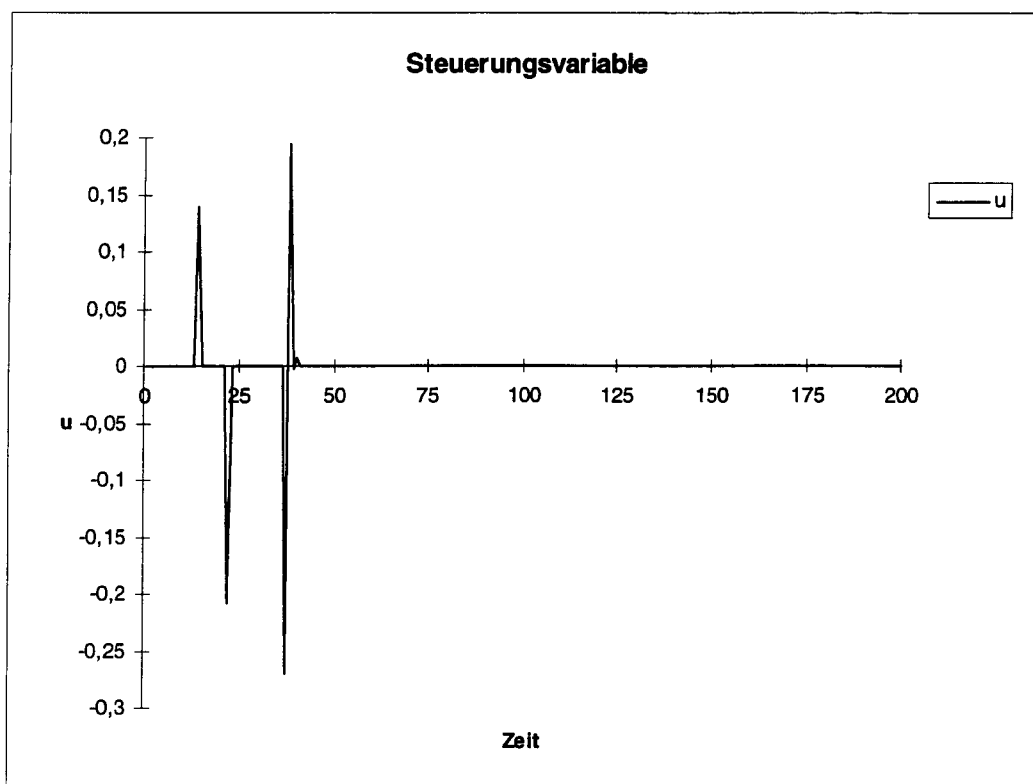


Abbildung 7b: Die für die Kontrolle notwendigen Änderungen der staatlichen Investitionsausgaben

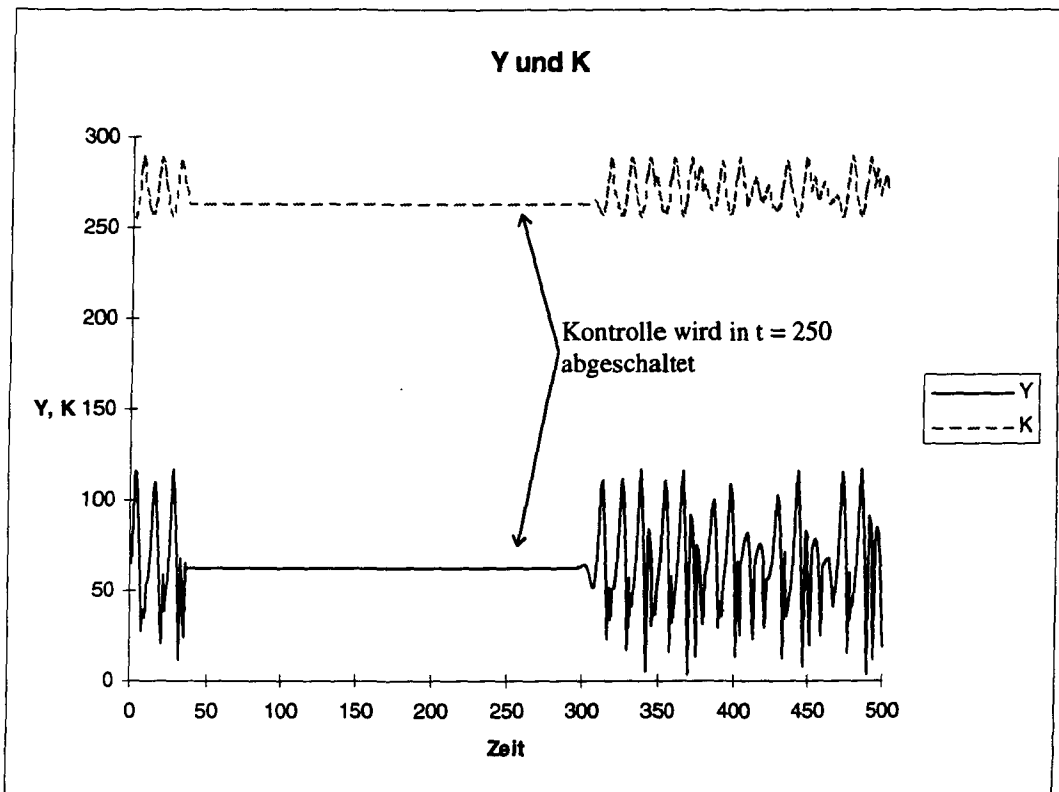


Abbildung 8: Entwicklung von Volkseinkommen und Kapitalstock bei ein- und ausgeschalteter Kontrolle