ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Herrchen, Beate

Working Paper

Bevölkerungsmodelle: Konzepte, Anwendungen, Erweiterungsmöglichkeiten

Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 84

Provided in Cooperation with:
Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Herrchen, Beate (1989) : Bevölkerungsmodelle: Konzepte, Anwendungen, Erweiterungsmöglichkeiten, Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 84, Universität Konstanz, Sonderforschungsbereich 178 - Internationalisierung der Wirtschaft, Konstanz

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/101765

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Sonderforschungsbereich 178
„Internationalisierung der Wirtschaft"

Diskussionsbeiträge

Juristische
Fakultät

Fakultät für Wirtschafts-
wissenschaften und Statistik

Beate Herrchen

Bevölkerungsmodelle

Konzepte, Anwendungen,
Erweiterungsmöglichkeiten

Postfach 5560
D-7750 Konstanz

Serie II — Nr. 84
Juli 1989

18. SEP. 1989 Weltwirtschaft

014 048 833

BEVÖLKERUNGSMODELLE

Konzepte, Anwendungen, Erweiterungsmöglichkeiten

Beate Herrchen

Serie II - Nr. 84

Inhalt

1 Bevölkerungsmodelle **1**

1.1 Einleitung 1

1.2 Kohorten-Überlebensmodell (Modell I) 3

1.2.1 Modellformulierung 3

1.2.2 Definition und Messung der im Modell verwendeten Raten 4

1.2.3 Beispiel 6

1.2.4 Weitere Anmerkungen zum Modell I 9

1.3 Kohorten-Überlebensmodell: offenes System und einzelne Region (Modell II) 11

1.3.1 Modellformulierung 11

1.3.2 Definition und Messung der im Modell verwendeten Raten 12

1.3.3 Beispiel (Fortsetzung) 13

1.3 Multiregionales Kohorten- Überlebensmodell(Modell III) 17

1.3.1 Modellformulierung 17

1.3.2 Definition und Messung der im Modell verwendeten Raten 20

1.3.3 Beispiel (Fortsetzung) 20

1.3.4 Weitere Anmerkungen zu Modell III 28

2 Einführung zum Zählmodell **29**

2.1 Einleitung 29

2.2 Die Übergangsratenform des Kontomodells 34

Zusammenfassung:

Das vorliegende Arbeitspapier stellt im ersten Teil verschiedene unter der Bezeichnung 'Rogersmodelle' in die Fachliteratur eingegangene Bevölkerungsmodelle vor. Diese Modelle berücksichtigen alle explizit die Migrationskomponente und ermöglichen daher Untersuchungen über das Verhalten der Bevölkerungsstruktur unter unterschiedlichen migrationsspezifischen Annahmen. Gleichzeitig wird jedoch auch auf die Grenzen dieser Modelle hingewiesen.
Der zweite Teil schlägt ein sogenanntes 'Kontomodell' (*accounting model*) als Alternative zu den Modellen des ersten Teils vor. Aus diesem Modell läßt sich nicht nur das letzte der vorgestellten Rogersmodelle in seiner allgemeinsten Form gewinnen, sondern es vermittelt auch zusätzliche Informationen, die dem Analysten weiteren Aufschluß über die Bevölkerungsstruktur der beteiligten Länder geben können.
Ein Ziel des Projektes der "Analyse von Gastarbeiterwanderungen in Europa" besteht darin, dieses Modell für den europäischen Raum anzuwenden.
Grundlegende Literatur zu den Themen dieses Berichts findet sich insbesondere unter den Veröffentlichungen [1],[2],[3],[4],[5],[6] von P.H. Rees und A.G. Wilson.

1 Bevölkerungsmodelle

1.1 Einleitung

Basis aller Bevölkerungsmodelle ist die Annahme, daß die neue Bevölkerung am Ende einer Beobachtungsperiode der Länge T eine Funktion der alten Bevölkerung zum Zeitpunkt t, der Anzahl der Geburten- bzw. Sterbefälle und des Migrationsvolumens ist, d.h.

$$\begin{aligned} \textit{neue Bevölkerung} &= f(\textit{alte Bevölkerung}, \textit{Geburtenfälle}, \textit{Sterbefälle}, \\ &\qquad \textit{Migrationsfälle}) \\ \text{bzw.} & \\ \textit{neue Bevölkerung} &= F(\textit{alte Bevölkerung}, \textit{Geburtenrate}, \textit{Sterberate},) \\ &\qquad \textit{Migrationsrate}) \end{aligned} \tag{1}$$

für passende Funktionen f bzw. F.
Für diskrete Zeitperioden könnte das Modell in seiner einfachsten Form so aussehen:

$$w(t+T) = w(t) + B(t,t+T) - D(t,t+T) + M^I(t,t+T) - M^E(t,t+T) \tag{2}$$

mit
$w(t)$ *Bevölkerung zum Zeitpunkt* t
$B(t,t+T)$ *Geburtenfälle im Zeitintervall* $[t,t+T)$
$D(t,t+T)$ *Sterbefälle im Zeitintervall* $[t,t+T)$
$M^I(t,t+T)$ *Immigrationsfälle im Zeitintervall* $[t,t+T)$
$M^E(t,t+T)$ *Emigrationsfälle im Zeitintervall* $[t,t+T)$.

Gleichungen diesen Typs werden mit dem Schlagwort *component of growth relations* zusammengefaßt. Die Namensgebung erscheint plausibel, da die Komponenten des Bevölkerungswachstums, also die Fertilität, Mortalität und Migration unabhängig voneinander in dieser Gleichung kombiniert werden. Natürlich kann die obige Funktion in dieser Form noch nicht als Bevölkerungsmodell dienen. Dies ermöglicht folgende abgeänderte Beziehung, in der statt der absoluten Größen Raten erscheinen:

$$w(t+T) = w(t)(1 + b(t,t+T) - d(t,t+T) + m^I(t,t+T) - m^E(t,t+T)) \tag{3}$$

mit
$w(t)$ *Bevölkerung zum Zeitpunkt* t
$b(t,t+T)$ *Geburtenrate im Zeitintervall* $[t,t+T)$
$d(t,t+T)$ *Sterberate im Zeitintervall* $[t,t+T)$
$m^I(t,t+T)$ *Immigrationsrate im Zeitintervall* $[t,t+T)$
$m^E(t,t+T)$ *Emigrationsrate im Zeitintervall* $[t,t+T)$.

Werden beispielsweise mit Hilfe von Sterbetafelmethoden, Zeitreihenmethoden, Trendprojektionen oder auf andere Weise die verschiedenen Raten geeignet geschätzt, so könnte Relation (3) Grundlage einer Bevölkerungsprojektion sein.

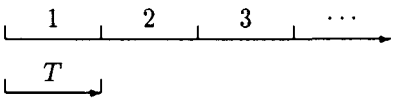
Es ist wichtig, in diesem Zusammenhang auf den Unterschied zwischen den Begriffen Prognose und Projektion hinzuweisen. Eine Projektion erhebt im Gegensatz zur Prognose keinen Realitätsanspruch, d.h. es wird ein System unter möglicherweise wirklichkeitsfernen Annahmen untersucht; dieser Ansatz wird zur Prognose, falls die verwendeten Annahmen in den Augen des Analysten für die Realität gerechtfertigt erscheinen. Aus dieser Differenzierung folgt, daß eine Projektion nie falsch sein kann. Die hier vorgestellten Verfahren dienen einerseits einer möglichst korrekten deskriptiven Darstellung der demographischen Verhältnisse in einer Population, andererseits eignen sie sich besonders zu Projektionszwecken (z.B. Politiksimulation).
Die bisherigen Modellgleichungen (2) und (3) beziehen sich auf aggregierte Populationen. Es ist jedoch klar, daß demographische Raten sich sowohl in Abhängigkeit vom Alter als auch in Abhängigkeit vom Geschlecht als auch in Abhängigkeit von der räumlichen Zugehörigkeit ändern. Dies soll in den folgenden Modellen sukzessive berücksichtigt werden. In der Literatur wird in Zusammenhang mit ihnen stets auf Andrei Rogers als 'Vater der multiregionalen Demographie' verwiesen [9],[10],[13],[14],[15].
Drei Modellkonstellationen sollen diskutiert werden:

I. Kohorten-Komponenten- oder Kohorten-Überlebens–Modell im abgeschlossenen System
(*closed-system cohort survival model*)

II. Kohorten-Komponenten- oder Kohorten-Überlebens–Modell im offenen System mit einer einzelnen Region
(*open-system single-region cohort survival model*)

III. Multiregionales Kohorten-Komponenten- oder Kohorten-Überlebens-Modell
(*multiregion cohort survival model*)

Allen Kohortenmodellen ist gemeinsam, daß Raten auf spezifische Altersgruppen, m.a.W. auf eine Kohorte als eine Gruppe in einer bestimmten Zeitperiode Geborener, angewendet werden. Im Vorstadium der Modellbildung ist stets zu überlegen, wie die Altersgruppen r, $r = 1, \ldots, R$ und die Projektions- bzw. Beobachtungsperiode T zu wählen ist. Hier sei für alle Modelle die Länge aller Altersgruppen gleich und entspreche der Länge der Zeitperiode T, d.h.



$r = 1, \ldots, R-1$ Altersgruppen

Projektionsperiode

kurz:$\Delta_r = T, r = 1, \ldots, R-1, \Delta_R = \infty$

Eine unmittelbare Konsequenz aus dieser Konstellation ist, daß Personen, die eine Beobachtungsperiode überleben, stets in das darauffolgende Altersintervall überleben.

1.2 Kohorten-Überlebensmodell (Modell I)

1.2.1 Modellformulierung

- Modellannahmen

  (I.1) gegenüber Wanderungen abgeschlossenes System

  (I.2) $\Delta_r = T,\ r = 1, \ldots, R-1,\ \Delta_R = \infty$

- Bezeichnungen

  $w_r(t)$ Bevölkerung zum Zeitpunkt t in Altersgruppe r, $r = 1, \ldots, R$

  $b_{10}(r)$ altersspezifische Geburtenrate, d.h. Anzahl der überlebenden Geburten an Müttern, die sich zum Zeitpunkt t in der Altersgruppe r, $r = \lambda, \ldots, \mu$, befinden im Verhältnis zur Gesamtanzahl von Frauen der betreffenden Altersgruppe, wobei die Altersklassen λ und μ die Fertilitätsperiode der Frauen begrenzen. (Der Index $_{10}$ soll zusätzlich darauf hinweisen, daß nur die Kinder gezählt werden, die innerhalb der Beobachtungsperiode geboren werden und bis zum Ende der Beobachtungsperiode überleben.)

  d_{*r-1} altersspezifische Sterberate, d.h. Anzahl der Sterbefälle, die innerhalb der Beobachtungsperiode an Personen geschehen, die zum Zeitpunkt t in Altersgruppe $r-1$, $r = 1, \ldots, R$ sind, im Verhältnis zu der Gesamtanzahl von Personen, die bis zur Altersgruppe $r-1$ überlebt haben. (Das $*$ soll hier darauf hinweisen, daß der Tod sowohl in Altersgruppe $r-1$ als auch in Altersgruppe r erfolgen kann.)

  s_{rr-1} alterspezifische Überlebensrate, d.h. Anzahl der Personen einer Alterskohorte, die das Altersintervall $r-1$ zum Zeitpunkt t erreicht haben und in das Altersintervall r, $r = 2, \ldots, R$, zum Zeitpunkt $t+T$ überleben, im Verhältnis zur Gesamtanzahl von Personen, die bis zur Altersgruppe $r-1$ überlebt haben.
  Offensichtlich gilt: $s_{rr-1} = 1 - d_{*r-1}$

- Modellgleichungen

$$
\begin{aligned}
w_1(t+T) &= \sum_{r=\lambda}^{\mu} b_{10}(r) w_r(t) \\
w_2(t+T) &= (1-d_{*1}) w_1(t) = s_{21} w_1(t) \\
w_3(t+T) &= (1-d_{*1}) w_2(t) = s_{32} w_2(t) \\
&\vdots \\
w_R(t+T) &= (1-d_{*R-1}) w_{R-1}(t) + (1-d_{RR}) w_R(t) = s_{RR-1} w_{R-1}(t) + s_{RR} w_R(t)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Leslie stellte dieses Modell 1945 erstmals in Matrixform vor [7],[8]:

$$\mathbf{w}(t+T) = \mathbf{G}\mathbf{w}(t) \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} w_1(t+T) \\ w_2(t+T) \\ w_3(t+T) \\ \vdots \\ w_R(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_{10}(\lambda) & \cdots & b_{10}(\mu) & \cdots & 0 & 0 \\ s_{21} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_{32} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & s_{RR-1} & s_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ \vdots \\ w_R(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

- Anmerkungen
  - Da die letzte Altersklasse als nach oben offen angesehen wird, ist s_{RR} gerade die Überlebensrate der bereits zu Beginn der Beobachtungsperiode R-jährigen Personen innerhalb des Altersintervalls.
  - Die Matrix **G** wird auch als Wachstumsmatrix bezeichnet. Eigentlich ist diese Matrix zeitabhängig, so daß die korrekte Notation $\mathbf{G}(t, t+T)$ lauten müßte. Dies soll hier jedoch der Übersichtlichkeit halber entfallen.
  - Bezüglich der Notation mag es zunächst befremdlich erscheinen, daß der Prozeß des Alterns mit den Indizes von rechts nach links dargestellt ist; diese Notation hat jedoch den Vorteil, daß die Position der Überlebensraten in der Matrix mit deren Indizes übereinstimmt.

1.2.2 Definition und Messung der im Modell verwendeten Raten

Bisher wurde die nähere Betrachtung eines wichtigen Modellbestandteils ausgeklammert, nämlich die Definition und Messung der verschiedenen Raten.
Insbesonders hinsichtlich der Messung bzw. Schätzung einer Rate wird sich das gewählte Verfahren in Abhängigkeit von der Art der Analyse, d.h. historische Analyse oder Prognose, und vor allem in Abhängigkeit des verfügbaren Datenmaterials ergeben.
Zuerst soll auf die Überlebensrate $s_{rr-1}(t, t+T)$, also die Überlebensrate in einem abgeschlossenen System eingegangen werden; und zwar wurde bereits erwähnt, daß folgende Beziehung offensichtlich gilt:

$$s_{rr-1}(t, t+T) = 1 - d_{*r-1}(t, t+T) \tag{7}$$

Sie ergibt sich gerade als das Komplement der Sterberate der zu Beginn der Beobachtungsperiode lebenden $(r-1)$-jährigen Personen; letztere läßt sich mittels des Quotienten aus der absoluten Anzahl der Sterbefälle der zu Beginn der Beobachtungsperiode lebenden $(r-1)$-jährigen Personen, die innerhalb des

Beobachtungszeitraums entweder in der Altersgruppe $r-1$ oder der darauffolgenden Altersgruppe r sterben, i.e. $D_{*r-1}(t,t+T)$ und der Bevölkerung der Altersgruppe $r-1$ zu Beginn des Beobachtungszeitraums, der Population, die dem Risiko eines Todes ausgesetzt ist:

$$d_{*r-1}(t,t+T) = \frac{D_{*r-1}(t,t+T)}{w_{r-1}(t)}, \quad r=2,\ldots,R \tag{8}$$

$$d_{*R}(t,t+T) = \frac{D_{*R}(t,t+T)}{w_{r-1}(t)} \tag{9}$$

An dieser Stelle zeigt sich bereits eine Schwierigkeit, die mit unterschiedlichen Erhebungstechniken einhergeht. In der BRD beispielsweise werden die Sterbefälle sowohl nach Altersjahr zum Zeitpunkt des Todes als auch nach Geburtsjahr von der amtlichen Statistik bekanntgegeben, d.h. es stehen sogar die stärker disaggregierten Größen $D_{rr-1}(t,t+T)$ und $D_{rr}(t,t+T)$ zur Verfügung, aus denen der gewünschte Wert mittels

$$D_{*r-1}(t,t+T) = D_{r-1r-1}(t,t+T) + D_{rr-1}(t,t+T) \tag{10}$$

berechnet werden kann. Dagegen berichtet die amtliche Statistik Englands lediglich das Altersjahr zum Zeitpunkt des Todes, d.h. als Dateninput sind nur die Größen $D_{r*}(t,t+T)$ vorhanden. Hier müssen folglich adäquate Schätzprozeduren ersonnen werden.
Die Geburtenrate $b_{10}(r)(t,t+T)$ gibt die Anzahl der in der Beobachtungsperiode an Frauen der Altersgruppe r zu Beginn der Beobachtungsperiode geborenen und bis zum Ende der Beobachtungsperiode überlebenden Kinder im Verhältnis zu der Risikopopulation für Geburten, also der Gesamtanzahl an Frauen der Altersgruppe r zu Beginn der Beobachtungsperiode. Daher ergibt sie sich als Produkt aus der Fertilitätsrate der Frauen der Altersgruppe r zum Zeitpunkt t, $f_{*0}(*,r)(t,t+T)$ und der Überlebensrate der 0 bis 1-jährigen Kinder, $s_{10}(t,t+T)$:

$$b_{10}(r)(t,t+T) = f_{*0}(*,r)(t,t+T)s_{10}(t,t+T), \quad r=\lambda,\ldots,\mu \tag{11}$$

Genauer gesagt ist die Fertilitätsrate $f_{*0}(s,r)(t,t+T)$ die Geburtenrate, die sich bei Zugrundelegung aller Geburten der Beobachtungsperiode ergibt. Der zweite Index r bezieht sich auf die Altersgruppe der Mutter zum Zeitpunkt t, der erste Index s auf die Altersgruppe der Mutter zum Zeitpunkt der Geburt. Das $*$ in der Fertilitätsrate weist darauf hin, daß sowohl überlebende als auch vor Ende der Beobachtungsperiode sterbende Kinder bei der Berechnung berücksichtigt werden.
Das Datenmaterial, daß zur Berechnung von $f_{*0}(*,r)(t,t+T)$ benötigt wird, ist der Wert $B_{*0}(*,r)(t,t+T)$, die Anzahl der Geburten nach dem Alter der Mutter zum Zeitpunkt t. Dagegen besteht das verfügbare Datenmaterial meist entweder aus $B_{*0}(s,*)(t,t+T)$, also der Anzahl der Geburten, nach dem Alter der Mutter zum Zeitpunkt der Geburt (z.B. in England) oder aus $B_{*0}(u,*,*)(t,t+T)$,

der Anzahl der Geburten nach dem potentiellen (!) Alter der Mutter am Ende der Beobachtungsperiode (z.B. in der BRD). In diesem Falle läßt sich aufgrund der Annahme der Gleichheit der Länge von Altersintervallen und der Beobachtungsperiode wegen $B_{*0}(r,*,*)(t,t+T) = B_{*0}(*,*,r-1)(t,t+T)$ schnell die Zielgröße herleiten; entspricht die Datensituation der ersten Konstellation, so müssen - falls nicht kreuzklassifizierte Daten sowohl nach Altersjahr der Mutter zum Zeitpunkt der Geburt und nach Geburtsjahr der Mutter vorliegen - angemessene Schätzer den gewünschten Wert ersetzen.
Zusammenfassend ergibt sich für die Fertilitätsrate,

$$f_{*0}(*,r) = \frac{B_{*0}(*,r)(t,t+T)}{w_r(t)}, \quad r = \lambda,\ldots,\mu, \tag{12}$$

für die Sterberate im ersten Altersintervall,

$$d_{*0}(t,t+T) = \frac{D_{*0}(t,t+T)}{B_{*0}(*,*)(t,t+T)}, \tag{13}$$

und für die Überlebensrate,

$$s_{10}(t,t+T) = 1 - d_{*0}(t,t+T). \tag{14}$$

Schließlich folgt nun für die Geburtenrate:

$$b_{10}(r)(t,t+T) = \left(\frac{B_{*0}(*,r)(t,t+T)}{w_r(t)}\right)\left(1 - \frac{D_{*0}(t,t+T)}{B_{*0}(*,*)(t,t+T)}\right), \quad r = \lambda,\ldots,\mu \tag{15}$$

Dieser Schätzer könnte durch zusätzliche Informationen über $D_{*0}(*,r)(t,t+T)$, also die Anzahl der gestorbenen Kinder nach dem Alter der Mutter zum Zeitpunkt t, weiter verbessert werden.

1.2.3 Beispiel

Mit Hilfe eines Beispiels sollen nun die bisherigen Ergebnisse nachvollzogen werden und darüberhinaus einige Probleme diskutiert werden, die in der Realität mit der Aufbereitung des Datenmaterials einhergehen.
Der Dateninput für das hier dargestellte Modell ist dem Buch von Rees/Wilson (1977) entnommen.
Es soll die Struktur der männlichen Bevölkerung in der Region West Riding in Yorkshire (England) unter der Annahme der Abgeschlossenheit untersucht werden. Die Daten für die Region West Riding beziehen sich auf die Zensusperiode von 1961 bis 1966, genauer von Mitternacht zwischen dem 23. und 24. April 1961 bis Mitternacht zwischen dem 24. und 25. April 1966. Zur Schätzung der Raten des Modells ist Kenntnis der (männlichen) Anfangsbevölkerung zum Zeitpunkt 1961 nach fünfjährigen Altersklassen, der Anzahl der (männlichen) Geburtenfälle nach fünfjährigen Altersklassen der Frauen im fertilen Alter und

Tabelle 1: Die männliche Bevölkerung am 23/24.4.1961, die Anzahl der männlichen Geburten und der männlichen Sterbefälle im Zeitraum vom 23/24.4.1961 bis 24/25.4.1966 für die Region West Riding in Yorkshire (England)

Alters-	Bevölkerung		Sterbefälle	
intervall	am 23/24.4.1961	Geburtenfälle	in r	in $r+1$
[0,5)	147367		757	188
[5,10)	133805		151	140
[10,15)	153179	6290	159	356
[15,20)	127538	35487	349	346
[20,25)	108875	52181	285	291
[25,30)	111063	37433	284	336
[30,35)	116411	20203	385	541
[35,40)	130525	8044	659	1020
[40,45)	119526	1425	1113	1495
[45,50)	127012	48	1905	2916
[50,55)	126319		3385	4863
[55,60)	114984		5644	7387
[60,65)	91196		7642	8551
[65,70)	65394		8058	8864
[70,75)	45976		8564	7752
[75,80)	28859		7258	6216
[80,85)	14362		5266	3567
[85,90)	489		2505	1090
[90,95)	813		533	146
≥ 95	90		74	

der Anzahl der (männlichen) Sterbefälle nach fünfjährigen Altersklassen jeweils für die Beobachtungsperiode notwendig. Diese Informationen listet Tabelle 1 auf [1].

Nach Berechnung der verschiedenen Raten ergibt sich die Bevölkerung am Ende der Beobachtungsperiode aus der Wachstumsmatrix $\mathbf{G}$ und dem Bevölkerungsvektor $\mathbf{w(t)}$:

[1] Aus den in Rees/Wilson abgedruckten Daten geht nicht die Altersverteilung der weiblichen Bevölkerung hervor, so daß die Geburtenziffern unter der Annahme berechnet werden mußten, daß die weibliche Bevölkerung der fertilen Altersklassen etwa der entsprechenden männlichen Besetzungszahl entspricht.

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} 147367 \\ 133805 \\ 153179 \\ 127538 \\ 108875 \\ 111063 \\ 116411 \\ 130525 \\ 119526 \\ 127012 \\ 126319 \\ 114984 \\ 91196 \\ 65394 \\ 45976 \\ 28859 \\ 14362 \\ 4892 \\ 813 \\ 90 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}(t+T) = \begin{bmatrix} 161111 \\ 137105 \\ 125070 \\ 142890 \\ 113770 \\ 94642 \\ 96527 \\ 107504 \\ 119878 \\ 112849 \\ 117831 \\ 113683 \\ 99423 \\ 72443 \\ 46550 \\ 28205 \\ 14375 \\ 4940 \\ 1034 \\ 97 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$\mathbf{G} =$

$$\begin{bmatrix} & .04 & .27 & .48 & .33 & .17 & .06 & .01 & .00 & & & & & & & & & & \\ .93 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & .93 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & .93 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & .89 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & .87 & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & .87 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & .92 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & .92 & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & .94 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & .93 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & .90 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & .86 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & .79 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & .71 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & .61 & & & & \\ & & & \bigcirc & & & & & & & & & & & & .50 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & .34 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & .21 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & .10 \quad .13 \end{bmatrix} \tag{17}$$

1.2.4 Weitere Anmerkungen zum Modell I

Die meisten demographischen Modelle lassen sich in der Form (6) schreiben. An dieser Stelle soll schon darauf hingewiesen werden, daß das im zweiten Teil vorgestellte Zählmodell und die Wachstumsmatrix **G** in engem Zusammenhang stehen.

Die Matrix **G** spielt darüberhinaus für eine weitere demographische Analyse eine grundlegende Rolle. So führen beispielsweise Konsolidierungsprozeduren leicht zu einem höheren Aggregationsniveau. Der einzige reelle Eigenwert von **G**, der schon unter milden Bedingungen existiert, stellt gerade die stabile Bevölkerungswachstumsrate dar; die Potenzen der Matrix **G** gehen asymptotisch gegen das stabile Äquivalent, die Altersverteilung, die sich in der untersuchten Bevölkerung unabhängig von der Anfangsaltersverteilung einstellt, falls die in der Matrix **G** dargestellten Fertilitäts- und Mortalitätsverhältnisse für die Zukunft angenommen werden.

Die Formulierung (6) des Modells ist noch insofern als eingeschränktes Modell zu betrachten, als sie nur den eingeschlechtlichen Fall, insbesondere eine weibliche Population behandelt. Es ist jedoch keine Schwierigkeit, eine geeignete Verallgemeinerung zum zweigeschlechtlichen Modell zu finden. Der Hochindex soll in den Darstellungen (18) und (19) für das Geschlecht stehen.

$$\mathbf{w(t)} = \begin{bmatrix} w_1^M(t) \\ w_2^M(t) \\ w_3^M(t) \\ \vdots \\ w_r^M(t) \\ \vdots \\ w_R^M(t) \\ \hline w_1^F(t) \\ w_2^F(t) \\ w_3^F(t) \\ \vdots \\ w_r^F(t) \\ \vdots \\ w_R^F(t) \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{w(t+T)} = \begin{bmatrix} w_1^M(t+T) \\ w_2^M(t+T) \\ w_3^M(t+T) \\ \vdots \\ w_r^M(t+T) \\ \vdots \\ w_R^M(t+T) \\ \hline w_1^F(t+T) \\ w_2^F(t+T) \\ w_3^F(t+T) \\ \vdots \\ w_r^F(t+T) \\ \vdots \\ w_R^F(t+T) \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$
\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{10}^{M}(\lambda) & \cdots & b_{10}^{M}(\mu) & \cdots & 0 & 0 \\
s_{21}^{M} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & s_{32}^{M} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & & & & \bigcirc & & & & \\
\vdots & \vdots & & s_{rr-1}^{M} & & \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_{RR-1}^{M} & s_{RR}^{M} & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & b_{10}^{F}(\lambda) & \cdots & b_{10}^{F}(\mu) & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & s_{21}^{F} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & s_{32}^{F} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & \bigcirc & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & & & s_{rr-1}^{F} & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & s_{RR-1}^{F} & s_{RR}^{F}
\end{array}\right] \tag{19}
$$

Da die Erweiterung auf den zweigeschlechtlichen Fall einfach zu erreichen ist, werden im folgenden weiterhin eingeschlechtliche Modelle präsentiert, wobei das zweigeschlechtliche Analogon jedoch stets im Hinterkopf behalten werden kann. Die Annahme der Abgeschlossenheit ist bei menschlichen Populationen äußerst unrealistisch. Der nächste Schritt besteht also darin, die Migrationskomponente in das Modell einzubeziehen.

1.3 Kohorten-Überlebensmodell: offenes System und einzelne Region (Modell II)

1.3.1 Modellformulierung

- Modellannahmen

(II.1) einzelne Region, die mit der übrigen Welt durch Nettowanderungen verbunden ist

(II.2) $\Delta_r = T,\ r = 1, \ldots, R-1,\ \Delta_R = \infty$

- Bezeichnungen

$w_r(t)$ Bevölkerung zum Zeitpunkt t in Altersgruppe r, $r = 1, \ldots, R$

$b_{10}(r)$ altersspezifische Geburtenrate,$r = \lambda, \ldots, \mu$ (s. Modell I)

d_{*r-1} altersspezifische Sterberate, $r = 2, \ldots, R+1$ (s. Modell I)

s_{rr-1} alterspezifische Überlebensrate, $r = 2, \ldots, R$ (s. Modell I)

n_{rr-1} altersspezifische Nettomigrationsrate, $r = 2, \ldots, R$d.h. die Anzahl der Personen, die netto in die betrachtete Region immigrieren, i.V. zur Gesamtanzahl der Personen in Altersgruppe $r-1$ zu Beginn der Beobachtungsperiode.
Zur Berechnung der Nettomigrationsraten existiert umfangreiche Literatur, was die Schwierigkeiten, die mit einer angemessenen Schätzung einhergehen, verdeutlicht. Eine einfache Schätzmethode ist durch die Differenz der Immigrations- und Emigrationsraten gegeben, d.h.
$n_{rr-1} = m^I_{rr-1} - m^E_{rr-1}$.

- Modellgleichungen
Die Wachstumsmatrix $\mathbf{G}$ dieses Modells ergibt sich mittels Korrektur der Überlebensraten um die jeweilige Nettomigrationsrate:

$$\mathbf{w}(t+T) = \mathbf{G}\mathbf{w}(t) \tag{20}$$

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ w_r(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ w_R(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}(t+T) = \begin{bmatrix} w_1(t+T) \\ w_2(t+T) \\ w_3(t+T) \\ \vdots \\ \vdots \\ w_r(t+T) \\ \vdots \\ \vdots \\ w_R(t+T) \end{bmatrix} \tag{21}$$

$\mathbf{G} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_{10}(\lambda) & \cdots & b_{10}(\mu) & \cdots & 0 & 0 \\ s_{21}+n_{21} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_{32}+n_{32} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & s_{rr-1}+n_{rr-1} & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & s_{RR-1}+n_{RR-1} & s_{RR}+n_{RR} \end{bmatrix} \tag{22}$$

1.3.2 Definition und Messung der im Modell verwendeten Raten

Folgende Beziehungen gelten im Rahmen des zweiten Modells offensichtlich:

$$n_{rr-1}(t,t+T) = \frac{N_{rr-1}(t,t+T)}{w_{r-1}(t)} = \frac{M^I_{rr-1}(t,t+T) - M^E_{rr-1}(t,t+T)}{w_{r-1}(t)}, \tag{23}$$

wobei $N_{rr-1}(t,t+T)$ die Nettomigration der betrachteten Region und $M^I_{rr-1}(t,t+T)$ bzw. $M^E_{rr-1}(t,t+T)$ die zugehörige Immigration bzw. Emigration bezeichnet.

Die Daten zur Ermittlung von $M^I_{rr-1}(t,t+T)$ und $M^E_{rr-1}(t,t+T)$ werden gewöhnlich aus der amtlichen Statistik der betrachteten Region verfügbar sein. Zur Berechnung bzw. Schätzung der Geburten- bzw. Sterberaten im Modell II werden grundlegend die Formeln des ersten Modelles verwendet. Eine nähere Untersuchung der auf diese Weise erhaltenen Ziffern zeigt jedoch, daß Zähler und Nenner hier keine korrekte Beziehungszahl bilden. Dies geht im wesentlichen auf die zusätzlich im Modell verkörperte Migrationskomponente zurück. So gehen in die Anzahl der Sterbefälle $D_{*r-1}(t,t+T)$ auch die Personen ein, die

des Instituts für Weltwirtschaft

zum Zeitpunkt t noch anderswo leben, dann jedoch in das Untersuchungsgebiet immigrieren und dort sterben; analog gilt für den Nenner, der Bevölkerung der Altersgruppe r zu Beginn des Untersuchungszeitraums, daß er Personen umfaßt, die zum Zeitpunkt t in der interessierenden Region leben, dann jedoch emigrieren und folglich nur in einem Teil des Beobachtungszeitraums dem Risiko eines Todes in der Region ausgesetzt sind, folglich also auch nur teilweise einen Beitrag zur Risikopoulation leisten. Das gleiche Problem stellt sich für die Geburtenraten.

1.3.3 Beispiel (Fortsetzung)

Zusätzlich zu den in Tabelle 1 angegebenen Informationen bezüglich der Fertilitäts- und Mortalitätsstruktur wird nun noch die Kenntnis der Migrationsraten (s. Tabelle 2) mittels Modell II einbezogen. Angegeben sind jeweils die absoluten Wanderungsströme der Region West Riding in Yorkshire mit der übrigen Welt.

Tabelle 2: Absolute Nettomigrationsströme nach Altersklassen und absolute Nettomigrationsströme der in dieser Zeitperiode Geborenen nach Altersklassen der Mütter im Zeitraum vom 23/24.4.1961 bis 24/25.4.1966 für die Region West Riding in Yorkshire (England)

Alters-ntervall	Nettomigrations-volumen (Bev.)	Nettomigrations-volumen (Geb.)
[0,5)	568	
[5,10)	485	
[10,15)	-2539	-24
[15,20)	-939	-135
[20,25)	1228	-198
[25,30)	443	-141
[30,35)	460	-76
[35,40)	-309	-30
[40,45)	-379	-5
[45,50)	-536	-1
[50,55)	-609	
[55,60)	-933	
[60,65)	-1159	
[65,70)	-793	
[70,75)	-528	
[75,80)	-317	
[80,85)	-144	
[85,90)	-46	
[90,95)	-5	
≥ 95	0	

Nach Berechnung der verschiedenen Raten ergibt sich die Bevölkerung am Ende der Beobachtungsperiode aus der Wachstumsmatrix $\mathbf{G}$, die nun die Nettomigrationsraten berücksichtigt und dem Bevölkerungsvektor $\mathbf{w}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} 147367 \\ 133805 \\ 153179 \\ 127538 \\ 108875 \\ 111063 \\ 116411 \\ 130525 \\ 119526 \\ 127012 \\ 126319 \\ 114984 \\ 91196 \\ 65394 \\ 45976 \\ 28859 \\ 14362 \\ 4892 \\ 813 \\ 90 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}(t+T) = \begin{bmatrix} 160501 \\ 137673 \\ 125555 \\ 140351 \\ 112831 \\ 95870 \\ 96970 \\ 107946 \\ 119569 \\ 112470 \\ 117295 \\ 113074 \\ 98490 \\ 71284 \\ 45757 \\ 27677 \\ 14058 \\ 4796 \\ 988 \\ 92 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$\mathbf{G} =$

$$\begin{bmatrix} & .041 & .27 & .48 & .33 & .17 & .06 & .01 & .00 & & & & & & & & & \\ .93 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & .94 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & .92 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & .88 & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & .88 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & .87 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & .93 & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & .92 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & .94 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & .92 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & .90 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & .86 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & .78 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & .70 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & .60 & & & \\ & & & \bigcirc & & & & & & & & & & & & .49 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & .33 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & .20 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & .10 & .13 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Obwohl dieses Modell bereits der Migration Rechnung trägt, gibt es verschiedene Kritikpunkte, die ein multiregionales Modell erforderlich machen.
Die Verwendung von Nettomigrationsraten verzichtet auf einen ausdrücklichen Bezug auf Herkunfts- und Zielgebiete der Wandernden; es ist klar, daß das Herkunftsland der Immigranten nicht mit dem Zielgebiet der Emigranten übereinstimmen muß . Gerade in Zusammenhang mit einer Prognose kann entsprechende Information wichtig sein. Darüberhinaus fehlt die Möglichkeit, daß Kinder innerhalb des Beobachtungszeitraums sowohl geboren werden als auch in ein anderes Gebiet auswandern bzw. in das betreffende Gebiet einwandern im Modell II völlig. (Aufgrund der in Tabelle 2 angegebenen Informationen wäre hier eine Korrektur möglich.) Beide Kritikpunkte werden im nun folgenden Modell III berücksichtigt; Bruttoströme zwischen verschiedenen interessierenden Regionen sind explizit einbezogen.

1.3 Multiregionales Kohorten- Überlebensmodell(Modell III)

1.3.1 Modellformulierung

- Modellannahmen

(III.1) N Regionen kommunizieren über Emigration und Immigration miteinander.

(III.2) $\Delta_r = T,\ r = 1, \ldots, R-1,\ \Delta_R = \infty$

- Bezeichnungen

Die oberen Indizes beziehen sich auf die Region bzw. Regionen. Dabei soll der linke Index stets das Zielgebiet (Aufenthaltsort zum Zeitpunkt $t+T$), der rechte Index stets das Herkunftsgebiet (Aufenthaltsort zum Zeitpunkt t) bezeichnen. (Man beachte bezüglich dieser Vereinbarung, daß die unteren Indizes so stets die entsprechenden Altersgruppen angeben.)

$w_r(t)$ Bevölkerung zum Zeitpunkt t in Altersgruppe r, $r = 1, \ldots, R$ und in Region i, $i = 1, \ldots, N$

$b_{10}^{ji}(r)$ altersspezifische Geburtenrate, d.h. Anzahl der in das Gebiet j zum Zeitpunkt $t+T$ überlebenden Geburten an Müttern, die zum Zeitpunkt t in Altersgruppe r und in Region i gelebt haben, im Verhältnis zur Gesamtanzahl von Frauen in Altersgruppe r und Region i zu Beginn der Beobachtungsperiode, $i, j = 1, \ldots, N$, $r = \lambda, \ldots, \mu$.

d_{*r-1}^{*i} altersspezifische Sterberate nach Herkunftsregion, d.h. Anzahl der Sterbefälle an Personen, die zum Zeitpunkt t in der Altersgruppe $r-1$ und in Region i gelebt haben, im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Überlebenden in die Altersgruppe $r-1$ in Region i zu Beginn der Beobachtungsperiode, $i = 1, \ldots, N$, $r = 2, \ldots, R+1$. (Analog zur Notation bezüglich der Altersklassen soll auch hier das * darauf hindeuten, daß der Sterbefall sowohl in der Region i als auch in jeder anderen Region des Modells auftreten kann.)

m_{rr-1}^{ji} altersspezifische Migrationsrate von Herkunftsgebiet i nach Zielgebiet j, d.h. Anzahl der von i nach j wandernden Personen der entsprechenden Altersgruppen, im Verhältnis zur Bevölkerung der Herkunftsregion zu Beginn der Beobachtungsperiode, $i, j = 1, \ldots, N$, $r = 2, \ldots, R$.

s_{rr-1}^{i*} alterspezifische Überlebensrate nach Region zum Zeitpunkt $t+T$, $i, j = 1, \ldots, N$, $r = 2, \ldots, R+1$. (Das * soll darauf hinweisen, daß in dieser Rate nicht nur die Überlebenden der Region i, sondern auch diejenigen Personen, die zu Beginn der Beobachtungsperiode

in einer anderen Region gelebt haben und innerhalb des Beobachtungszeitraums nach i immigriert sind, eingeschlossen sind. Darüberhinaus ist zu beachten, daß diejenigen Personen, die zu Beginn der Beobachtungsperiode in i gelebt haben, dann jedoch emigriert sind, ausgeschlossen werden.)
Offensichtlich gilt:
$s^{i*}_{rr-1} = 1 - d^{*i}_{*r-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m^{ji}_{rr-1}$

- Modellgleichungen
Die zum Modell III gehörigen Bevölkerungsvektoren ergeben sich mittels "Vergrößerung" der bisherigen Bevölkerungsvektoren einer Region, d.h.:

$$\mathbf{w}(t+T) = \mathbf{G}\mathbf{w}(t) \tag{26}$$

mit

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1^1(t) \\ w_2^1(t) \\ \vdots \\ w_r^1(t) \\ \vdots \\ w_R^1(t) \\ \hline \vdots \\ \hline w_1^i(t) \\ w_2^i(t) \\ \vdots \\ w_r^i(t) \\ \vdots \\ w_R^i(t) \\ \hline \vdots \\ \hline w_1^N(t) \\ w_2^N(t) \\ \vdots \\ w_r^N(t) \\ \vdots \\ w_R^N(t) \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{w}(t+T) \begin{bmatrix} w_1^1(t+T) \\ w_2^1(t+T) \\ \vdots \\ w_r^1(t+T) \\ \vdots \\ w_R^1(t+T) \\ \hline \vdots \\ \hline w_1^i(t+T) \\ w_2^i(t+T) \\ \vdots \\ w_r^i(t+T) \\ \vdots \\ w_R^N(t+T) \\ \hline \vdots \\ \hline w_1^N(t+T) \\ w_2^N(t+T) \\ \vdots \\ w_r^N(t+T) \\ \vdots \\ w_R^N(t+T) \end{bmatrix} \tag{27}$$

Die Wachstumsmatrix $\mathbf{G}$ ist eine partitionierte Matrix folgender Struktur:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{11} & \mathbf{G}^{12} & \dots & \mathbf{G}^{1i} & \dots & \mathbf{G}^{1R} \\ \mathbf{G}^{21} & \mathbf{G}^{22} & \dots & \mathbf{G}^{2i} & \dots & \mathbf{G}^{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{G}^{i1} & \mathbf{G}^{i2} & \dots & \mathbf{G}^{ii} & \dots & \mathbf{G}^{iR} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}^{R1} & \mathbf{G}^{R2} & \dots & \mathbf{G}^{Ri} & \dots & \mathbf{G}^{RR} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Unter den Blöcken existieren zwei verschiedene Matrixtypen:
Typ 1: $\mathbf{G}^{ii}$, d.h. $i = j$

$$\mathbf{G}^{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & b_{10}^{ii}(\lambda) & \dots & b_{10}^{ii}(\mu) & \dots & 0 & 0 \\ s_{21}^{ii} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_{32}^{ii} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & s_{rr-1}^{ii} & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & s_{RR-1}^{ii} & s_{RR}^{ii} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Typ 2: $\mathbf{G}^{ji}$, d.h. $i \neq j$

$$\mathbf{G}^{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & b_{10}^{ji}(\lambda) & \dots & b_{10}^{ji}(\mu) & \dots & 0 & 0 \\ m_{21}^{ji} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_{32}^{ji} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & m_{rr-1}^{ji} & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & m_{RR-1}^{ji} & m_{RR}^{ji} \end{bmatrix} \tag{30}$$

1.3.2 Definition und Messung der im Modell verwendeten Raten

Folgende Raten ergeben sich offensichtlich:

$$m^{ji}_{rr-1}(t,t+T) = \frac{M^{ji}_{rr-1}(t,t+T)}{w_{r-1}(t)}, \quad i,j=1,\ldots,N; i \neq j \tag{31}$$

$$s^{ii}_{rr-1}(t,t+T) = 1 - d^{ii}_{*r-1}(t,t+T) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} m^{ji}_{rr-1}(t,t+T), \quad i=1,\ldots,N \tag{32}$$

$$d^{ii}_{*r-1} = \frac{D^{ii}_{*r-1}(t,t+T)}{w^i_{r-1}(t)}, \quad i=1,\ldots,N \tag{33}$$

$$b^{ji}_{10}(r)(t,t+T) = \frac{B^{ji}_{10}(r)(t,t+T)}{w^i_r(t)}, \quad i,j=1,\ldots,N; i \neq j \tag{34}$$

1.3.3 Beispiel (Fortsetzung)

Die Erweiterung zum multiregionalen Modell läßt sich nicht so schnell bewerkstelligen, wie der Übergang von Modell I zu Modell II.
Der erste Schritt besteht in der Hinzunahme zweier weiterer Regionen, so daß insgesamt folgende drei Gebiete im Modell enthalten sind:
1. West Riding in Yorkshire,
2. der Rest von England und Wales,
3. der übrige Rest der Welt.

Diese spezielle Wahl der Regionen erschöpft die Welt. Wäre dies nicht der Fall, so müßten zusätzliche Annahmen bezüglich der Beziehungen zwischen den im Modell nicht enthaltenen Gebieten und den enthaltenen Gebieten gemacht werden. Rogers hat z.B. die Bevölkerung von Kalifornien mit einem multiregionalen Modell unter der Annahme untersucht, daß Kalifornien abgeschlossen ist gegenüber Wanderungsbewegungen aus der übrigen Welt. Wünschenswert ist allerdings, daß Interaktionen zwischen den interessierenden Regionen und restlichen Gebieten nicht ignoriert werden.
Einige Punkte erschweren die korrekte Konstruktion von Modell III:
Die Daten bezüglich West Riding und die bezüglich der übrigen Regionen stammen aus unterschiedlichen Quellen. So werden beispielsweise verschiedene Zensuszeitpunkte verwendet; für West. Riding liegen Daten zum schon erwähnten 23./24. April 1961 aus regionalen Datenquellen vor, dagegen berichtet die 'General Register Office' für den Jahresbeginn oder die Jahresmitte. Weitere Unterschiede bestehen hinsichtlich der Erhebungspraxis: Die regionalen Daten für West Riding weisen einjährige Wanderungsströme nach dem Alter klassifiziert auf, während solche Daten nur auf fünf- oder zehnjähriger Basis von der 'General Register Office' vorliegen (solche Probleme können allerdings mit Hilfe des Kontomodells im folgenden Kapitel geeignet durch Schätzmethoden der tem-

poralen Zerlegung gelöst werden.). Weiterhin bestehen schon auf dieser Ebene der regionalen Aufgliederung Definitionsunterschiede; z.B. sind die Konzepte der an einem Stichtag in einem Gebiet lebenden Bevölkerung, der residenten Bevölkerung, der Wohnbevölkerung, der Gesamtbevölkerung und der zivilen Bevölkerung in den verschiedenen Quellen zur Messung der Bevölkerung zum Zeitpunkt t anzutreffen. Auf diese Unterschiede ist bei Auswahl und Bearbeitung des Datenmaterials zu achten.
Ein weiteres Problem ergibt sich bei der genauen Definition der Abgrenzung der genannten Gebiete. Hier ist beispielsweise auf Änderungen des Bezugsgebietes in der Statistik zu achten. Innerhalb der Beobachtungsperiode von 1961 bis 1966 änderte sich das Bezugsgebiet nicht; doch gilt dies nicht für die darauffolgende Fünfjahresperiode, in der die Gebietsaufteilung in der Statistik revidiert wurde.
Die folgenden Tabellen geben nun sukzessive die Bevölkerung zu Mitternacht 23./24. April 1961, die Anzahl der Geburtenfälle nach Altersklassen der Mutter, die Anzahl der Sterbefälle nach Altersklassen, das Immigrations- und das Emigrationsvolumen nach Altersklassen der verschiedenen Regionen an. Da die letzte Region, der Rest der Welt, nur hinzugenommen wurde, um eine vollständige Aufteilung der Welt zu erzielen, werden für dieses Modell keine gebietsinternen Zahlen, z.B. Sterbefälle innerhalb dieser Region, angegeben.

Tabelle 3: Bevölkerung von Mitternacht 23./24. April 1961 in den Regionen West Riding, dem Rest von England und Wales und dem Rest der Welt soweit er in Beziehung mit den anderen beiden Gebieten steht

Alters-intervall	Bevölkerung in Region 1 am 23/24.4.1961	Bevölkerung in Region 2 am 23/24.4.1961	Bevölkerung in Region 3 am 23/24.4.1961
[0,5)	147367	1698774	55326
[5,10)	133805	1536817	47143
[10,15)	153179	1754127	44293
[15,20)	127538	1494422	77831
[20,25)	108875	1325510	92129
[25,30)	111063	1334916	82971
[30,35)	116411	1385226	44416
[35,40)	130525	1485670	41540
[40,45)	119526	1374296	19865
[45,50)	127012	1456790	18374
[50,55)	126319	1449084	16532
[55,60)	114984	1292862	6695
[60,65)	91196	1005115	3199
[65,70)	65394	753531	2492
[70,75)	45976	553602	1911
[75,80)	28859	360273	1358
[80,85)	14362	190256	834
[85,90)	4892	69321	280
[90,95)	813	124933	68
≥ 95	90	1564	6

Tabelle 4: Anzahl der Geburten nach Altersklassen der Mütter im Zeitintervall vom 23./24. April 1961 bis zum 24./25. April 1966 in den Regionen West Riding, dem Rest von England und Wales und dem Rest der Welt soweit er in Beziehung mit den anderen beiden Gebieten steht

Alters-intervall	Geburten in Region 1	Geburten in Region 2	Geburten in Region 3
[10,15)	6290	75837	945
[15,20)	35487	427881	5445
[20,25)	52181	629180	8008
[25,30)	37433	451348	5744
[30,35)	20203	243603	3101
[35,40)	8044	96993	1235
[40,45)	1425	17178	218
[45,50)	48	574	7

Tabelle 5: Anzahl der Sterbefälle nach Altersklassen zum Zeitpunkt t und nach Altersklassen zum Zeitpunkt des Todes im Zeitintervall vom 23./24. April 1961 bis zum 24./25. April 1966 in den Regionen West Riding und dem Rest von England

Alters-	Region 1		Region 2	
intervall	Sterbefälle in r	Sterbefälle in $r+1$	Sterbefälle in r	Sterbefälle in $r+1$
[0,5)	757	188	7393	2032
[5,10)	151	140	1630	1504
[10,15)	159	356	1695	3887
[15,20)	348	346	3961	3933
[20,25)	285	291	3404	3319
[25,30)	284	336	3193	3783
[30,35)	385	541	4213	5906
[35,40)	659	1020	6879	10644
[40,45)	1113	1495	11613	13566
[41,50)	1905	2916	19787	30328
[50,55)	3385	4863	35212	50809
[55,60)	5644	7387	57489	75509
[60,65)	7642	8551	7679	786171
[65,70)	8058	8864	84723	94157
[70,75)	8564	7752	94146	95406
[75,80)	7258	6216	90744	78154
[80,85)	5266	3567	70156	48042
[85,90)	2505	1090	35902	15976
[90,95)	533	146	8997	2579
≥ 95	74		1303	

Tabelle 6: Emigrations- bzw. Immigrationsvolumen nach Altersklassen zwischen den verschiedenen Regionen im Zeitintervall vom 23./24. April 1961 bis zum 24./25. April 1966

Alters-intervall	Migrationsvolumen im Zeitintervall vom 23/24.4.1961 bis zum 24./25.4.1966					
	von Region 1		von Region 2		von Region 3	
	nach Region 2	nach Region 3	nach Region 1	nach Region 3	nach Region 1	nach Region 2
[0,5)	7534	1936	6596	27852	3442	51728
[5,10)	6678	1757	5968	25086	2952	44141
[10,15)	5701	4057	4866	59417	2353	41868
[15,20)	9362	3676	7881	58961	4218	73402
[20,25)	9926	3694	8803	56278	6045	85843
[25,30)	10126	3751	8866	56424	5454	77293
[30,35)	6227	1723	5461	26514	2949	41301
[35,40)	6983	1929	5857	28263	2746	38544
[40,45)	3454	574	2656	9066	991	18675
[41,50)	3670	613	2817	9553	930	17122
[50,55)	3650	603	2802	9572	842	15187
[55,60)	1946	447	1235	6028	225	6114
[60,65)	2167	174	1039	2824	143	2783
[65,70)	1554	123	778	2187	106	2069
[70,75)	1092	85	572	1537	77	1474
[75,80)	686	53	372	982	50	943
[80,85)	341	26	197	520	26	494
[85,90)	117	9	72	186	8	137
[90,95)	19	1	14	43	1	27
≥ 95	2	0	2	4	0	3

Nach Berechnung der verschiedenen Raten ergibt sich die Bevölkerung am Ende der Beobachtungsperiode in den Regionen West Riding und dem Rest von England und Wales und die Anzahl der Personen, die in diesem Zeitraum in einen Austausch mit einer dieser Regionen verwickelt waren und nun im übrigen Teil der Welt leben. Da die letztgenannten Werte nicht von Interesse sind, sind im folgenden nur die beiden Altersverteilungen der Regionen 1 und 2 angegeben.

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} 147367 \\ 133805 \\ 153179 \\ 127538 \\ 108875 \\ 111063 \\ 116411 \\ 130525 \\ 119526 \\ 127012 \\ 126319 \\ 114984 \\ 91196 \\ 65394 \\ 45976 \\ 28859 \\ 14362 \\ 4892 \\ 813 \\ 90 \\ \hline 1698174 \\ 1536817 \\ 1754127 \\ 1494422 \\ 1325510 \\ 1334916 \\ 1385226 \\ 1485670 \\ 1374296 \\ 1456790 \\ 1449084 \\ 1292862 \\ 1005115 \\ 753531 \\ 553602 \\ 360273 \\ 190256 \\ 69321 \\ 12493 \\ 1564 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}(t+T) = \begin{bmatrix} 166207 \\ 147143 \\ 133990 \\ 150109 \\ 125869 \\ 109490 \\ 110847 \\ 115914 \\ 128481 \\ 116498 \\ 121578 \\ 117327 \\ 100883 \\ 73625 \\ 47434 \\ 28854 \\ 14797 \\ 5163 \\ 1114 \\ 114 \\ \hline 1969486 \\ 1714063 \\ 1553416 \\ 1731726 \\ 1502267 \\ 1349303 \\ 1349891 \\ 1390540 \\ 1479345 \\ 1357400 \\ 1414872 \\ 1369129 \\ 1160246 \\ 842865 \\ 574885 \\ 364009 \\ 191150 \\ 71740 \\ 17199 \\ 2075 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$G^{11} =$

$$
\begin{bmatrix}
& & .04 & .28 & .48 & .34 & .17 & .06 & .01 & .00 & & & & & & & & & & \\
.93 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& .93 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & .93 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & .89 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & .87 & & & & & & & & & & & \bigcirc & & & & \\
& & & & & .87 & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & .92 & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & .92 & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & .94 & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & .93 & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & .90 & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & .86 & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & .79 & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & .71 & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & .61 & & & & & \\
& & & & \bigcirc & & & & & & & & & & & .50 & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & .34 & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & .21 & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & .10 & .13
\end{bmatrix}
\tag{36}
$$

$G^{22} =$

$$
\begin{bmatrix}
& & .04 & .29 & .47 & .33 & .18 & .07 & .01 & .00 & & & & & & & & & & \\
.97 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& .98 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & .96 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & .95 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & .95 & & & & & & & & & & & \bigcirc & & & & \\
& & & & & .95 & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & .97 & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & .97 & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & .97 & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & .96 & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & .93 & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & .89 & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & .83 & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & .76 & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & .65 & & & & & \\
& & & & \bigcirc & & & & & & & & & & & .53 & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & .37 & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & .24 & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & .14 & .16
\end{bmatrix}
\tag{37}
$$

G^{12}

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 & & .8E-4 & .5E-3 & .9E-3 & .6E-3 & .3E-3 & .1E-3 & .2E-4 & .7E-6 \\
.003 \\
 & .004 \\
 & & .003 \\
 & & & .005 \\
 & & & & .007 & & & & & & & & & & & & \bigcirc \\
 & & & & & .007 \\
 & & & & & & .004 \\
 & & & & & & & .004 \\
 & & & & & & & & .002 \\
 & & & & & & & & & .002 \\
 & & & & & & & & & & .002 \\
 & & & & & & & & & & & .001 \\
 & & & & & & & & & & & & .001 \\
 & & & & & & & & & & & & & .001 \\
 & & & & & & & & & & & & & & .001 \\
 & & & & \bigcirc & & & & & & & & & & & .001 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & .001 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & .001 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & .001 & .001
\end{array}\right] \qquad (38)
$$

$G^{21} =$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 & & .00 & .00 & .01 & .01 & .00 & .00 & .00 & .00 \\
.05 \\
 & .05 \\
 & & .04 \\
 & & & .07 \\
 & & & & .09 & & & & & & & & & & & \bigcirc \\
 & & & & & .09 \\
 & & & & & & .05 \\
 & & & & & & & .05 \\
 & & & & & & & & .03 \\
 & & & & & & & & & .03 \\
 & & & & & & & & & & .03 \\
 & & & & & & & & & & & .02 \\
 & & & & & & & & & & & & .02 \\
 & & & & & & & & & & & & & .02 \\
 & & & & & & & & & & & & & & .02 \\
 & & & & \bigcirc & & & & & & & & & & & .02 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & .02 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & .02 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & .02 & .02
\end{array}\right] \qquad (39)
$$

1.3.4 Weitere Anmerkungen zu Modell III

Es ist zu beachten, daß nunmehr im Modell auch wandernde Kinder der ersten Altersklasse berücksichtigt werden. Es wird allerdings schwierig sein, die Größe $B_{10}^{ji}(r)(t, t+T)$ für die verschiedenen beteiligten Regionen zu ermitteln. Zu kritisieren ist, – wie bei der Berechnung der Daten des vorigen Modells – daß die Sterberaten und die Geburtenraten unkorrekte Beziehungszahlen darstellen. Für alle drei Modelle gilt darüberhinaus, daß stets von einer Gleichheit der Länge des Untersuchungszeitraums und der Länge der Altersklassen ausgegangen wird. Unter anderem zielt das im folgende Kapitel vorzustellende Kontomodell auf eine Beseitigung dieser Modellbeschränkungen.

2 Einführung zum Zählmodell

Das folgende Kapitel soll den Leser mit den Prinzipien des Zählmodells, dem *accounting model* vertraut machen; es ist zu beachten, daß dabei, um für die Idee auch in Zusammenhang mit den bereits vorgestellten Modellen Verständnis zu wecken, der Schwerpunkt weniger auf der Ausformulierung technischer Details liegt. Eine Veröffentlichung, die sich besonders diesem Modellbestandteil widmet, soll der vorliegenden im Verlauf des Projektes folgen.

2.1 Einleitung

Allgemein läßt sich das Zählmodell so beschreiben:
Zählen besteht zunächst in der Fähigkeit die Lebensgeschichte einer "Population" zu spezifizieren, wobei es sich bei dieser Population sowohl um eine menschliche Bevölkerung als auch um das Geld in einem Portemonnaie als auch um ein beliebiges Aggregat, das sich als sinnvolle Bevölkerung bezeichnen läßt, handeln kann [16]. Jedes einzelne Element der Untersuchungsgesamtheit muß berücksichtigt werden. Nun stellt man sich vor, daß jede Einheit in der Population durch seinen Zustand charakterisiert werden kann.
Die Indizes $k, l,\ k, l = 1, \ldots, L$ sollen jeweils den Zustand eines Bevölkerungselements zu Beginn der Untersuchungsperiode zum Zeitpunkt t bzw. am Ende der Untersuchungsperiode zum Zeitpunkt $t + T$ bezeichnen. Zählen für den Beobachtungszeitraum $[t, t + T)$ besteht folglich darin zu spezifizieren, wieviele Elemente sich zum Zeitpunkt t im Zustand k und zum Zeitpunkt $t + T$ im Zustand l befinden. Bezeichnet $\mathbf{K}^{kl}(t, t + T)$ diese Größe, so kann das Ergebnis des Abzählens in der Kontomatrix oder Zählmatrix (*accounting matrix*) zusammengefaßt werden:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \ldots & \mathbf{K}^{1i} & \ldots & \mathbf{K}^{1L} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \ldots & \mathbf{K}^{2i} & \ldots & \mathbf{K}^{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}^{i1} & \mathbf{K}^{i2} & \ldots & \mathbf{K}^{ii} & \ldots & \mathbf{K}^{iL} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}^{L1} & \mathbf{K}^{L2} & \ldots & \mathbf{K}^{Li} & \ldots & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} = \left\{\mathbf{K}^{kl}\right\}_{k,l=1,\ldots,L} \tag{40}$$

Die Zeilensummen $\sum_{l=1}^{L} \mathbf{K}^{kl} = \mathbf{K}^{k*}(t)$ können als Gesamtbevölkerung in Zustand k zum Zeitpunkt t, die Spaltensummen $\sum_{k=1}^{L} \mathbf{K}^{kl} = \mathbf{K}^{*l}(t)$ als Gesamtbevölkerung in Zustand l zum Zeitpunkt $t + T$ interpretiert werden.
Dies klingt zunächst ziemlich abstrakt, doch wird der Ansatz klarer, wenn er auf eine menschliche Population bezogen wird. Alles, was festzulegen ist, ist die Menge der möglichen Zustände für die Indizes k und l.
Dazu seien N Regionen, $i, j = 1, \ldots, N$ und R Altersgruppen $r, s = 1, \ldots, R$ angenommen. Der einfachste Fall ist $\mathbf{K}_{rs}^{ii}$, die Anzahl der Personen in Region i und Altersgruppe s zum Zeitpunkt t, die auch zum Zeitpunkt $t + T$

in Region i, nun in der Altersgruppe s leben, $r,s = 1,\ldots,R$, $i = 1,\ldots,N$. Wanderungen lassen sich durch zwei verschiedene Regionenindizes darstellen: $\mathrm{K}_{rs}^{ij}, i \neq j, i,j = 1,\ldots,N, r,s = 1,\ldots,R$ bezeichnet die Anzahl der Personen in Region i und Altersgrupppe r zum Zeitpunkt t, die im Verlauf der Beobachtungsperiode irgendwann nach j wandern, so daß sie dort zum Zeitpunkt $t+T$ in der Altersgruppe s leben.
Das demographische Ereignis einer Geburt soll notationsmäßig als Zustand $\beta(i), i = 1,\ldots,N$, das demographische Ereignis eines Sterbefalls als Zustand $\delta(j), j = 1,\ldots,N$, gekennzeichnet werden. Es ist klar, daß Geburtszustände stets nur im ersten Index, Sterbefälle stets nur im zweiten Index auftreten können.
Die folgende Graphik in Abbildung 1 stellt die möglichen Ströme, die in der Kontomatrix auftreten können, in einem multiregionalen Lexisdiagramm dar [1, S. 324].

Abbildung 1: Multiregionales Lexisdiagramm

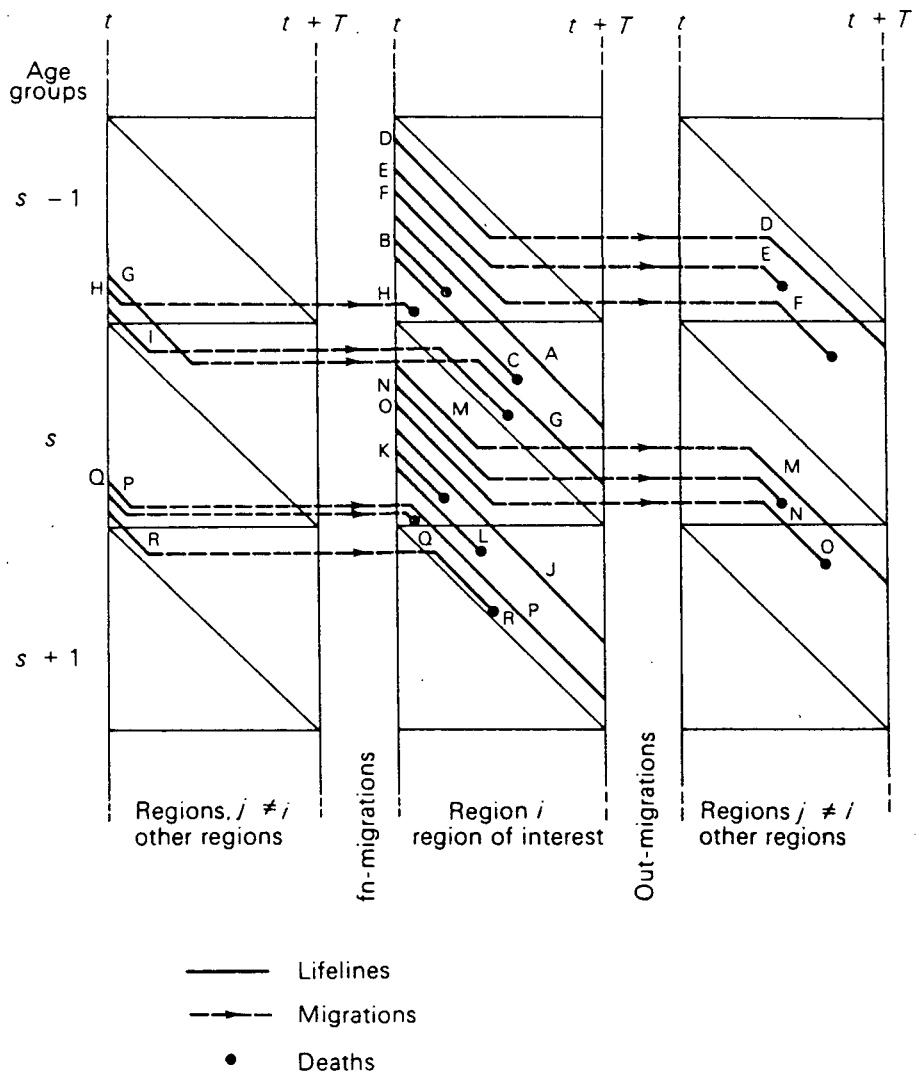


Figure A4.3 Multi-regional Lexis diagram illustrating the population at risk concept in the simple case

Die zugehörige Kontomatrix ist eine $2NR \times 2NR$-Matrix, die durch das folgende Schema beschrieben werden kann.

(a)

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{ES} - \text{Matrizen} & \text{ED} - \text{Matrizen} \\ \hline \text{BS} - \text{Matrizen} & \text{BD} - \text{Matrizen} \end{array}\right] \tag{41}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{c} \text{E} - \text{Matrizen} \\ \hline \text{B} - \text{Matrizen} \end{array}\right] \tag{42}$$

(c)

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{S} - \text{Matrizen} & \text{D} - \text{Matrizen} \end{array}\right] \tag{43}$$

Der Einfachheit halber sind hier die Bezeichnungen entsprechend der Notation in Rees/Wilson [1],[2] gewählt mit folgender mnemotechnischer Bedeutung:

E *existence*, d.h. Überlebende, also Personen, die bereits zu Beginn der Beobachtungsperiode lebten,

S *survival*, d.h. Personen, die die zugrundeliegende Beobachtungsperiode überleben,

B *birth*, d.h. Personen, die zu Beginn der Beobachtungsperiode noch nicht lebten,

D *death*, d.h. Personen, die die zugrundeliegende Beobachtungsperiode nicht überleben.

Entsprechend ergeben sich die unter (a) verwendeten Kombinationen: z.B. bezieht sich ED auf den Strom der zu Beginn der Beobachtungsperiode Lebenden, jedoch die Beobachtungsperiode Nicht-Überlebenden.
Zwei verschiedene Matrixtypen treten auf (der Einfachheit halber soll nur der Fall betrachtet werden, daß jedes Altersintervall mindestens so lang ist wie die Länge einer Beobachtungsperiode):

1. Typische E-Matrix:

$$\mathbf{K}^{ij} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ij} & K_{12}^{ij} & \cdots & K_{1r}^{ij} & \cdots & K_{1R}^{ij} \\ 0 & K_{22}^{ij} & \cdots & K_{2r}^{ij} & \cdots & K_{2R}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{rr}^{ij} & \cdots & K_{rR}^{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & K_{RR}^{ij} \end{bmatrix} \tag{44}$$

2. Typische B-Matrix:

$$\mathbf{K}^{\beta(i)j} = \begin{bmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ K_{\lambda 1}^{\beta(i)j} & \\ \vdots & \bigcirc \\ K_{\mu 1}^{\beta(i)j} & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix} \tag{45}$$

Diese Stelle eignet sich, um kurz auf eine weitere Disaggregation der Kontomatrix nach dem Geschlecht einzugehen. Eine solche Disaggregation ist einfach zu erzielen. Die allgemeine Kontomatrix besteht aus einem "weiblichen" und einem "männlichen" Teil (zwischen diesen beiden Teilen sind natürlich keine Übergänge möglich).

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}^F & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & \mathbf{K}^M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}^{E^F} & \bigcirc \\ \mathbf{K}^{B^F} & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & \mathbf{K}^{E^M} \\ \bigcirc & \mathbf{K}^{B^M} \end{array}\right] \tag{46}$$

Im folgenden wird jedoch weiterhin der eingeschlechtliche Fall behandelt.
Der nächste Schritt besteht nun darin, diese Kontomatrix mit geeigneten Größen zu füllen. Eine typische Datensituation ist beispielsweise gegeben durch Kenntnis von:

K^{i*}_{r*}, der Ursprungsbevölkerung nach Alter und Regionszugehörigkeit zum Zeitpunkt t,

$K^{\beta(i)*}_{**}(K^{*m(j)}_{*u})$, der Anzahl der Geburten nach Region der Geburt und Alter der Mutter bei der Geburt in der Beobachtungsperiode $[t, t+T)$,

$K^{*\delta(j)}_{*s}$, der Anzahl der Sterbefälle nach Region des Todes und dem Alter zum Zeitpunkt des Todes in der Beobachtungsperiode $[t, t+T)$,

$K^{ij}_{rs}, i \neq j$, dem Wanderungsvolumen von Region i nach Region j nach dem Alter zu Beginn (r) und am Ende (s) der Beobachtungsperiode,

$K^{\beta(i)j}_{rs}, i \neq j$, dem Wanderungsvolumen der innerhalb des Beobachtungszeitraums Geborenen nach Geburts- und Zielgebiet, nach dem Alter der Mutter zu Beginn der Beobachtungsperiode und dem Alter des Kindes am Ende der Beobachtungsperiode.

Einfache Arithmetik und verschiedene Schätzprozeduren, deren konkrete Beschreibung – wie bereits erwähnt – in einem nachfolgenden Arbeitspapier für die spezielle(n) Datensituation(en) in Europa erfolgen soll, führen zu der gewünschten Kontomatrix. Hier sei nur so viel erwähnt, daß bei ihrer Herleitung mit korrekten Risikopopulationen gearbeitet wird. Weitere Vergleiche mit den in Kapitel 1 dargestellten Rogers-Modellen werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels kurz zusammengefaßt.
Statt einer detailierten Erörterung der Erstellung der Kontomatrix soll im folgenden nun gezeigt werden, daß das im ersten Teil vorgestellte multiregionale Rogersmodell sich aus einem Spezialfall der Kontomatrix ergibt.

2.2 Die Übergangsratenform des Kontomodells

Aus den in der Kontomatrix enthaltenen Größen kann durch einfache Manipulationen ein Übergangsratenmodell errichtet werden.
Dazu sei zunächst wieder die zuerst eingeführte allgemeine Kontomatrix betrachtet:

$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{K}^{kl}\right\}_{k,l=1,\ldots,L} \tag{47}$$

Die Matrix $\mathbf{H}$ mit den Übergangsraten ergibt sich mittels Dividieren jeden Elements durch die jeweilige Zeilensumme K^{k*}:

$$\mathbf{H} = \left\{h^{kl}\right\}_{k,l=1,\ldots,L} = \left\{\frac{K^{kl}}{K^{k*}}\right\}_{k,l=1,\ldots,L} \tag{48}$$

Das zweite Element der ersten Spalte gibt beispielsweise die Rate an, mit der Übergänge von Zustand k nach Zustand l in der Beobachtungsperiode stattfinden.

Der nächste Schritt besteht darin, die Matrix $\mathbf{H}$ zu transponieren:

$$\mathbf{G} = \{G^{kl}\} = H' = \{h^{lk}\}_{l,k=1,\ldots,L} = \left\{\frac{K^{lk}}{K^{l*}}\right\}_{l,k=1,\ldots,L} \tag{49}$$

Weiterhin sei

$$\mathbf{K}^{\wedge *} = \{K^{k*}\}_{k=1,\ldots,L} \tag{50}$$

der Vektor mit der Bevölkerung zum Zeitpunkt t, also der "alten" Bevölkerung und

$$\mathbf{K}^{*\wedge} = \{K^{*l}\}_{l=1,\ldots,L} \tag{51}$$

der Vektor mit der Bevölkerung zum Zeitpunkt $t+T$, also der "neuen" Bevölkerung. Es gilt folgende Beziehung zwischen alter und neuer Bevölkerung:

$$\mathbf{K}^{*\wedge} = \mathbf{G}\mathbf{K}^{\wedge *}, \tag{52}$$

was leicht zu sehen ist, wenn die einzelnen Bestandteile dieser Gleichung ausführlich notiert werden:

$$\begin{bmatrix} K^{*1} \\ K^{*2} \\ \vdots \\ K^{*L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K^{11}}{K^{1*}} & \frac{K^{21}}{K^{2*}} & \cdots & \frac{K^{L1}}{K^{L*}} \\ \frac{K^{12}}{K^{1*}} & \frac{K^{22}}{K^{2*}} & \cdots & \frac{K^{L2}}{K^{L*}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{K^{1L}}{K^{1*}} & \frac{K^{2L}}{K^{2*}} & \cdots & \frac{K^{LL}}{K^{L*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^{1*} \\ K^{2*} \\ \vdots \\ K^{L*} \end{bmatrix} \tag{53}$$

Es ist auch möglich, umgekehrt die Kontomatrix aus der so strukturierten Wachstumsmatrix $\mathbf{G}$ zu erhalten. Dazu bildet man eine Hilfsdiagonalmatrix, deren Diagonalelemente gerade aus den Elementen des Vektors $\mathbf{K}^{\wedge *}$, also der Bevölkerung zu Beginn der Beobachtungsperiode bestehen.

$$\tilde{\mathbf{K}}^{\wedge *} = diag\{\mathbf{K}^{\wedge *}\} = \begin{bmatrix} K^{1*} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & K^{L*} \end{bmatrix} \tag{54}$$

Die Beziehung

$$\mathbf{K}' = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{K}}^{\wedge *} \tag{55}$$

liefert die transponierte Kontomatrix.
Zu diesen allgemeinen Herleitungen ist anzumerken, daß die verschiedenen Matrizen stets nur für einen bestimmten Zeitraum gelten, strenggenommen also eine zusätzliche Indizierung, etwa $\mathbf{K}(t, t+T]$, $\mathbf{H}(t, t+T]$ bzw. $\mathbf{G}(t, t+T]$, zur Herstellung des Bezugs auf einen bestimmten Beobachtungszeitraum, für den die berechneten Ströme und Übergangsraten Gültigkeit besitzen sollen, notwendig gewesen wäre. Um die Notation jedoch nicht zu überfrachten, wurde hier darauf verzichtet.

Das nächste Ziel besteht nun darin, die spezielle demographische Kontomatrix, die zuvor hergeleitet wurde, in Übergangsratenform zu bringen. Um die Darstellung einfach zu halten, soll zudem der spezielle Fall betrachtet werden, daß Alters- und Zeitintervalle die gleiche Länge besitzen.
Dazu sei an die partitionierte Form von **K** erinnert:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \left\{K_{rs}^{ij}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} & \left\{K_{rs}^{i\delta(j)}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} \\ \hline \left\{K_{rs}^{\beta(i)j}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} & \left\{K_{rs}^{\beta(i)\delta(j)}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} \end{array}\right] \tag{56}$$

Die Matrix **H** ergibt sich wie zuvor durch Division aller Elemente durch die zugehörige Zeilensumme und die Matrix **G** durch Transposition von **H**:

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{c|c} \left\{h_{rs}^{ij}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} & \left\{h_{rs}^{i\delta(j)}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} \\ \hline \left\{h_{rs}^{\beta(i)j}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} & \left\{h_{rs}^{\beta(i)\delta(j)}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N\\ r,s=1,\ldots,R}} \end{array}\right] \tag{57}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \left\{\frac{K_{rs}^{ij}}{K_{r\bullet}^{i\bullet}}\right\}_{i,j=1,\ldots,L} & \left\{\frac{K_{rs}^{i\delta(j)}}{K_{r\bullet}^{i\bullet}}\right\}_{i,j=1,\ldots,L} \\ \hline \left\{\frac{K_{rs}^{\beta(i)j}}{K_{r\bullet}^{\beta(i)\bullet}}\right\}_{i,j=1,\ldots,L} & \left\{\frac{K_{rs}^{\beta(i)\delta(j)}}{K_{r\bullet}^{\beta(i)\bullet}}\right\}_{i,j=1,\ldots,L} \end{array}\right] \tag{58}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}' = \left[\begin{array}{c|c} \left\{\frac{K_{sr}^{ji}}{K_{s\bullet}^{j\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} & \left\{\frac{K_{sr}^{j\delta(i)}}{K_{s\bullet}^{j\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} \\ \hline \left\{\frac{K_{sr}^{\beta(j)i}}{K_{s\bullet}^{\beta(j)\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} & \left\{\frac{K_{sr}^{\beta(j)\delta(i)}}{K_{s\bullet}^{\beta(j)\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} \end{array}\right] \tag{59}$$

Ebenso gelten die folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{K}^{*\wedge} = \mathbf{G}\mathbf{K}^{\wedge *}, \tag{60}$$

$$\mathbf{K}' = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{K}}^{\wedge *}, \tag{61}$$

wobei zu beachten ist, wie die Vektoren $\mathbf{K}^{*\wedge}$ und $\mathbf{K}^{\wedge *}$ nun aussehen:

$$\mathbf{K}^{\wedge *} = \begin{bmatrix} K_{1*}^{1*} \\ K_{2*}^{1*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{1*} \\ \hline K_{1*}^{2*} \\ K_{2*}^{2*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{1*}^{N*} \\ K_{2*}^{N*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{N*} \\ \hline K_{1*}^{\beta(1)*} \\ K_{2*}^{\beta(1)*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{\beta(1)*} \\ \hline K_{1*}^{\beta(2)*} \\ K_{2*}^{\beta(2)*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{\beta(2)*} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{1*}^{\beta(N)*} \\ K_{2*}^{\beta(N)*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{\beta(N)*} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{*\wedge} = \begin{bmatrix} K_{*1}^{*1} \\ K_{*2}^{*1} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*1} \\ \hline K_{*1}^{*2} \\ K_{*2}^{*2} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*2} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{*1}^{*N} \\ K_{*2}^{*N} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*N} \\ \hline K_{*1}^{*\delta(1)} \\ K_{*2}^{*\delta(1)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(1)} \\ \hline K_{*1}^{*\delta(2)} \\ K_{*2}^{*\delta(2)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{*1}^{*\delta(N)} \\ K_{*2}^{*\delta(N)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(N)} \end{bmatrix} \tag{62}$$

2.3 Weitere Übergangsformen des Kontomodells

Die folgenden weiteren Formen des Kontomodells, die Übergangsraten beinhalten, leiten sich aus der im vorigen Abschnitt entwickelten Übergangsratenform der Matrix **G** her. Prinzipiell sind sie verkürzte Darstellungen dieser Ausgangsform.

Der Grund für ihre Beschreibung liegt darin, daß ihre Herleitung unmittelbar zum Rogersmodell des ersten Kapitels führen wird.

Um die Präsentation etwas zu vereinfachen, soll wiederum die Annahme der

gleichen Länge von Beobachtungsperiode und Altersintervallen gelten, wobei allerdings die Länge des letzten Altersintervall ∞ gesetzt wird. Es sei daran erinnert, daß diese Annahmen auch im Rahmen aller Rogersmodelle gelten sollten. Alle Ausführungen bleiben jedoch auch für den allgemeinen Fall gültig.
Die bisherigen Matrizen **K** und **G** sehen für den speziellen Fall der gleichen Länge von Altersintervallen und Beobachtungsperiode, also den "einfachen Fall", so aus:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \left\{K_{rs}^{ij}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N \\ r,s=1,\ldots,R}} & \left\{K_{rs}^{i\delta(j)}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N \\ r,s=1,\ldots,R}} \\ \hline \left\{K_{rs}^{\beta(i)j}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N \\ r,s=1,\ldots,R}} & \left\{K_{rs}^{\beta(i)\delta(j)}\right\}_{\substack{i,j=1,\ldots,N \\ r,s=1,\ldots,R}} \end{array}\right] \tag{63}$$

bzw.

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c|c} \left\{\frac{K_{sr}^{ji}}{K_{s\bullet}^{j\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} & \left\{\frac{K_{sr}^{j\delta(i)}}{K_{s\bullet}^{j\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} \\ \hline \left\{\frac{K_{sr}^{\beta(j)i}}{K_{s\bullet}^{\beta(j)\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} & \left\{\frac{K_{sr}^{\beta(j)\delta(i)}}{K_{s\bullet}^{\beta(j)\bullet}}\right\}_{j,i=1,\ldots,L} \end{array}\right] \tag{64}$$

mit:

1. ES-Matrizen:

$$\left\{K_{rs}^{ij}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & K_{12}^{ij} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & K_{23}^{ij} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K_{R-1R}^{ij} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K_{RR}^{ij} \end{bmatrix}, \tag{65}$$

bzw.

$$\left\{G_{sr}^{ji}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{K_{12}^{ji}}{K_{1\bullet}^{j\bullet}} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{K_{23}^{ij}}{K_{2\bullet}^{j\bullet}} & \ldots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{K_{R-1R}^{ji}}{K_{R-1\bullet}^{j\bullet}} & \frac{K_{RR}^{ji}}{K_{R\bullet}^{j\bullet}} & \end{bmatrix} \tag{66}$$

2. ED-Matrizen

$$\left\{K_{rs}^{i\delta(j)}\right\} = \begin{bmatrix} K_{11}^{i\delta(j)} & K_{12}^{i\delta(j)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{i\delta(j)} & K_{23}^{i\delta(j)} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K_{R-1R-1}^{i\delta(j)} & K_{R-1R}^{i\delta(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & K_{RR}^{i\delta(j)} \end{bmatrix}, \tag{67}$$

bzw.

$$\left\{G_{sr}^{j\delta(i)}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}^{j\delta(i)}}{K_{1\bullet}^{j\bullet}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{K_{12}^{j\delta(i)}}{K_{1\bullet}^{j\bullet}} & \frac{K_{22}^{j\delta(i)}}{K_{2\bullet}^{j\bullet}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{K_{23}^{j\delta(i)}}{K_{2\bullet}^{j\bullet}} & \frac{K_{33}^{j\delta(i)}}{K_{3\bullet}^{j\delta(i)}} \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{K_{R-1R}^{j\delta(i)}}{K_{R-1\bullet}^{j\bullet}} & \frac{K_{RR}^{j\delta(i)}}{K_{R\bullet}^{j\bullet}} \end{bmatrix} \tag{68}$$

3. BS-Matrizen

$$\left\{K_{rs}^{\beta(i)j}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ K_{\lambda 1}^{\beta(i)j} & \\ \vdots & \bigcirc \\ K_{\mu 1}^{\beta(i)j} & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}, \tag{69}$$

bzw.

$$\left\{G_{sr}^{\beta(j)i}\right\} = \begin{bmatrix} 0 \dots 0 & \frac{K_{\lambda 1}^{\beta(i)j}}{K_{\lambda\bullet}^{\beta(j)\bullet}} & \dots & \frac{K_{\mu 1}^{\beta(i)j}}{K_{\mu\bullet}^{\beta(j)\bullet}} & 0 \dots 0 \\ & & & & \\ & & \bigcirc & & \\ & & & & \end{bmatrix} \tag{70}$$

4. BD-Matrizen

$$\left\{K_{rs}^{\beta(i)\delta(j)}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ K_{\lambda 1}^{\beta(i)\delta(j)} & & \\ \vdots & \bigcirc & \\ K_{\mu 1}^{\beta(i)\delta(j)} & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \tag{71}$$

bzw.

$$\left\{G_{rs}^{\beta(j)\delta(i)}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{K_{\lambda 1}^{\beta(i)\delta(j)}}{K_{\lambda *}^{\beta(j)*}} & \dots & \frac{K_{\mu 1}^{\beta(i)\delta(j)}}{K_{\mu *}^{\beta(j)*}} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & \bigcirc & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \tag{72}$$

Die erste Abänderung besteht darin, den Divisor im Geburtenteil der Kontomatrix abzuändern. Bisher wird hier durch die Gesamtanzahl der Geburten in der Ursprungsregion an Müttern der entsprechenden Altersklasse dividiert. Dies sind keine Geburtenraten im üblichen Sinne. Eine Alternative ist es, als Divisor die korrekte Risikopopulation zu verwenden, was im Rahmen des Kontomodells ohne Schwierigkeiten möglich ist, da – wie schon erwähnt – diese Werte als Randprodukt bei der Herleitung der Elemente der Kontomatrix abfallen. Eine weitere Möglichkeit, die in einer kompakteren Darstellung der Matrix $\mathbf{G}$ resultiert, ergibt sich aus Verwendung der Zeilenrandhäufigkeit des Existenzteils der Kontomatrix, d.h. also hier werden die letzten RN Zeilen durch jeweils den entsprechenden Wert der ersten RN Zeilen geteilt. So ergibt sich die Matrix $\mathbf{G}^{(1)}$:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} \left\{\frac{K_{rr}^{ji}}{K_{**}^{j*}}\right\}_{j,i=1,\dots,L} & \left\{\frac{K_{rr}^{j\delta(i)}}{K_{**}^{j*}}\right\}_{j,i=1,\dots,L} \\ \hline \left\{\frac{K_{rr}^{\beta(j)i}}{K_{**}^{j*}}\right\}_{j,i=1,\dots,L} & \left\{\frac{K_{rr}^{\beta(j)\delta(i)}}{K_{**}^{j*}}\right\}_{j,i=1,\dots,L} \end{array}\right] \tag{73}$$

Zu beachten sind nun die Veränderungen bezüglich des Vektors $\mathbf{K}^{\wedge *}$, während

der Vektor $\mathbf{K}^{*\wedge}$ sein Aussehen behält:

$$\mathbf{K}^{(1)\wedge *} = \begin{bmatrix} K_{1*}^{1*} \\ K_{2*}^{1*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{1*} \\ \hline K_{1*}^{2*} \\ K_{2*}^{2*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{1*}^{N*} \\ K_{2*}^{N*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{N*} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{(1)*\wedge} = \begin{bmatrix} K_{*1}^{*1} \\ K_{*2}^{*1} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*1} \\ \hline K_{*1}^{*2} \\ K_{*2}^{*2} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*2} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{*1}^{*N} \\ K_{*2}^{*N} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*N} \\ \hline K_{*1}^{*\delta(1)} \\ K_{*2}^{*\delta(1)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(1)} \\ \hline K_{*1}^{*\delta(2)} \\ K_{*2}^{*\delta(2)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{*1}^{*\delta(N)} \\ K_{*2}^{*\delta(N)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(N)} \end{bmatrix} \tag{74}$$

Weiter wird nun $\mathbf{G}^{(1)}$ zu $\hat{\mathbf{G}}$ vereinfacht, indem die Elemente einer Zeile, die jeweils den gleichen Divisor besitzen, addiert werden:

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{K_{sr}^{ji} + K_{sr}^{\beta(j)i}}{K_{**}^{j*}} \right\}_{\substack{j,i=1,\ldots,N \\ s,r=1,\ldots,R}} \\ \hline \left\{ \frac{K_{sr}^{j\delta(i)} + K_{sr}^{\beta(j)\delta(i)}}{K_{**}^{j*}} \right\}_{\substack{j,i=1,\ldots,N \\ s,r=1,\ldots,R}} \end{bmatrix}, \tag{75}$$

d.h. die Matrix $\hat{\mathbf{G}}$ besitzt das Format $2NR \times NR$. Hieraus resultiert nun mit

$$\hat{\mathbf{K}}^{\wedge *} = \begin{bmatrix} K_{1*}^{1*} \\ K_{2*}^{1*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{1*} \\ \hline K_{1*}^{2*} \\ K_{2*}^{2*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{1*}^{N*} \\ K_{2*}^{N*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{N*} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{K}}^{*\wedge} = \begin{bmatrix} K_{*1}^{*1} \\ K_{*2}^{*1} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*1} \\ \hline K_{*1}^{*2} \\ K_{*2}^{*2} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*2} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{*1}^{*N} \\ K_{*2}^{*N} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*N} \\ \hline K_{*1}^{*\delta(1)} \\ K_{*2}^{*\delta(1)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(1)} \\ \hline K_{*1}^{*\delta(2)} \\ K_{*2}^{*\delta(2)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{*1}^{*\delta(N)} \\ K_{*2}^{*\delta(N)} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*\delta(N)} \end{bmatrix}, \tag{76}$$

d.h. der alte Bevölkerungsvektor besitzt die Länge NR während der neue Bevölkerungsvektor weiterhin die Länge $2NR$ besitzt, die verkürzte zweite Modellgleichung in Übergangsratenform:

$$\hat{\mathbf{K}}^{*\wedge} = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{K}}^{\wedge *} \tag{77}$$

Besteht kein weiteres Interesse an den im Beobachtungszeitraum sterbenden Personen, so ergibt sich die Matrix $\hat{\tilde{\mathbf{G}}}$ und damit die dritte Übergangsratenglei-

chung durch Weglassen der letzten NR Zeilen:

$$\hat{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{K_{sr}^{ji} + K_{sr}^{\beta(j)i}}{K_{s*}^{j*}} \right\}_{\substack{j,i=1,\ldots,N \\ s,r=1,\ldots,R}} \tag{78}$$

Die entsprechenden Bevölkerungsvektoren und die Modellgleichung lauten nun:

$$\hat{\hat{\mathbf{K}}}^{\wedge *} = \begin{bmatrix} K_{1*}^{1*} \\ K_{2*}^{1*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{1*} \\ \hline K_{1*}^{2*} \\ K_{2*}^{2*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{1*}^{N*} \\ K_{2*}^{N*} \\ \vdots \\ K_{R*}^{N*} \end{bmatrix}, \quad \hat{\hat{\mathbf{K}}}^{*\wedge} = \begin{bmatrix} K_{*1}^{*1} \\ K_{*2}^{*1} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*1} \\ \hline K_{*1}^{*2} \\ K_{*2}^{*2} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*2} \\ \hline \vdots \\ \hline K_{*1}^{*N} \\ K_{*2}^{*N} \\ \vdots \\ K_{*R}^{*N} \end{bmatrix} \tag{79}$$

$$\hat{\hat{\mathbf{K}}}^{*\wedge} = \hat{\hat{\mathbf{G}}}\hat{\hat{\mathbf{K}}}^{\wedge *} \tag{80}$$

Aus mehreren Gründen ist es sinnvoll, diese Form des Kontomodells zu betrachten:

1. Markowmodelle für Bevölkerungen fußen auf Übergangsraten, so daß in dieser Form das Kontomodell auch als Dateninput für ein solches Modell dienen kann.

2. Diese Darstellungsform ermöglicht den Vergleich mit anderen Modellen, die so berechnete Raten beinhalten.

Im ersten Teil dieses Kapitels wurde kurz auf eine Geschlechtsdisaggregation eingegangen. Um aus der angegebenen Darstellung eine geeignete Übergangsform zu erhalten, muß diese ein wenig umgestaltet werden:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}^{EF} & \bigcirc \\ \mathbf{K}^{BF} & \mathbf{K}^{BM} \\ \hline \bigcirc & \mathbf{K}^{EM} \\ \bigcirc & \bigcirc \end{array}\right] \tag{81}$$

Auf diese Weise werden die männlichen Geburten bei Entwicklung der Übergangsmatrizen in Beziehung zu den Frauen im gebärfähigen Alter gesetzt, so daß eine korrekte Geburtenrate vorliegt.

2.4 Vergleich mit den Rogersmodellen

Der letzte Punkt dieser Ausführungen dient nun dem Vergleich des Modells von Rogers, insbesondere dem letzen der drei Modelle, dem multiregionalen Modell, und dem Kontomodell in der dritten Übergansform.
Ein Vergleich der Modellgleichungen 26 und 80 zeigt, falls die verschiedenen Notationen der Modelle beachtet werden, daß beide grundlegend dieselbe Struktur besitzen. Der einzige wichtige Unterschied zeigt sich bei Prüfung der Geburtenteile der Matrizen: während das Kontomodell die Einträge auf die Region des Kindes zum Zeitpunkt der Mutterschaft bezieht, arbeite Rogers mit der Region der Muteer zu Beginn der Beobachtungsperiode. Rees/Wilson [1] geben jedoch einen Weg an, der geeignet ist, die andere Rate aus der jeweils vorliegenden Rate zu schätzen. Damit besitzt das Kontomodell gegenüber dem Rogersmodell den Vorteil, daß es neben den bereits erwähnten Anwendungsmöglichkeiten des letzteren zum einen noch mehr Informationen über die untersuchte Bevölkerung "konserviert" und zum zweiten eine unmittelbare Verallgemeinerung auf Zeitintervalle und Altersklassen beliebiger Länge zuläßt.

Literatur

[1] P.H. Rees/A.G. Wilson. *Spatial Population Analysis.* London, Edward Arnold, 1977.

[2] P.H. Rees/A.G. Wilson. A Revised Notaion for Spatial Demographic Accounts and Models. *Environment and Planning, 5, 1973, 147.155.*

[3] P.H. Rees/A.G. Wilson. Accounts and Models for Spatial Demographic Analysis 1: Aggregate Populations. *Environment and Planning, 5, 1973, 61-90.*

[4] P.H. Rees/A.G. Wilson. Accounts and Models for Spatial Demographic Analysis 2: Age-Sex Disaggregated Populations. *Environment and Planning A, 6, 1974, 101-116.*

[5] P.H. Rees/A.G. Wilson. Accounts and Models for Spatial Demographic Analysis 3: Rates and Life Tables. *Environment and Planning A, 7, 1975, 199-231.*

[6] P.H. Rees/A.G. Wilson. Population Statistics and Spatial Demographic Accounts. *The Statistician, 23, 1974, 229-257*

[7] P.H. Leslie. On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika Vol. 33, Part III, 183-212, November 1945.*

[8] P.H. Leslie. Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics. *Biometika Vol. 35, Part III and IV, 213-245, December 1948.*

[9] A. Rogers. Matrix Methods of Population Analysis. *Journal of the American Institute of Planners, 32, 1966, 40-44.*

[10] A. Rogers. The Multiregional Growth Operator and the Stable Inter-Regional Age Structure. *Demography, 3, 1966, 537-544.*

[11] A. Rogers. Matrix Analysis of Inter-Regional Growth and Distribution. *Papers, Regional Science Association, 18, 1967, 177-196.*

[12] A. Rogers. A Regression Analysis of Inter-Regional Migration in California. *Review of Economics and Statistics, 49, 1967, 262-267.*

[13] A. Rogers. *Matrix Analysis of Inter-Regional Growth and Distribution.* Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1968.

[14] A. Rogers. *Matrix Methods in Urban and Regional Analysis.* San Francisco, Holden Day, 1971.

[15] A. Rogers. The Mathematics of Multi-Regional Demographic Growth. *Environment and Planning, 5, 3-29, 1973.*

[16] B. Herrchen. Verwendung demographischer Methoden zuf Erfassung und Analyse der Alters- und Mortalitätsstruktur einer Bevölkerung in der Ökonomie. *Diplomarbeit, Universität Dortmund, 1988*