

Reiß, Ariane

**Working Paper**

## Die Lösung von Differentialgleichungen mittels numerischer Verfahren oder ein Leitfaden zum Aufspüren von Fehlbewertungen bei Derivaten

Tübinger Diskussionsbeiträge, No. 72

**Provided in Cooperation with:**

University of Tuebingen, Faculty of Economics and Social Sciences, School of Business and Economics

*Suggested Citation:* Reiß, Ariane (1996) : Die Lösung von Differentialgleichungen mittels numerischer Verfahren oder ein Leitfaden zum Aufspüren von Fehlbewertungen bei Derivaten, Tübinger Diskussionsbeiträge, No. 72, Eberhard Karls Universität Tübingen, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Tübingen

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/104919>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

**Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät  
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen**

**Die Lösung von Differentialgleichungen  
mittels numerischer Verfahren  
oder  
ein Leitfaden zum Aufspüren von  
Fehlbewertungen bei Derivaten**

Ariane Reiß



**Tübinger Diskussionsbeiträge**

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät  
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

**Die Lösung von Differentialgleichungen  
mittels numerischer Verfahren  
oder  
ein Leitfaden zum Aufspüren von  
Fehlbewertungen bei Derivaten**

Ariane Reiß

Tübinger Diskussionsbeitrag Nr. 72  
Juli 1996

Wirtschaftswissenschaftliches Seminar  
Mohlstraße 36, D-72074 Tübingen

## **Zusammenfassung**

Die Bewertung von Derivaten über ein replizierendes Portfolio führt häufig zu einer Differentialgleichung, welche analytisch nicht lösbar ist. Eine Lösung kann nur mit Hilfe von numerischen Verfahren gefunden werden. Finite Differenzenverfahren sind insbesondere geeignet, Differentialgleichungen in zwei Variablen, für die feste Randbedingungen gegeben sind, zu lösen. In diesem Beitrag wird ein solches Verfahren, die Crank-Nicolson-Methode, dargestellt, und anhand der Bewertung von Power Warrants wird die Programmierung dieses Verfahrens demonstriert.

## 1. Problemstellung

Sowohl in der Finanzierungstheorie als auch in anderen Teilgebieten der Ökonomie wird man zunehmend mit Differentialgleichungen konfrontiert. Häufig existieren keine analytischen bzw. geschlossenen Lösungen für diese Differentialgleichungen oder sie sind nicht bekannt. Die Differentialgleichung (nachfolgend DE) kann daher nur für vorgegebene Parameterwerte numerisch gelöst werden. Im folgenden soll exemplarisch die Lösung einer partiellen parabolischen Differentialgleichung mit Hilfe eines finiten Differenzenverfahrens vorgestellt werden.

## 2. Formen von Differentialgleichungen

Unter einer *gewöhnlichen* Differentialgleichung wird eine Differentialgleichung verstanden, bei der der Wert nur durch eine unabhängige Variable beeinflusst wird, bei einer *partiellen* Differentialgleichung hängt der Wert hingegen von mehreren unabhängigen Variablen ab. Als *Ordnung* einer Differentialgleichung bezeichnet man die Ordnung der höchsten in der Gleichung enthaltenen Ableitung. Der *Grad* einer DE hängt von der Potenz, mit der die höchste Ableitung in die Gleichung eingeht, ab. Neben diesen Charakteristika wird zudem zwischen deterministischen und stochastischen Differentialgleichungen unterschieden.

Beispielhaft für eine gewöhnliche DE erster Ordnung und ersten Grades kann folgende DE für eine Funktion  $b$  angesehen werden, wobei  $t$  die Kalenderzeit,  $r$  eine Konstante und  $dt$  eine infinitesimale Änderung der Zeit angeben,

$$db(t) = rb(t)dt \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial b(t)}{\partial t} = rb(t).$$

Als eindeutige Lösung dieser DE folgt

$$b(t) = b(0)e^{rt},$$

wie durch Differenzierung nach der Zeit überprüft werden kann. Diese gewöhnliche DE beschreibt beispielsweise den zeitlichen Wertverlauf eines risikolosen Wertpapiers  $b$ , welches kontinuierlich den Zins  $r$  erwirtschaftet.

Eine partielle Differentialgleichung (PDE) zweiter Ordnung und ersten Grades für eine Funktion  $f$ , welche von der Zeit  $t$  und von  $x$  abhängt, kann folgendermaßen aussehen:

$$a(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial f}{\partial x \partial t} + c(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + d(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + e(x, t) \frac{\partial f}{\partial t} + g(x, t) f = 0.$$

Diese PDE ist bereits, wie allgemein üblich, so formuliert, daß auf der rechten Seite eine Null steht. Die Koeffizienten der PDE  $a, b, c, d, e$  und  $g$  können sowohl konstant als auch variabel und mithin von  $x$  und  $t$  abhängig sein. Partielle Differentialgleichungen lassen sich, je nachdem, ob die Summe

$$b(x, t)^2 - 4a(x, t)c(x, t)$$

größer, gleich oder kleiner Null ist, in *hyperbolische*, *parabolische* und *elliptische* PDE unterteilen. Ein Beispiel einer parabolischen PDE ersten Grades und zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten ist die sogenannte fundamentale PDE der Finanzierungstheorie (auch: Black-Scholes-DE) für bedingte Titel, deren Werte von dem Wert des zugrundeliegenden Titels  $S$  und der Zeit abhängen. Schüttet der zugrundeliegende Titel kontinuierlich eine Rendite in Höhe von  $q$  aus, so lautet diese:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} - rf = 0. \quad (2.1)$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist einfacher zu lösen als eine partielle, eine DE ersten Grades einfacher als eine höheren Grades und eine parabolische PDE ist numerisch problemloser zu lösen, als eine hyperbolische oder elliptische.

Wie eingangs erwähnt, gibt es auch von einer stochastischen Komponente abhängige Differentialgleichungen. Für einen Aktienkurs, welcher einem Wiener Prozeß  $z$  mit einer proportionalen Volatilität  $\sigma$  und einer erwarteten Rendite von Null folgt, gilt:

$$dS(t) = \sigma S(t) dz.$$

Da ein Wiener Prozeß nirgendwo differenzierbar ist, existiert die Ableitung  $\partial S(t)/\partial z$  nicht, so daß diese DE nicht mit den üblichen Methoden gelöst werden kann. Vielmehr muß ein Verfahren der stochastischen Integration Anwendung finden. Das bekannteste ist die Itô-Integration. Auf diese Verfahren soll hier jedoch nicht eingegangen werden.

Zur Lösung einer Differentialgleichung müssen zudem Nebenbedingungen bekannt sein. Die Anzahl der Nebenbedingungen bestimmt sich aus der Anzahl der Variablen. Für  $n$  Variablen müssen wenigstens  $n! + 1$  Nebenbedingungen gegeben sein. Ist der Wert einer Funktion, welche von der Zeit  $t$  und einer weiteren Größe  $x$  abhängt, im Zeitpunkt 0 für alle Werte der unabhängigen Variablen  $x$  bekannt, so existiert eine sogenannte *Anfangsbedingung*. Ist hingegen der Wert im Planungshorizont  $T$  für alle Werte von  $x$  bekannt, so gibt es eine *Endbedingung*. Sind die Werte für das höchstmögliche und das geringstmögliche  $x$  für alle Zeitpunkte  $t$  gegeben, so existieren *feste Randbedingungen*. Ein *freies Randwertproblem* ist dadurch gekennzeichnet, daß die Nebenbedingung über die Zeit und Zustände variiert. Dies tritt beispielsweise bei der Bewertung einer amerikanischen Verkaufs-

option auf, wobei die freie Grenze den Wert der Option bei Ausübung während der Laufzeit angibt.

Im folgenden soll beispielhaft eine parabolische PDE der Form (2.1) numerisch gelöst werden.

### 3. Numerische Bewertungsverfahren

Zur Lösung analytisch nicht lösbarer PDE stehen eine Vielzahl numerischer Verfahren zur Verfügung. Neben der *Monte-Carlo-Methode* sind insbesondere die *Methode der finiten Elemente* und die *finiten Differenzenverfahren* zu nennen. Bei den letztgenannten Verfahren werden die partiellen Ableitungen durch finite Differenzen approximiert, und die resultierende Differenzengleichung wird gelöst. Die finiten Differenzenverfahren untergliedern sich in explizite, implizite und Misch- oder auch  $\theta$ -Verfahren. Um die Vorteilhaftigkeit der Verfahren überprüfen zu können, muß ein Kriterienkatalog aufgestellt werden. Erstens muß bei der Lösung der Differenzengleichung sichergestellt sein, daß sich die numerische Lösung der Differenzengleichung der tatsächlichen Lösung der Differentialgleichung annähert und die Rundungsfehler, die bei der Berechnung mit dem Computer entstehen, sich nicht potenzieren. Ist das diskretisierte Modell unempfindlich gegenüber kleinen Fehlern, so nennt man das System *stabil*. Zudem muß die Lösung der Differenzengleichung gegen die der Differentialgleichung streben. In diesem Fall spricht man von *Konvergenz*. Als weiteres Kriterium kann die Effizienz der Verfahren angesehen werden. Neben *Speicherplatzbedarf* ist insbesondere die *Rechenzeit* von Bedeutung.

Das *explizite* finite Differenzenverfahren erfordert den geringsten Speicher und die kürzeste Rechenzeit, kann jedoch für eine vorgegebene Anzahl an Rechenschritten instabil sein. Bei PDE mit variablen Koeffizienten ergibt sich in einigen Fällen unabhängig von der Zahl der Rechenschritte nie eine stabile Lösung. Das *implizite* Differenzenverfahren ist immer stabil und konvergent, benötigt aber wesentlich mehr Speicher. Das Crank-Nicolson-Verfahren, ein Mischverfahren aus explizitem und implizitem Differenzenverfahren, ist ebenso stabil und konvergent. Zusätzlich approximiert die Differenzengleichung die Differentialgleichung besser, so daß weniger Rechenschritte nötig sind, um zu einer annähernd exakten Lösung zu kommen. Im folgenden wird das Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung der PDE (2.1) dargestellt.

### 4. Das Crank-Nicolson-Verfahren

Grundlegend für finite Differenzenverfahren zur Lösung einer partiellen Differentialgleichung in zwei Variablen  $(S, t)$  ist der Aufbau eines zweidimensionalen Recht-

eckgitters mit den Schrittweiten  $\Delta S$  bzw.  $\Delta t$ . Diese Schrittweiten müssen nicht zwingend konstant sein. Da konstante Abstände die Berechnung jedoch erleichtern, wird im folgenden mit äquidistanten Variablen gearbeitet.

Zunächst werden der höchstmögliche und der geringstmögliche Wert von  $S$  und  $t$  ermittelt. Entspricht  $S$  dem Aktienkurs, so ist der geringstmögliche Wert Null und als höchstmöglicher Wert wird ein utopisch hoher Wert  $S^{OG}$  angesetzt. Der höchste Wert von  $t$  ist der Planungshorizont  $T$ . Nun werden  $M$  äquidistante Kurse zwischen dem höchsten und dem geringsten Kurs mit einem Abstand von  $\Delta S$  betrachtet. Ebenso wird der Betrachtungszeitraum  $T$  in  $N$  Zeitpunkte mit einem Abstand von  $\Delta t$  unterteilt.

$$\frac{S^{OG}}{\Delta S} = M, \quad \frac{T}{\Delta t} = N$$

Für die einzelnen äquidistanten Kurse und Zeitpunkte, die Knotenpunkte in dem Rechteckgitter bilden, folgt damit:

$$S_i = i\Delta S \quad t_j = j\Delta t$$

mit  $j \in \{0, \dots, N\}$ , und  $t_N = T$  als Planungshorizont und  $i \in \{0, \dots, M\}$ , wobei  $S_M = S^{OG}$  den maximalen Kurs angibt.

Als nächstes wird die Differentialgleichung in eine Differenzgleichung transformiert. Wenn  $f(S, t)$  die Lösung des gegebenen Differentialgleichungsproblems ist, so soll  $f_{i,j}$  die Lösung im Punkt  $(S_i, t_j)$  des approximierenden Differenzgleichungsproblems angeben. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Differentiale in Differenzen zu transformieren. Bei einer Vorwärtsdifferenzenapproximation über die Zeit (explizite Methode) wird die DE durch die Werte der nachfolgenden Zeitschicht approximiert und bei einer Rückwärtsdifferenzenapproximation über die Zeit (implizite Methode) durch die Werte der vorangehenden Zeitschicht. Bei einer Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenapproximation über die Zustände werden in die Approximation der DE die Werte des nächsthöheren Zustands bzw. nächstgeringeren Zustands einbezogen. Die Crank-Nicolson-Methode ist eine sogenannte zentrale Differenzenmethode, welche zwecks besserer Approximation den Durchschnitt einer Vorwärts- und einer Rückwärtsdifferenzenapproximation sowohl über die Zeit als auch über die Zustände bildet. Da ein gleichgewichtetes Mittel aus einer Vorwärts- und einer Rückwärtsdifferenz über die Zeit gebildet wird, spricht man auch vom  $\theta = 1/2$ -Verfahren.

Beim Crank-Nicolson-Verfahren werden die Ableitungen an der Stelle  $(S_i, t_{j+\frac{1}{2}})$  bestimmt. Für ein Problem mit gegebener Endbedingung wird das Differential nach der Zeit approximiert, indem die Differenz zwischen dem Wert im

nächsten Zeitpunkt und dem betrachteten Wert bezogen auf den Zeitabstand und die Differenz zwischen dem Wert im vorangehenden Zeitpunkt und dem aktuellen Wert bezogen auf die Zeitdifferenz gleichgewichtet werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j+\frac{1}{2}}}{1/2\Delta t}}_{\text{Vorwärtsdiff. in t}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{f_{i,j+\frac{1}{2}} - f_{i,j}}{1/2\Delta t}}_{\text{Rückwärtsdiff. in t}} \\
 &= \underbrace{\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t}}_{\text{zentrale Diff. in t}}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die erste Ableitung nach dem Kurs wird approximiert, indem die Ableitung in der nachfolgenden Zeitschicht und die Ableitung in der vorangehenden Zeitschicht gleichgewichtet werden. Die Ableitung in einer Zeitschicht wiederum wird gebildet, indem die Vorwärtsdifferenz über die Zustände und die Rückwärtsdifferenz über die Zustände gleichgewichtet und auf die Wertdifferenz bezogen werden. Es wird zweimal eine zentrale Differenz gebildet, einerseits über die Zeit und andererseits über die Zustände:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{2} \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1}}{\Delta S} + \frac{1}{2} \frac{f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1}}{\Delta S}}_{\text{Vorwärtsdiff. in t}} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{2} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta S} + \frac{1}{2} \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta S}}_{\text{Rückwärtsdiff. in t}} \right) \\
 &= \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{4\Delta S}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die zweite Ableitung wird analog zu den bisher betrachteten Ableitungen approximiert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \frac{1}{2} \frac{\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1}}{\Delta S}}{\Delta S} + \frac{1}{2} \frac{\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta S}}{\Delta S} \\
&= \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{2\Delta S^2}. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Bei der expliziten sowie der impliziten Methode werden ebenso zentrale Differenzen bezüglich der Zustände verwendet. Bei der expliziten Methode wird jedoch nur die nachfolgende Zeitschicht und bei der impliziten Methode nur die aktuelle Zeitschicht betrachtet. Das Differential nach der Zeit ergibt sich bei diesen Verfahren durch eine Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenapproximation. Setzt man die Approximationen (4.1), (4.2) und (4.3) in (2.1) ein, ersetzt  $f$  mit  $f_{i,j}$  und  $S$  mit  $i\Delta S$ , so kann die Differentialgleichung für  $0 < i < M$  und  $0 \leq t < T$  nach einigen Umformungen ersetzt werden durch die Differenzengleichung

$$a_{i,j}f_{i-1,j} + b_{i,j}f_{i,j} + c_{i,j}f_{i+1,j} = -a_{i,j}f_{i-1,j+1} + d_{i,j}f_{i,j+1} - c_{i,j}f_{i+1,j+1} \tag{4.4}$$

mit den bekannten Größen

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= -\frac{(r-q)i}{4} + \frac{\sigma^2 i^2}{4} \\
b_{i,j} &= -r - \frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma^2 i^2}{2} \\
c_{i,j} &= \frac{(r-q)i}{4} + \frac{\sigma^2 i^2}{4} \\
d_{i,j} &= -\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 i^2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.4) ist nicht definiert bei  $i = 0$  und bei  $i = M$  sowie  $j = N$ . In diesen Fällen gelten die Randbedingungen sowie die Endbedingung. Wenn die Endbedingung bekannt ist, sind für die Zeitschicht  $N - 1$  die rechten Seiten aller  $M - 1$  Gleichungen bekannt, da dort nur Werte der Zeitschicht  $N$  stehen, welche durch die Endbedingung vorgegeben sind. In der Zeitschicht  $N - 1$  gibt es daher  $M - 1$  Gleichungen mit  $M + 1$  Unbekannten  $f_{0,N-1}, f_{1,N-1}, \dots, f_{M,N-1}$ . Durch die Randbedingungen können zwei weitere Gleichungen ohne zusätzliche Unbekannte aufgestellt werden, so daß es möglich ist, die Gleichungen simultan zu lösen.

Entspricht der Wert der Funktion  $f$  im Zeitpunkt  $t_j$  bei einem Aktienkurs von Null einer Konstanten  $e_{0,j}$ , so gilt  $f_{0,j} = e_{0,j}$ . Hängt der Wert der Funktion  $f_{0,j}$  auch von dem Wert des nächsthöheren Aktienkurses ab, so folgt

$$b_{0,j}f_{0,j} + c_{0,j}f_{1,j} = e_{0,j}, \quad (4.6)$$

wobei die Parameter  $b_{0,j}$ ,  $c_{0,j}$  und  $e_{0,j}$  durch die vorgegebene Randbedingung implizit festgelegt werden. Ebenso kann die Randbedingung für den höchsten betrachteten Aktienkurs mit Hilfe der implizit zu determinierenden Koeffizienten  $a_{M,j}$ ,  $b_{M,j}$  und  $e_{M,j}$  folgendermaßen dargestellt werden:

$$a_{M,j}f_{M-1,j} + b_{M,j}f_{M,j} = e_{M,j}. \quad (4.7)$$

Wird als Randbedingung ein Wert  $f_{0,j}$  oder  $f_{M,j}$  vorgegeben, so handelt es sich um eine *Dirichlet*-Bedingung. Wird die Randbedingung aus einem Differential abgeleitet, so wird diese als *Von-Neumann*-Bedingung bezeichnet.

Durch Aufstellung der zusätzlichen aus den Randbedingungen abgeleiteten Gleichungen kann das System mit  $M + 1$  Gleichungen und  $M + 1$  Unbekannten für den Zeitpunkt  $N - 1$  gelöst werden. Sind die Werte in  $N - 1$  ermittelt, können die rechten Seiten für die Zeitschicht  $N - 2$  berechnet werden usw. Für jede Zeitschicht gibt es mithin ein Gleichungssystem (4.4). Dieses System kann mit der Matrix

$$A_j = \begin{pmatrix} b_{0,j} & c_{0,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,j} & b_{1,j} & c_{1,j} & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & a_{M-1,j} & b_{M-1,j} & c_{M-1,j} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{M,j} & b_{M,j} \end{pmatrix}$$

und dem Vektor  $e_j$ , dessen  $i$ -tes Element für  $i = 1$  bzw.  $i = M - 1$  entsprechend den Randbedingungen und für  $1 < i < M - 1$  wie folgt definiert ist

$$e_{i,j} = -a_{i,j}f_{i-1,j+1} + d_{i,j}f_{i,j+1} - c_{i,j}f_{i+1,j+1}, \quad (4.8)$$

sowie  $f_j$  als Spaltenvektor der Portfoliowerte folgendermaßen geschrieben werden:

$$A_j f_j = e_j. \quad (4.9)$$

$A_j$  ist eine tridiagonale Matrix. Ein tridiagonales Gleichungssystem kann z. B. unter Zuhilfenahme der Gaußschen Eliminationsmethode, bei der die Koeffizienten der Variablen schrittweise eliminiert werden, gelöst werden. Zu diesem Zweck stehen zahlreiche Algorithmen zur Verfügung.

Aus der vorgegebenen Endbedingung und den Randbedingungen wird folglich nach Berechnung der Koeffizienten  $a_{i,N-1}$ ,  $c_{i,N-1}$  und  $d_{i,N-1}$  aus (4.5) für alle  $i$  zunächst  $e_{N-1}$  ermittelt. Das tridiagonale Gleichungssystem wird daraufhin nach Bestimmung von  $b_{i,N-1}$  für die Zeitschicht  $N-1$  berechnet. Mit den resultierenden Werten wird  $e_{N-2}$  ermittelt und somit die Optionswerte in  $N-2$  usw., bis der Wert im Zeitpunkt 0 ermittelt worden ist.

Durch Anwendung des Satzes von Taylor kann nachgewiesen werden, daß bei der Diskretisierung ein Fehler von  $O(\Delta S^2)$  und  $O(\Delta t^2)$  auftritt. Das bedeutet, daß der Fehler sich genauso schnell verringert wie das Quadrat von  $\Delta S$  und  $\Delta t$ . Er konvergiert mit sinkender Höhe von Zeit- bzw. Zustandsabständen gegen Null, so daß das Verfahren stabil und konvergent ist.

Nachfolgend wird vorgeführt, wie ein Power Warrant mit diesem numerischen Verfahren bewertet werden kann.

## 5. Die Ermittlung des Wertes eines Power Warrants

Power Warrants sind relativ junge europäische Optionsscheine, die am deutschen Markt auf den DAX und auf US-Dollars gehandelt werden. Für den Wert dieser Optionsscheinform gibt es keine analytische Lösung, so daß auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muß.

Ist ein solcher Warrant im Geld, d. h. übersteigt der Kurs des zugrundeliegenden Titels am Ende der Laufzeit  $T$  den vorgegebenen Ausübungspreis  $X$ , so bekommt der Optionsinhaber die quadrierte Differenz zwischen dem Kurs des zugrundeliegenden Titels und dem Ausübungspreis. Der Power Warrant ist gleichzeitig „gekappt“, d. h. wenn die quadrierte Differenz den vorgegebenen Betrag  $H$  übersteigt, so erhält der Optionsinhaber nur  $H$ . Liegt der Kurs unter dem Ausübungspreis, so verfällt die Option. Die Zahlungscharakteristik einer solchen Option entspricht am Ende der Laufzeit

$$f_T = \min(\max(S_T - X, 0)^2, H). \quad (5.1)$$

Der Wert der Option hängt nur von den beiden Variablen Kurs und Laufzeit ( $T - t$ ) ab. Die DE (2.1) beschreibt daher den Wertverlauf. Wird ein Optionschein auf den dividendenbereinigten DAX betrachtet, so ist die kontinuierliche Dividendenrendite  $q$  Null. Bei einem Optionschein auf US-Dollars entspricht  $q$  dem US-amerikanischen Zins, da der Dollar diese Zinsen „erwirtschaftet“. Die Differentialgleichung (2.1) approximierende Differenzgleichung ist im vorangehenden Abschnitt (4.4) gegeben. Um den Warrant mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens bewerten zu können, müssen daher lediglich die Randbedingungen ermittelt werden.

Die Endbedingung kann aus (5.1) ersehen werden. Sie lautet für  $i \in \{0, \dots, M\}$

$$f_{i,T} = \min(\max(i\Delta S - X, 0)^2, H). \quad (5.2)$$

Fällt der Kurs einmal bis auf Null, so wird angenommen, daß er nie wieder steigt, sondern der Handel ausgesetzt wird. Der Wert des Derivats bei einem Kurs von Null kann daher im vorhinein für jeden zukünftigen Zeitpunkt bestimmt werden. Es gilt für alle  $j \in \{0, \dots, N\}$

$$f_{0,j} = 0$$

und somit

$$e_{0,j} = 0.$$

Um die Darstellung konsistent zu gestalten, kann diese (Dirichlet-)Randbedingung auch durch (4.6) mit  $c_{0,j} = 0$  und einem beliebigen positiven  $b_{0,j}$  beschrieben werden.

Befindet sich der Kurs an seiner (hypothetischen) Obergrenze, so ändert sich der Optionswert bei einer Änderung des Kurses um  $\Delta S$  nicht mehr, da der Optionsinhaber den Betrag  $H$  fast sicher erwirtschaftet und der Einfluß der Wahrscheinlichkeit, daß der Kurs unter die Schranke  $H$  sinkt, vernachlässigbar gering ist. Die erste und die zweite Ableitung nach dem Aktienkurs sind folglich Null, und aus (2.1) folgt bei Einsetzen der Differenzenapproximation für die Zeit:

$$\begin{aligned} \frac{f_{M,j+1} - f_{M,j}}{\Delta t} &= r f_{M,j} \\ f_{M,j} &= \frac{1}{1 + r\Delta t} f_{M,j+1}. \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Von-Neumann-Bedingung mit

$$e_{M,j} = \frac{1}{1 + r\Delta t} f_{M,j+1}, \quad a_{M,j} = 0 \quad \text{und} \quad b_{M,j} = 1.$$

Nach Ermittlung der für den Power Warrant spezifischen Koeffizienten  $b_{0,j}$ ,  $c_{0,j}$ ,  $e_{0,j}$ ,  $a_{M,j}$ ,  $b_{M,j}$  und  $e_{M,j}$  kann nun das Gleichungssystem (4.9) rekursiv für jede Zeitschicht gelöst werden.

Im Anhang findet sich ein Computerprogramm für die numerische Bewertung von Power Warrants auf US-Dollars. Dieses ist in Turbo Pascal geschrieben und verwendet einen Algorithmus zur Lösung des tridiagonalen Gleichungssystems.

Bei dem untersuchten Power Warrant erhält der Optionsinhaber das 100fache der Differenz von Dollarkurs und Basispreis, sofern dieser Betrag den Cap nicht übersteigt. Im April 96 wurde bei einem Dollarkurs von 1,516 ein Power Warrant mit einer Laufzeit von 0,9 Jahren, einem Basispreis in Höhe von 1,45 DM und einem Cap von 25 DM für 12,02 DM gehandelt. Wird der risikolose Zins für diese Laufzeit mit 0,0325 für Deutschland und mit 0,05456 für die USA angesetzt, so ergibt das verwendete Verfahren einen Wert in Höhe von 11,7142 DM. Ein Power Warrant mit einem Basispreis von 1,50 DM und ansonsten identischen Konditionen wurde hingegen zu 8,95 DM gehandelt, während die numerische Bewertung einen Wert von 9,1058 DM liefert. Zum Vergleich werden nun die Optionspreise bei einem Basispreis von 1,50 DM für ausgewählte Aktienkurse aufgelistet.

Kurs in DM	Power Warrant in DM
1,20	0,5798
1,45	8,2544
1,50	10,8668
1,516	11,7142
1,60	15,9368

## Literaturverzeichnis

*Ames*, William F., Numerical Methods for Partial Differential Equations, 3. Auflage, London 1977.

*Hull*, John C., Options, Futures and Other Derivative Securities, 2. Auflage, Englewood Cliffs, N.J. 1993.

*Press*, William H., Brian P. *Flannery*, Saul, A. *Teukolsky*, and William T. *Vetterling*, Numerical Recipes in Pascal, Cambridge 1989.

*Wilmott*, Paul, Jeff *Dewynne* und Sam *Howison*, Option Pricing, Mathematical Models and Computation, Oxford 1994.

# Anhang

## Pascal-Programm zur Bewertung von Power Warrants

```
PROGRAM power_warrant;

(*****
-----
N = Anzahl der Zeitpunkte, M = Anzahl der Zustandspunkte,
SOG = Obergrenze für den Kurs, zinsdt = jährlicher Zins (r) in Deutschland,
zinsusa = jährl. Zins in USA (entspricht q), X = Basispreis,
Laufzeit = Optionsrestlaufzeit (in Jahren), H = Maximalbetrag,
deltat = Größe der Zeitschritte           : EXTENDED
deltaS = Größe der Zustandsschritte       : EXTENDED
options_preise = Vektor der Optionspreise  : Array[0..M] OF EXTENDED
kurs = Vektor der Kurse                   : Array[0..M] OF EXTENDED
-----
*****
(**** Hauptprogramm: Deklaration der Konstanten, Variablen und Prozeduren ****)

($N+)           (*ermöglicht Gleitkommaberechnung mit 8087 Koprozessor
und bietet weitere Real-Typen*)
($S+)           (*Es wird vor jedem Prozeduraufruf überprüft, ob noch genug
Stack zur Speicherung vorhanden ist*)

CONST M=4000;
      N=4000;
      SOG=4.0;
      zinsdt=0.0325;
      zinsusa= 0.05456;
      Laufzeit=0.9;
      X=1.45;
      H=25;
      sigma=0.127;

TYPE vektor = array[0..M] of extended;
      zeiger = ^vektor;

VAR deltat,deltaS: extended;
      kurs:zeiger;
      options_preise:zeiger;
      warrant:text;
      ch:char;
      z,y: longint;

(*-----*)
(**** Algorithmus zur Lösung des tridiagonalen Systems, entn aus:
Press, Flannery, Teukolski. Numerical Recipes in Pascal. N.J. 1989 ****)

PROCEDURE tridag(al,bl,cl,el: zeiger; VAR u: zeiger; n: longint);
VAR j: longint;
      bet: extended;
      gam: zeiger;
BEGIN
new(gam);
IF (bl^0 = 0) THEN BEGIN writeln('pause 1'); readln END;
bet := bl^0;
u^0 := el^0/bet;
FOR j := 1 to n DO BEGIN
      gam^j := cl^j-1/bet;
      bet := bl^j-al^j*gam^j;
      IF (bet = 0) THEN BEGIN writeln('pause 2');readln END;
      u^j := (el^j-al^j*u^j-1)/bet;
      END;
FOR j := n-1 DOWNTO 0 DO BEGIN
      u^j := u^j-gam^j+1*u^j+1;
      END;
dispose(gam)
END;

(*-----*)
```

```

PROCEDURE Berechnung(VAR options_preise,kurs:zeiger);
VAR i,j: longint;
    a,b,c,e: zeiger;

BEGIN
new(a);new(b);new(c);new(e);          (*Bereitstellung des Speicherplatzes*)

(**** Berechnung der Kurse ****)

FOR i:=0 TO M DO kurs^[i]:=i*deltaS;

(**** Berechnung des Endwertes der Option ****)

FOR i:=0 TO M DO BEGIN
    IF kurs^[i]>=X THEN BEGIN
        IF sqrt((kurs^[i]-X)*100)>=H THEN options_preise^[i]:=H
        ELSE options_preise^[i]:=sqrt((kurs^[i]-X)*100);
    END
    ELSE options_preise^[i]:= 0.0;
END;

(**** Hauptdurchlauf zur Bewertung-bis zur Anfangsperiode ****)

j:= N;
WHILE j>=0 DO BEGIN

    (**** Bestimmung der Koeffizienten ****)

    i:=1;
    WHILE i < M DO BEGIN
        a^[i]:= -(zinsdt-zinsusa)*i/4+sqrt(sigma*i)/4;
        b^[i]:= -zinsdt-(1/deltat)-sqrt(sigma*i)/2;
        c^[i]:= ((zinsdt-zinsusa)*i)/4+sqrt(sigma*i)/4;
        e^[i]:= -a^[i]*options_preise^[i-1] +
            (-1/deltat)+ sqrt(sigma*i)/2)*options_preise^[i]
            - c^[i]*options_preise^[i+1];
        i:=i+1;
    END;

    (**** Randbedingungen ****)

    b^[0]:= 1;          (*Der Wert 1 ist ein willkürlicher positiver Wert*)
    c^[0]:= 0;
    e^[0]:= 0;
    a^[M]:= 0;
    b^[M]:= 1;
    e^[M]:= 1/(1+zinsdt*deltat)*options_preise^[M];

    (**** Lösung des tridiagonalen Systems ****)

    tridag(a,b,c,e,options_preise,M);
    j:=j-1;
END;

dispose(a);dispose(b);dispose(c);dispose(e);(*Freigabe des Speicherplatzes*)
END; (*Ende der Prozedur*)

(*****
*****
*****

(**** Hauptprogramm ****)

BEGIN
deltat:= Laufzeit/N;
deltaS:= SOG/M;
new(options_preise);new(kurs);          (*Bereitstellung des Speicherplatzes*)
Berechnung(options_preise,kurs);        (*Aufruf der Prozedur Berechnung, welche die
Kurse mit zugehörigen Optionspreisen liefert*)
assign(warrant,'warrant.txt');          (*Ordnet der Dateivariablen warrant eine Textdatei zu*)
rewrite(warrant);                        (*Die Datei warrant wird angelegt und geöffnet*)

(**** Schreiben der Werte in die Datei warrant.txt ****)

Writeln(warrant,'Kurse', ' ', 'Optionspreise');
FOR z:=1000 TO 2500 DO writeln(warrant,kurs^[z]:4:4, ' ',options_preise^[z]:4:4);
close(warrant);
dispose(options_preise);dispose(kurs);
END.

```