

Pflaumer, Peter

Working Paper

Stationäre Bevölkerungen: Anwendungsmöglichkeiten
finanzmathematischer und demographischer Methoden zur
Analyse des Einflusses von Wanderungen auf die langfristige
Bevölkerungsentwicklung

Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 207

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Pflaumer, Peter (1993) : Stationäre Bevölkerungen: Anwendungsmöglichkeiten
finanzmathematischer und demographischer Methoden zur Analyse des Einflusses von
Wanderungen auf die langfristige Bevölkerungsentwicklung, Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 207,
Universität Konstanz, Sonderforschungsbereich 178 - Internationalisierung der Wirtschaft, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/101731>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen
Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle
Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich
machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

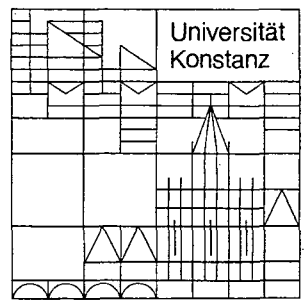
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen
(insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten,
gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort
genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal
and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to
exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the
internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content
Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise
further usage rights as specified in the indicated licence.*



**Sonderforschungsbereich 178
„Internationalisierung der Wirtschaft“**

Diskussionsbeiträge

Juristische
Fakultät

Fakultät für Wirtschafts-
wissenschaften und Statistik

Peter Pflaumer

Stationäre Bevölkerungen:
Anwendungsmöglichkeiten finanz-
mathematischer und demographischer
Methoden zur Analyse des Einflusses
von Wanderungen auf die langfristige
Bevölkerungsentwicklung

48 43 67

W113 (207)

Postfach 5560
D-78434 Konstanz

Serie II — Nr. 207
Juli 1993

325 458 677

STATIONÄRE BEVÖLKERUNGEN:

**Anwendungsmöglichkeiten finanzmathematischer und
demographischer Methoden zur Analyse des Einflusses von
Wanderungen auf die langfristige Bevölkerungsentwicklung**

Peter Pflaumer

Serie II - Nr. 207

Juli 1993

W 113 (207)



**Stationäre Bevölkerungen:
Anwendungsmöglichkeiten finanzmathematischer und demographischer Methoden zur Analyse des Einflusses von Wanderungen auf die langfristige Bevölkerungsentwicklung**

Peter Pflaumer

ZUSAMMENFASSUNG

Finanzmathematische und demographische Methoden werden präsentiert, um den Einfluß von Wanderungen auf die langfristige Bevölkerungsentwicklung zu präsentieren. Finanzmathematische Methoden berücksichtigen nicht die Altersstruktur einer Bevölkerung und können daher nur als Approximation verwendet werden. Die Approximation ist um so genauer, je weniger die in Frage kommenden Altersstrukturen von denen der stabilen Bevölkerung abweichen.

Im empirischen Teil werden quantitative bevölkerungspolitische Maßnahmen am Beispiel der Bevölkerung Deutschlands und der Weltbevölkerung beschrieben und analysiert. Das langfristige Ziel der quantitativen Bevölkerungspolitik lautet Nullwachstum. Während dieses Ziel in Entwicklungsländern im wesentlichen nur durch eine Reduzierung der Fertilität verwirklicht werden kann, ist es in Industrieländern, deren Fertilität unter dem Bestandserhaltungsniveau liegt, möglich, Stationarität der Bevölkerung durch Zuwanderung zu erreichen. Deutschland müßte unter den gemachten Annahmen zwischen 350.000 und 500.000 Zuwanderer pro Jahr aufnehmen, damit die Bevölkerung auf dem heutigen Stand bleibt. Zuwanderungen haben demographische Konsequenzen auf die Altersstruktur und die Zusammensetzung der Bevölkerung, die abschließend beschrieben werden.

SUMMARY

Methods from financial mathematics and demography are presented in order to investigate the influence of migration on the long-term population development. Methods from financial mathematics do not take the age structure of a population into consideration and can therefore only be used as an approximation. The less the age structures in question deviate from those of stable populations, the more exact the approximation will be.

In the empirical section quantitative measures for population policy are described and analyzed using the population of Germany and of the world as examples. The long-term goal of quantitative population policy is zero growth. Whereas in less developed countries, this goal can for the most part only be achieved by a reduction of fertility, it is possible in more developed countries with below-replacement fertility to achieve stationarity in the population by means of immigration. Under the assumptions made here, Germany would have to take in between 350,000 and 500,000 immigrants each year for the population to remain at the present level. Immigration has demographic consequences for the age structure and the composition of the population which will be described at the end.

A. EINLEITUNG

In den letzten beiden Jahrzehnten sind in allen Industrieländern die Geburtenzahlen stark zurückgegangen. Die Nettoreproduktionsrate ist beispielsweise in Deutschland auf etwa 0,7 abgesunken. Bei angenommener Fortdauer dieses generativen Verhaltens und ohne Zuwanderung würde nach der Jahrhundertwende ein rapider Bevölkerungsrückgang eintreten. Langfristig müßte mit einem negativen Wachstum von rund 1,3% jährlich gerechnet werden. Auf der anderen Seite hält in den meisten Entwicklungsländern das Bevölkerungswachstum unvermindert an. Die Zahl der Menschen stiege in den Entwicklungsländern bei unveränderter Fertilität auf über 55 Milliarden im Jahr 2100 (vgl. Lutz und Prinz, 1991). Selbst bei einem Fertilitätsrückgang wird die Bevölkerung in diesen Ländern die Zehn-Milliarden-Grenze mit großer Wahrscheinlichkeit überschreiten. Die Bevölkerungssituation der Welt kann auf folgende Formel gebracht werden: Bevölkerungswachstum mit einem überproportional großen Anteil jugendlicher Menschen in Entwicklungsländern und Bevölkerungsrückgang mit einem überproportional großen Anteil alter Menschen in Industrieländern. Die Konsequenzen sind vorhersehbar. Der Bevölkerungsdruck in Entwicklungsländern, die schlechte wirtschaftliche Situation aufgrund eines ungenügenden Arbeitsplatzangebotes führen zu verstärkten Wanderungsbewegungen in die wirtschaftlich besser gestellten Industrieländer. Der Bevölkerungsüberschuß einerseits und der Bevölkerungsrückgang andererseits lösen Wanderungsströme vom ärmeren Süden in Richtung reicheren Norden aus.

Es stellt sich die Frage einer quantitativen Bevölkerungspolitik, welche als die Gesamtheit aller zielgerichteten Maßnahmen auf die zahlenmäßige Entwicklung einer Bevölkerung und deren Altersstruktur verstanden werden soll. Langfristig heißt das bevölkerungspolitische Ziel Stationarität. Eine stationäre Bevölkerung ist eine Bevölkerung, die (im Mittel) weder wächst noch schrumpft.

Bevölkerungspolitische Maßnahmen können entweder die Fertilität oder die Migration versuchen zu beeinflussen. Nimmt man in Industrieländern die unter dem Bestanderhaltungsniveau liegende Fertilität als eine permanente Erscheinung an, so verhindert nur ein konstanter Immigrationsstrom langfristig einen Rückgang der Bevölkerung. Lautet das Ziel der Bevölkerungspolitik Stationarität, so muß die Höhe der jährlichen Nettoimmigration festgelegt werden. Eine konstante Zuwanderung hat langfristig Konsequenzen für die Altersstruktur der Gesamtbevölkerung und für die Zusammensetzung der in- und ausländischen Bevölkerungsgruppen. Diese Konsequenzen müssen dem Bevölkerungspolitiker bekannt sein. In den Entwicklungsländern müssen die Maßnahmen zur Erreichung einer stationären Bevölkerung in erster Linie auf eine Reduzierung der Geburten hinzielen, da durch Auswanderungen in realistischer Höhe das Bevölkerungswachstum allein nicht gebremst werden kann.

Zunächst werden einfache finanzmathematische Methoden präsentiert, um den Einfluß der Wanderungen auf die langfristige Bevölkerungsentwicklung zu analysieren. Finanzmathematische Methoden berücksichtigen nicht die Altersstruktur einer Bevölkerung. Sie können daher nur als erste Approximation verwendet werden. Genauere Resultate gewinnt man durch die demographische Analyse altersgegliederter Bevölkerungen, die der finanzmathematischen Analyse folgt. Die Approximation ist aber um so besser, je weniger die Altersstruktur einer Bevölkerung von der einer stabilen abweicht. Finanzmathematische Methoden haben jedoch den Vorteil, daß die grundlegenden Beweise, die im Zusammenhang mit Wanderungen und Bevölkerungsentwicklungen auftreten, elementar zu führen und leicht verständlich sind. Im empirischen Teil werden quantitative bevölkerungspolitische Maßnahmen am Beispiel der Bevölkerung Deutschlands und am Beispiel der Weltbevölkerung beschrieben und analysiert.

B. METHODEN

1. Finanzmathematische Methoden

Das Modell für die Bevölkerungsentwicklung lautet:

$$P_t = P_0 q^t,$$

wobei

P_t = Bevölkerungsbestand zum Zeitpunkt t

q = Wachstumsfaktor .

Bei einer wachsenden Bevölkerung ist $q > 1$ und bei einer schrumpfenden Bevölkerung ist $0 < q < 1$. Zwischen der stetigen Wachstumsrate r und dem Wachstumsfaktor q besteht folgende Beziehung:

$$q = e^r .$$

Bezeichnet man mit $x > 0$ die (konstante) Anzahl der Einwanderer am Ende einer Periode, so erhält man

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 q + x \\ P_2 &= P_1 q + x = P_0 q^2 + xq + x \\ &\vdots \\ P_t &= P_{t-1} q + x = P_0 q^t + xq^{t-1} + \dots + xq + x \end{aligned}$$

bzw.

$$P_t = P_0 q^t + x \frac{q^t - 1}{q - 1}, \quad \text{falls } q \neq 1$$

und

$$P_t = P_0 + t \cdot x, \quad \text{falls } q = 1.$$

Hierbei wird unterstellt, daß die Zuwanderer eine gleich hohe Fertilität und Mortalität haben wie die Bevölkerung des Einwanderungslandes. Diese Annahme ist sicher unrealistisch. An den Resultaten ändert sich grundlegend nichts, wenn man zumindest eine allmähliche Anpassung unterstellt. Eine allmähliche Anpassung an die inländischen Vitalitätsverhältnisse kann bei allen Einwanderungsgruppen festgestellt werden. Im empirischen Teil dieser Arbeit werden die Auswirkungen auf die Höhe der Bevölkerung bei einer verzögerten Fertilitätsanpassung untersucht werden.

Die Wachstumsrate berechnet sich zu

$$\frac{\frac{dP_t}{dt}}{P_t} = r_t = \frac{(P_0 + \frac{x}{q-1}) \ln q q^t}{P_0 q^t + x \frac{q^t - 1}{q-1}}.$$

Ist $q > 1$, so ist $r_t > 0$. Der Grenzwert lautet dann:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \ln q = r.$$

Zuwanderung in konstanter Höhe beeinflusst langfristig nicht das Wachstum der Bevölkerung im Einwanderungsland.

Ist $q < 1$, d.h. die Bevölkerung des Einwanderungslandes geht zurück, dann hängt die Wachstumsrate zunächst von der Höhe der Zuwanderung ab. Die Wachstumsrate beträgt

- $r_t > 0$, falls $\frac{x}{P_0} > 1 - q$ bzw. $x > (1 - q) P_0$
- $r_t = 0$, falls $\frac{x}{P_0} = 1 - q$ bzw. $x = (1 - q) P_0$
- $r_t < 0$, falls $\frac{x}{P_0} < 1 - q$ bzw. $x < (1 - q) P_0$.

Der Grenzwert lautet für $q < 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = 0.$$

Die Bevölkerung strebt gegen ein stationäres Niveau

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = P_s = \frac{x}{1-q} .$$

In einer stabil schrumpfenden Bevölkerung führt eine konstante Zahl von Immigranten pro Jahr letztlich zu einer stationären Bevölkerung, falls die Einwanderer sofort oder nach einer bestimmten Zeit das Reproduktionsverhalten des Einwanderungslandes übernehmen. Die Höhe der stationären Bevölkerung hängt nur von der Höhe der Immigration und den inländischen Fertilitäts- und Mortalitätsverhältnissen, die sich in q widerspiegeln, ab (vgl. Cerone, 1987; Espenshade/Bouvier/Arthur, 1982; Mitra, 1990).

Bezeichnet man mit l die Überlebensrate der Bevölkerung, so beträgt die Zahl der im Ausland geborenen Zuwanderer

$$x + xl + xl^2 + xl^3 + \dots = \frac{x}{1-l} , \text{ wobei } l < q < 1 .$$

Der Ausländeranteil der stationären Bevölkerung

$$\pi = \frac{\frac{x}{1-l}}{\frac{x}{1-q}} = \frac{1-q}{1-l}$$

ist von der Höhe der Zuwanderung x unabhängig.

Bei einer wachsenden Bevölkerung ($q > 1$) führt

$$2P_0 = P_0 q^d + x \frac{q^d - 1}{q - 1}$$

zur Verdopplungszeit

$$d = \frac{\ln \left(\frac{2(q-1) + \frac{x}{P_0}}{(q-1) + \frac{x}{P_0}} \right)}{\ln q} .$$

Ist $x=0$, so vereinfacht sich die Formel für die Verdoppelungszeit:

$$d = \frac{\ln 2}{\ln q} .$$

Bei einer schrumpfenden Bevölkerung im Einwanderungsland ($q < 1$) muß $x > 2(1-q)P_0$ bzw. $\frac{x}{P_0} > 2(1-q)$ sein, damit Zuwanderung eine Verdoppelung der Ausgangsbevölkerung bewirkt.

Die Gesamtbevölkerung setzt sich aus der ursprünglichen (alten) und der zugezogenen Bevölkerung mit ihren Nachkommen (neuen) zusammen:

$$P_t = P_0 q^t + x \frac{q^t - 1}{q - 1} = P_A + P_N .$$

Die alte Bevölkerung P_A stirbt langfristig aus ($q < 1$), während die neue Bevölkerung P_N allmählich auf ein stationäres Niveau ansteigt. Interessant ist der Zeitpunkt t^* , in welchem die beiden Bevölkerungsgruppen gleich groß sind. Setzt man $P_A = P_N$, so erhält man

$$t^* = - \frac{\ln \left(1 + \frac{P_0}{x} (1-q) \right)}{\ln q} .$$

Ist $\frac{x}{P_0} = (1-q)$ bzw. $r_t = 0$, dann ist

$$t^* = - \frac{\ln 2}{\ln q} .$$

Gleicht beispielsweise eine Bevölkerung mit einer negativen Wachstumsrate von 1% den Bevölkerungsrückgang durch Zuwanderung in Höhe $x = 0,01P_0$ aus, so ist nach 70 Jahren die neue Bevölkerung genau so hoch wie die alte.

Bei einer wachsenden Bevölkerung ($q > 1$) ist die Wachstumsrate der alten Bevölkerung

$$r_A = \ln q$$

und die Wachstumsrate der neuen Bevölkerung

$$r_{NB} = \ln q \left(\frac{q^t}{q^t - 1} \right) .$$

Langfristig strebt sie gegen $\ln q$, da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_{NB} = \ln q .$$

Die Wachstumsrate der Gesamtbevölkerung ist

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{\left(P_0 + \frac{x}{q-1} \right) \ln q q^t}{P_0 q^t + x \frac{q^t - 1}{q-1}} \\ &= \ln q \underbrace{\left(\frac{P_0 q^t}{P_t} \right)}_{\alpha_t: \text{Anteil der alten Bevölkerung}} + \ln q \left(\frac{q^t}{q^t - 1} \right) \underbrace{\frac{x \frac{q^t - 1}{q-1}}{P_t}}_{1 - \alpha_t: \text{Anteil der neuen Bevölkerung}} \end{aligned}$$

Die Wachstumsrate der Gesamtbevölkerung ist also ein gewogenes arithmetisches Mittel der Wachstumsraten der Teilbevölkerungen:

$$r_t = r_A \alpha_t + r_{tN} (1 - \alpha_t)$$

mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \ln q \alpha_t + \ln q (1 - \alpha_t) = \ln q .$$

Der Anteil der alten Bevölkerung γ hängt von der Höhe der (konstanten) Zuwanderung und von der Wachstumsrate im Inland ab. Es ist nämlich:

$$\gamma = \frac{P_0 q^t}{P_0 q^t + x \frac{q^t - 1}{q-1}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma = \frac{P_0 (q-1)}{P_0 (q-1) + x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{P_0 (q-1)}} ;$$

$$\frac{x}{P_0 (q-1)} = \frac{\text{Zuwanderung}}{\text{natürliches Wachstum}} .$$

Das stabile Äquivalent einer wachsenden Bevölkerung mit Zuwanderung in konstanter Höhe wird wie folgt definiert:

$$R_0 = \frac{P_t}{q^t} = P_0 + \frac{x}{q^t} \frac{q^t - 1}{q - 1}, \text{ falls } q > 1.$$

Für große t gilt:

$$R_0 \approx P_0 + \frac{x}{q - 1}.$$

Es folgt:

$$R_0 q^t = P_0 q^t + x \frac{q^t - 1}{q - 1} \approx \left(P_0 + \frac{x}{q - 1} \right) q^t.$$

Eine permanente Zuwanderung in Höhe von x wirkt wie eine einmalige Zuwanderung in Höhe von $\frac{x}{q-1}$ zum Zeitpunkt 0.

Ist $x > 0$ die (konstante) Anzahl der Auswanderer pro Periode, so erhält man als Bevölkerungsbestand einer wachsenden Bevölkerung ($q > 1$) zum Zeitpunkt t

$$P_t = P_0 q^t - x \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Die Wachstumsrate

$$r_t = \frac{\left(P_0 - \frac{x}{q-1} \right) \ln q q^t}{P_t}$$

ist

- a) $r_t > 0$, falls $\frac{x}{P_0} < (q-1)$ bzw. $x < (q-1) P_0$
- b) $r_t = 0$, falls $\frac{x}{P_0} = (q-1)$ bzw. $x = (q-1) P_0$
- c) $r_t < 0$, falls $\frac{x}{P_0} > (q-1)$ bzw. $x > (q-1) P_0$.

Der Grenzwert lautet (Fall a):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \ln q.$$

(Im Falle c) bedeutet eine konstante Wachstumsrate negative Bevölkerungsbestände. Es ist offensichtlich, daß langfristig die Auswanderung nicht größer als das natürliche Wachstum sein kann.)

Ist $x = (q-1)P_0$, so geht die stabil wachsende Bevölkerung in eine stationäre Bevölkerung über:

$$P_t = P_0 q^t - (q-1) P_0 \frac{q^t - 1}{q - 1} = P_0.$$

Auswanderung in konstanter Höhe hat langfristig keinen Einfluß auf die Wachstumsrate einer wachsenden Bevölkerung, falls $x < (q-1)P_0$. Auswanderung in konstanter Höhe wirkt vielmehr wie eine einmalige Reduzierung der Bevölkerung zum Zeitpunkt 0, da

$$P_0 q^t - x \frac{q^t - 1}{q - 1} \approx \left(P_0 - \frac{x}{q-1} \right) q^t.$$

Teilt man die Weltbevölkerung in die Bevölkerung der Industrieländer mit $q_I < 1$ und die Bevölkerung der Entwicklungsländer mit $q_E > 1$, so geht in Industrieländern die Bevölkerung permanent zurück, während sie in Entwicklungsländern laufend steigt.

Ohne Wanderungsbewegungen zwischen den beiden Blöcken explodiert die Weltbevölkerung bei gleichzeitigem Rückgang der Bevölkerung in Industrieländern. Es stellt sich die Frage, wie hoch die Wanderungsströme von Entwicklungsländern zu den Industrieländern sein müßten, damit die Weltbevölkerung einen stationären Zustand erreicht (vgl. auch Bouvier/Espenshade, 1989).

Die Wachstumsrate der Bevölkerung in den Entwicklungsländern ist Null, wenn

$$x = (q_E - 1)P_0^E .$$

Eine Zuwanderung in dieser Höhe führt bei den Industrieländern zu einer stationären Bevölkerung

$$P_S^I = \frac{x}{1 - q_I} = - \frac{1 - q_E}{1 - q_I} P_0^E .$$

Das stationäre Niveau der Weltbevölkerung beträgt

$$P_S = P_0^E + P_S^I = \frac{q_E - q_I}{1 - q_I} \cdot P_0^E .$$

Beispiel:

$$P_0^E = 4 \text{ Mrd.}$$

$$q_E = 1,018$$

$$q_I = 0,99$$

→ $P_S^I = - \frac{-0,018}{0,01} \cdot 4 \text{ Mrd.} = 7,2 \text{ Mrd.}$

→ $P_S = 11,2 \text{ Mrd.}$

Das Beispiel verdeutlicht, daß Wanderungen kein geeignetes Mittel sein können, Bevölkerungswachstum auf der Welt nachhaltig zu bremsen. Eine stationäre Weltbevölkerung kann bei gegebenen Mortalitätsverhältnissen nur durch einen Rückgang der Fertilität erreicht werden. Selbst bei einer Bereitschaft der Industrieländer, derart hohe Wanderungsströme aufzunehmen, ist es zweifelhaft, ob sich Stationarität einstellen würde, da bei massiver Zuwanderung die Annahme eines sofortigen oder allmählichen Fertilitätsrückgangs nicht mehr gelten würde.

2. Zeit-diskrete demographische Modelle

Das Projektionsmodell läßt sich formal wie folgt darstellen, wobei man sich auf den weiblichen Teil der Bevölkerung beschränkt:

$$\begin{aligned} n_1 &= L n_0 + w \\ n_2 &= L n_1 + w = L^2 n_0 + Lw + Iw \\ &\vdots \\ n_t &= L^t n_0 + L^{t-1}w + \dots + Lw + Iw \end{aligned}$$

bzw.

$$n_t = L^t n_0 + (I-L)^{-1} (I-L^t)w .$$

Der Vektor n_t repräsentiert die Anzahl der Frauen in den einzelnen Altersklassen zum Zeitpunkt t . L ist die Projektions- bzw. Leslie-Matrix, welche in der ersten Zeile Fruchtbarkeitsraten und in der Subdiagonalen Überlebensraten enthält.

w ist der Vektor der konstanten Nettoimmigration.

I ist die Einheitsmatrix. Details zur Berechnung der Elemente der Projektionsmatrix sind beispielsweise Keyfitz (1977) oder Pflaumer (1988) zu entnehmen.

Die Ähnlichkeit zwischen demographischem altersgliederten Modell und finanzmathematischem nicht-altersgegliederten Modell ist offensichtlich.

Zur Untersuchung der theoretischen Eigenschaften des Projektionsprozesses wird sich auf eine Leslie-Matrix L beschränkt, welche nur die fruchtbaren Altersklassen umfaßt. Bei 15-Jahresklassen hat L folgendes Aussehen:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_i &: \text{Fruchtbarkeitsraten} & (b_i > 0) \\ s_i &: \text{Überlebensraten} & (0 < s_i \leq 1) \end{aligned}$$

Mit dieser Matrix kann die Bevölkerung in 15-Jahresschritten projiziert werden.

Es ist leicht zu zeigen, daß

$$\det L = s_1 \cdot s_2 \cdot b_3$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_2} \\ \frac{1}{b_3} & -\frac{b_1}{s_1 b_3} & -\frac{b_2}{s_2 b_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(I - L) &= 1 - b_1 - s_1 \cdot b_2 - s_1 \cdot s_2 \cdot b_3 \\ &= 1 - R_0 \\ \text{mit } R_0 &= b_1 + s_1 \cdot b_2 + s_1 \cdot s_2 \cdot b_3 .\end{aligned}$$

R_0 ist die Nettoreproduktionsrate, welche die durchschnittliche Anzahl der Töchter angibt, die eine Frau im Laufe ihres Lebens unter Berücksichtigung der Sterblichkeit gebiert.

Die Eigenwerte λ_i von L erhält man durch Lösen des folgenden charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^3 - b_1 \lambda^2 - s_1 \cdot b_2 \lambda - s_1 \cdot s_2 \cdot b_3 = 0 .$$

Da es sich bei L um eine irreduzible, primitive Matrix handelt, existiert ein positiver Eigenwert, der dem Betrage nach größer ist als alle anderen Eigenwerte (vgl. Huppert, 1990).

Der positive Eigenwert λ_1 ist langfristig der Wachstumsfaktor der Bevölkerung pro Projektionsschritt. Der zu λ_1 gehörende Eigenvektor δ_1 enthält nur positive Elemente und reflektiert die Altersstruktur der stabilen Bevölkerung. Es ist

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \cdot \lambda^{-1} \\ s_2 \cdot s_2 \cdot \lambda^{-2} \end{pmatrix} .$$

Der Eigenwert λ_1 läßt sich nicht allgemein angeben. Aber zwischen Eigenwert λ_1 und Nettoreproduktionsrate R_0 besteht folgender Zusammenhang (vgl. etwa Keyfitz, 1977):

$$\begin{aligned}\lambda_1 > 0 &\leftrightarrow R_0 > 1 \\ \lambda_1 = 0 &\leftrightarrow R_0 = 1 \\ \lambda_1 < 0 &\leftrightarrow R_0 < 1 .\end{aligned}$$

Die stabile Wachstumsrate berechnet sich zu

$$r = \frac{\ln \lambda_1}{T}$$

(T = Projektionsschritt bzw. Länge einer Altersklasse).

Approximativ kann die stabile Wachstumsrate durch die Beziehung

$$r \approx \frac{\ln R_0}{m}$$

bestimmt werden, wobei m der mittlere Generationenabstand ist (vgl. Keyfitz, 1977).

Zur Berechnung der Potenzen von L ist es zweckmäßig, die Leslie-Matrix zu diagonalisieren, d.h.

$$L = Q D Q^{-1} ,$$

wobei D auf der Hauptdiagonalen die Eigenwerte und Q die entsprechenden Eigenvektoren von L enthält.

Nun lassen sich die Potenzen leicht berechnen. Es gilt nämlich:

$$L^t = Q D^t Q^{-1},$$

falls Q^{-1} existiert.

Ein Beispiel soll die Zusammenhänge verdeutlichen:

Folgende Projektionsmatrix, welche die Verhältnisse in Deutschland widerspiegelt, sei gegeben:

$$L \equiv \begin{pmatrix} 0,2 & 0,45 & 0,1 \\ 0,995 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Nettoerproduktionsrate beträgt $R_0 = 0,7463$. Der Bestandsvektor der weiblichen Bevölkerung in Altersklassen von 15 Jahren sei:

$$n_0 = \begin{pmatrix} 5456,8 \\ 6889,2 \\ 6373,7 \end{pmatrix}.$$

Man erhält die Eigenwerte von L durch Lösen des folgenden charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^3 - 0,2 \lambda^2 - 0,4475 \lambda - 0,098505 = 0.$$

Die Eigenwerte stehen in der Matrix D :

$$D = \begin{pmatrix} 0,857 & 0 & 0 \\ 0 & -0,328 - 0,084i & 0 \\ 0 & 0 & -0,328 + 0,084i \end{pmatrix}.$$

Die Matrix Q sieht wie folgt aus:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1,161 & -2,847 + 0,729i & -2,847 - 0,729i \\ 1,341 & 7,535 - 4,13i & 7,535 + 4,13i \end{pmatrix}.$$

Das Projektionsmodell ohne Berücksichtigung von Wanderungen lautet für das Beispiel mit Hilfe der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} n_t &= L^t n_0 = Q D^t Q^{-1} n_0 \\ &= 0,857^t \cdot 5589,67 \begin{pmatrix} 1 \\ 1,161 \\ 1,341 \end{pmatrix} + 0,339^t \begin{pmatrix} -132,9 \cos 2,89t - 29,3 \sin 2,89t \\ 399,6 \cos 2,89t - 13,5 \sin 2,89t \\ 328,11 \sin 2,89t - 1122 \cos 2,89t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Gesamtbevölkerung P_t entwickelt sich nach

$$P_t = 0,857^t \cdot 19575 + (285,3 \sin 2,89t - 855,3 \cos 2,89t) \cdot 0,339^t.$$

Die Bevölkerung folgt einem geometrischen Trend mit abnehmenden Schwingungen.

Langfristig lässt sich die Bevölkerungsentwicklung durch ein geometrisches Trendmodell (vgl. finanzmathematisches Modell) abbilden, d.h.

$$P_t = 19575 \cdot 0,857^t$$

bzw.

$$P_t = P_0 \lambda^t,$$

wobei P_0 das stabile Äquivalent ist.

Der Eigenvektor von λ_1

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,161 \\ 1,341 \end{pmatrix}$$

der Matrix L bestimmt die Altersstruktur der stabilen Bevölkerung.

Die Bevölkerung geht alle 15 Jahre um den Faktor 0,857 zurück. Die stabile Wachstumsrate ist demnach

$$r = \frac{\ln 0,857}{15} = -0,010.$$

Über die Nettoerproduktionsrate erhält man als stabile Wachstumsrate

$$r \approx \frac{\ln 0,7463}{27,5} = -0,011.$$

Unter Einbeziehung des Zuwanderungsvektors

$$w = \begin{pmatrix} 750 \\ 1200 \\ 495 \end{pmatrix}$$

lautet das Projektionsmodell

$$\begin{aligned} n_t &= Q D^t Q^{-1} n_0 + (I - Q D Q^{-1})^{-1} (I - Q D^t Q^{-1}) w \\ &= 0,857^t \cdot 5589,67 \begin{pmatrix} 1 \\ 1,161 \\ 1,341 \end{pmatrix} + 0,339^t \begin{pmatrix} -132,9 \cos 2,89t - 29,3 \sin 2,89t \\ 399,6 \cos 2,89t - 13,5 \sin 2,89t \\ 328,11 \sin 2,89t - 1122 \cos 2,89t \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 5747,11 \\ 6918,37 \\ 7344,20 \end{pmatrix} - 0,857^t \begin{pmatrix} 5808,72 \\ 6745,66 \\ 7794 \end{pmatrix} + 0,339^t \begin{pmatrix} 61,62 \cos 2,89t - 3,65 \sin 2,89t \\ 54,35 \sin 2,89t - 172,7 \cos 2,89t \\ 49,78 \cos 2,89t - 280,16 \sin 2,89t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$P_t = -773,3 \cdot 0,857^t + (55,86 \sin 2,89t - 516,60 \cos 2,89t) \cdot 0,339^t + 20009,7.$$

Langfristig schrumpft die alte Bevölkerung und es baut sich eine neue Bevölkerung auf:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_t = \begin{pmatrix} 5747,11 \\ 6918,37 \\ 7344,20 \end{pmatrix}.$$

Ist δ_1 der Eigenvektor von λ_1 , so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} n_t &= (I - L)^{-1} \delta_1 = \frac{1}{1 - \lambda_1} \delta_1 = \frac{1}{1 - 0,857} \delta_1 \\ &= 6,993 \delta_1. \end{aligned}$$

Hat die Altersstruktur der Zuwanderer also die Altersstruktur der stabil schrumpfenden Bevölkerung ohne Wanderungen, so gleichen sich die Altersstrukturen der stationären und der stabil schrumpfenden Bevölkerung. Die stationäre Bevölkerung ist etwa siebenmal so groß wie die Summe der Einwanderungen in 15 Jahren.

In der Regel ist die Altersstruktur der Zuwanderer jung, so daß die Altersstruktur der stationären Bevölkerung im allgemeinen jünger ist als die Altersstruktur der stabilen Bevölkerung, die sich einstellt, falls keine Wanderungen erfolgen.

Die stationäre Bevölkerungszahl kann approximativ durch

$$P_s = \frac{x_{15}}{1 - 0,857} \quad (15\text{-Jahres-Schritte})$$

bzw.

$$P_s = \frac{x_1}{1 - 0,857^{1/5}} = \frac{x_1}{1 - 0,99} \left(= \frac{x_1}{1 - q} \right) \quad (1\text{-Jahres-Schritt})$$

berechnet werden, wobei x_{15} die Zuwanderung während 15 Jahren und x_1 die Zuwanderung während eines Jahres darstellt.

Die Approximation ist aber nur dann gut, wenn die Altersstruktur der Einwanderer nicht zu sehr von der Altersstruktur der stabil schrumpfenden Bevölkerung ohne Wanderungen abweicht. In der Praxis ist diese Annahme nicht erfüllt.

Es gilt nämlich, falls $\lambda_1 < 1$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_t = (I - L)^{-1} w = (I + L + L^2 + L^3 + \dots)w$$

mit

$$(I - L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - R_0} & \frac{b_2 + s_2 \cdot b_3}{1 - R_0} & \frac{b_3}{1 - R_0} \\ \frac{s_1}{1 - R_0} & \frac{1 - b_1}{1 - R_0} & \frac{s_1 \cdot b_3}{1 - R_0} \\ \frac{s_1 \cdot s_2}{1 - R_0} & \frac{s_2(1 - b_1)}{1 - R_0} & \frac{1 - b_1 - s_1 \cdot b_2}{1 - R_0} \end{pmatrix}.$$

Die Altersstruktur der stationären Bevölkerung ist, wie die folgende Übersicht zeigt, ein gewogenes arithmetisches Mittel der Spalten von $(I - L)^{-1}$, wobei die Gewichte die Zuwanderungen in den einzelnen Altersklassen sind. Je älter die Altersstruktur der Zuwanderer ist, um so älter ist die Altersstruktur der stationären Bevölkerung und um so kleiner ist die Höhe der stationären Bevölkerung, da der reproduktive Wert von älteren Zuwanderern geringer ist als der von jüngeren.

Übersicht: Aufbau einer stationären Bevölkerung

Die Zuwanderungsvektoren

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergeben folgende stationäre Bevölkerungen:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \frac{1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots}{s_1(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)} \\ \frac{s_1 s_2(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)}{s_1(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,941 \\ 3,921 \\ 3,882 \end{pmatrix}$$

$$\text{stationärer Bevölkerungsbestand: } 11,744; \quad \text{relative Altersstruktur: } \begin{pmatrix} 0,336 \\ 0,334 \\ 0,330 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} \frac{(b_2 + s_2 b_3)(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)}{(1 - b_1)(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)} \\ \frac{s_2(1 - b_1)(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)}{(1 - b_1)(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,164 \\ 3,153 \\ 3,121 \end{pmatrix}$$

$$\text{stationärer Bevölkerungsbestand: } 8,438; \quad \text{relative Altersstruktur: } \begin{pmatrix} 0,256 \\ 0,374 \\ 0,370 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} \frac{b_3(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)}{s_1 \cdot b_3(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)} \\ \frac{(1 - b_1 - s_1 b_2)(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)}{s_1 \cdot b_3(1 + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + \dots)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,394 \\ 0,392 \\ 1,388 \end{pmatrix}$$

$$\text{stationärer Bevölkerungsbestand: } 2,174; \quad \text{relative Altersstruktur: } \begin{pmatrix} 0,181 \\ 0,180 \\ 0,638 \end{pmatrix}$$

Stationäre Bevölkerung des Ausgangsbeispiels:

$$750 \begin{pmatrix} 3,941 \\ 3,921 \\ 3,882 \end{pmatrix} + 1200 \begin{pmatrix} 2,164 \\ 3,153 \\ 3,121 \end{pmatrix} + 495 \begin{pmatrix} 0,394 \\ 0,392 \\ 1,388 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5747,11 \\ 6918,37 \\ 7344,20 \end{pmatrix}$$

$$\text{stationärer Bevölkerungsbestand: } 20.009,68; \quad \text{relative Altersstruktur: } \begin{pmatrix} 0,287 \\ 0,346 \\ 0,367 \end{pmatrix}$$

Ist λ_i ein Eigenwert von L , so ist $1-\lambda_i$ ein Eigenwert von $I-L$ bzw. $\frac{1}{1-\lambda_i}$ ein Eigenwert von $(I-L)^{-1}$. Daher gilt für den Eigenvektor δ_i

$$(I-L)^{-1} \delta_i = \frac{1}{1-\lambda_i} \delta_i.$$

Der Aufbau der im Ausland geborenen Zuwanderer ist durch

$$\begin{aligned} m_1 &= M m_0 + w \\ m_2 &= M m_1 + w = M^2 m_0 + M w + w \\ &\vdots \\ m_t &= M^t m_0 + (I-M)^{-1} (I-M^t) w \end{aligned}$$

gegeben, wobei

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix der Überlebensraten und

$$m_0 = w$$

ist.

Für das vorliegende Beispiel ergibt sich folgender stationärer Altersaufbau der Ausländer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = (I-M)^{-1} w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ s_1 \cdot s_2 & s_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,995 & 0 & 0 \\ 0,98505 & 0,99 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 750 \\ 1200 \\ 495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 1946,25 \\ 2421,78 \end{pmatrix}.$$

Zwischen absolutem und relativem Altersaufbau der Zuwanderer besteht folgender Zusammenhang:

$$w = k w^*$$

mit

$$w^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix} \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum \alpha_i = 1.$$

k gibt die Anzahl der Zuwanderer pro Periode an.

Der Ausländeranteil = $\frac{\text{Im Ausland geborene Zuwanderer}}{\text{Gesamtbevölkerung}}$ der stationären Bevölkerung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \pi &= [e' (I-M)^{-1} k \cdot w^*] [e' (I-L)^{-1} k w^*]^{-1} \\ &= [e' (I-M)^{-1} w^*] [e' (I-L)^{-1} w^*]^{-1} = 0,256 \\ &\text{mit } e' = (1,1,\dots,1) \end{aligned}$$

und ist von der Höhe der Zuwanderer pro Periode unabhängig (vgl. Mitra, 1987; Feichtinger/Steinmann, 1992).

Besonders einfach berechnet sich der Ausländeranteil, wenn alle Zugänge in der ersten Altersgruppe erfolgen, d.h. $\alpha_1=1$ ist:

$$\pi = \frac{1 + s_1 + s_1 \cdot s_2}{\frac{1}{1-R_0}(1 + s_1 + s_1 \cdot s_2)} = 1 - R_0 ,$$

wobei $R_0 < 1$.

Das asymptotische Verhalten der Bevölkerung ist unabhängig von der Ausgangsbevölkerung und wird nur durch die Leslie-Matrix, d.h. durch die Fertilitäts- und Mortalitätsraten bestimmt. Die Altersstruktur der projizierten Bevölkerung nähert sich asymptotisch einer stabilen Altersstruktur. Dies ist der Inhalt des Theorems von der starken Ergodizität in der Demographie.

Das Projektionsmodell führt aber nur zu einer stabilen Altersverteilung, wenn L eine irreduzible, primitive Matrix ist. L ist eine $n \times n$ -Matrix und ist primitiv, wenn $L^k > 0$ für alle $k \geq n^2 - 2n + 2$ (vgl. Huppert, 1990, S. 372). L ist dann primitiv, wenn es zwei aufeinander folgende fruchtbare Altersklassen gibt (vgl. etwa Pollard, 1973).

Bei der folgenden Leslie-Matrix handelt es sich um eine reduzible, aber nicht-primitive Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von L betragen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

Der positive Eigenwert λ_1 ist dem Betrage nach nicht größer als die beiden anderen Eigenwerte. Unter Berücksichtigung des Bestandsvektors

$$n_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

läßt sich das Projektionsmodell nach der Diagonalisierung mit Hilfe der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen schließlich wie folgt darstellen:

$$P_t = 5,7735 \sin 2,09439t + 100 .$$

Die Bevölkerung schwingt mit konstanten Schwingungen um 100.

Die Entwicklung der altersgegliederten Bevölkerung ist in nachstehender Tabelle ersichtlich.

t	0	1	2	3	...
0-15	50	40	30	50	
15-30	30	50	40	30	
30-45	20	15	25	20	
	100	105	95	100	

Die Projektionsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 0,7937$$

$$\lambda_2 = -0,3969 - 0,6874i$$

$$\lambda_3 = -0,3969 + 0,6874i$$

führt unter Berücksichtigung obigen Bestandsvektors zu folgender Bevölkerungstrajektorie:

$$P_t = 100,779 \cdot 0,7937^t + (6,841 \sin 2,0947t - 0,7791 \cos 2,0947t) \cdot 0,7937^t.$$

Es handelt sich um eine sinkende Bevölkerung mit abnehmenden Zyklen.

t	0	1	2	3	...
0-15	50	20	15	25	
15-30	30	50	20	15	
30-45	20	15	25	10	
	100	85	60	50	

Die Altersstruktur ist ebenfalls einem Zyklus unterworfen.

Im letzten Fall würde ein konstanter jährlicher Einwanderungsstrom zu einer stationären Bevölkerung führen, da die Zyklen abnehmen.

Zum Schluß dieses Abschnittes soll die Zahl der Auswanderer bei vorgegebener Altersstruktur bestimmt werden, die notwendig ist, damit eine wachsende Bevölkerung in eine stationäre übergeht. Die Projektionsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,6 & 1,1 & 0,12 \\ 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,95 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1,37454 \\ \lambda_2 &= -0,661746 \\ \lambda_3 &= -0,112796\end{aligned}$$

ist typisch für Vitalitätsverhältnisse in Entwicklungsländern. Die stabile Wachstumsrate liegt bei etwa 2,1% pro Jahr.

Ausgehend von dem Bestandsvektor

$$n_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 340 \\ 210 \end{pmatrix}$$

kann die Bevölkerungsentwicklung durch

$$n_t = 1,374^t \begin{pmatrix} 474,70 \\ 310,81 \\ 214,82 \end{pmatrix} + 0,662^t \begin{pmatrix} 25,36 \\ -34,49 \\ 49,52 \end{pmatrix} + 0,113^t \begin{pmatrix} -0,67 \\ 5,31 \\ -44,70 \end{pmatrix}$$

wiedergegeben werden.

Unter Berücksichtigung des Fortwanderungsvektors

$$w = -k \begin{pmatrix} 23 \\ 46 \\ 31 \end{pmatrix} \text{ mit } k \geq 0$$

kann die langfristige Bevölkerungsentwicklung durch

$$n_t \approx 1,374^t \begin{pmatrix} 474,70 - 108,75k \\ 310,81 - 71,21k \\ 214,82 - 49,21k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 119,208 \\ 61,2878 \\ 27,2235 \end{pmatrix}$$

approximiert werden.

Die langfristige Bevölkerungsentwicklung hängt vom Faktor k ab, der die Höhe des Fortzugs reguliert. Ist $k=4,365$, so stellt sich eine stationäre Bevölkerung ein:

$$n_s = 4,365 \begin{pmatrix} 119,208 \\ 61,2878 \\ 27,2235 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 520 \\ 268 \\ 119 \end{pmatrix}.$$

Ist $k > 4,365$, dann ist die Anzahl der Fortzüge größer als das natürliche Bevölkerungswachstum. Die Bevölkerung des Auswanderungslandes geht zurück. In der Realität ist eine solche Situation langfristig aber nicht möglich. Falls $k < 4,365$ ist, steigt die Bevölkerung des Auswanderungslandes langfristig mit derselben Wachstumsrate weiter.

Die permanente Auswanderung in konstanter Höhe hat einen erheblichen Einfluß auf die Altersstruktur des Auswanderungslandes, wie folgende Tabelle verdeutlicht:

Altersstrukturen

	Ausgangsbevölkerung	Fortzüge	stabile Bevölkerung (keine Fortzüge)	stationäre Bevölkerung (Fortzüge)
0-15	0,45	0,23	0,475	0,573
15-30	0,34	0,40	0,310	0,296
30-45	0,21	0,31	0,215	0,131
	1	1	1	1

Ist die Altersstruktur der Fortzüge identisch mit der der stabilen Bevölkerung, so strebt die Altersstruktur der sich ergebenden stationären Bevölkerung gegen die der stabilen Bevölkerung. Die stationäre Bevölkerungszahl ist 1000. Die Zahl der Auswanderer pro Periode ist im o.a. Beispiel $1,374 \cdot 1000 - 1000 = 374$.

C. EMPIRISCHE ERGEBNISSE

1. Stationäre Bevölkerung in Deutschland

Seit Mitte der sechziger Jahre ist in Deutschland die Nettoreproduktionsrate kontinuierlich gesunken. Sie schwankt derzeit um 0,7. Ohne Zuwanderung würde die Bevölkerung jede Generation langfristig um etwa 30% abnehmen; dies bedeutet jährlich einen Rückgang von 1,3%. Die Abweichung der tatsächlichen Wachstumsrate von der stabilen ist zum einem durch Altersstruktureffekte und zum anderen durch Einwanderungsüberschüsse zu erklären. Die geburtenstarken Kohorten der sechziger Jahre kommen in ihre reproduktive Phase und tragen dadurch zu einer Verminderung des Bevölkerungsrückgangs bei. Langfristig kann aber ein Bevölkerungsrückgang bei unveränderter Fertilität nur durch einen Einwanderungsüberschuß verhindert werden. Seit Mitte der fünfziger Jahre ist Deutschland de facto ein Einwanderungsland. Die Zuwanderung italienischer Gastarbeiter begann Ende 1955. Danach folgten Gastarbeiter aus Spanien, Griechenland, Portugal, Jugoslawien und der Türkei. Im Jahre 1970 verzeichnete man mit fast einer Million Zuzüge einen absoluten Höhepunkt. Erst mit dem Anwerbestopp von 1973 ging die Zahl der Zuzüge deutlich zurück. Während seit Anfang der achtziger Jahre die Zuwanderungen aus den traditionellen Gastarbeiterländern gesunken ist, nahm die Zuzüge von Ausländern, die Asyl suchen, vor allem aus Osteuropa und Asien, erheblich zu. Aufgrund der politischen Umwälzungen in Osteuropa hat die Zahl der Aus- und Übersiedler ebenfalls einen starken Anstieg erfahren. Ende 1989 betrug der Ausländeranteil etwa 7,8 % .

Im folgenden wird der Frage nachgegangen, wieviele Zuwanderer Deutschland pro Jahr braucht, um eine stationäre Bevölkerung von etwa 40 Millionen Frauen zu erreichen. Da die Altersstrukturen der inländischen Bevölkerung und der Zuzüge erheblich von der stabilen Altersstruktur abweichen, kann die Frage nicht mit den Faustformeln des letzten Abschnittes beantwortet werden. Daher werden Bevölkerungsprojektionen mit dem Leslie-Modell durchgeführt.

Ausgangspunkt der Projektion ist die nach Alter und Geschlecht aufgegliederte weibliche Wohnbevölkerung in Deutschland im Jahr 1990. (vgl. Abb. 1). Die Projektion erfolgt in Fünf-Jahres-Schritten. Für die inländische Bevölkerung wird eine Nettoreproduktionsrate von 0,7 unterstellt. Die Altersstruktur der Zuzüge (vgl. Abb.1) entspricht der typischen Altersstruktur der Gastarbeiterzuzüge in den achtziger Jahren. (vgl. Pflaumer, 1992). Zunächst wird angenommen, daß Zuwanderer und inländische Bevölkerung die gleichen Mortalitäts- und Fertilitätsraten haben.

Die Projektionsergebnisse besagen, daß etwa 253.000 (weibliche) Zuwanderer pro Jahr notwendig sind, damit sich eine (weibliche) stationäre Bevölkerung von 40 Millionen einstellt. Die Zahl der notwendigen Zuwanderer liegt weit unter der, die sich mit Hilfe finanzmathematischer Formeln ergeben würde. Der Unterschied ist durch die junge Altersstruktur der Zuwanderer zu erklären. Trotz der jungen Altersstruktur der Zuwanderer weist die stationäre Bevölkerung die typische Urnenform einer schrumpfenden Bevölkerung auf (vgl. Abb. 1). Diese ist zwar jünger als die stabile Altersstruktur, die sich ohne Zuwanderung ergeben würde, aber älter als die Altersstruktur der Sterbetafelbevölkerung. Einige wichtige Kennzahlen für die Altersstrukturen verschiedener Bevölkerungen sind der Tabelle 1 zu entnehmen.

Tab. 1: Altersstruktur-Kennzahlen

	Wohnbevölkerung 1990	Zuwanderer	Stationäre Bevölke- rung	Stabile Bev. ohne Zuwand.
Alterslastquotient	0,444	0,108	0,535	0,743
Jugendlastquotient	0,374	0,649	0,375	0,344
Gesamlastquotient	0,818	0,757	0,909	1,087

In Abb. 2 ist die Entwicklung der ursprünglichen (alten) und die der zugezogenen Bevölkerung mit ihren Nachkommen (neuen Bevölkerung) zu sehen. Schon im Jahr 2060 sind die beiden Bevölkerungsgruppen gleich hoch. Die Zahl der Zuwanderer, die im Ausland geboren worden sind, beläuft sich auf ungefähr 13,76 Millionen; ihre Altersstruktur ist in Abb. 1 dargestellt. Bezieht man die im Ausland geborenen Zuwanderer auf den stationären Bevölkerungsbestand von 40 Millionen, so errechnet sich ein Ausländeranteil von rund 34,3%. Ausländeranteile der stationären Bevölkerung in den einzelnen Altersklassen sind in Abb. 3 dargestellt.

Abb. 4 zeigt die zeitliche Entwicklung des Alterslast- und des Jugendlastquotienten. Der Alterslastquotient wird ab 2020 stark zunehmen, da die geburtenstarken Jahrgänge der sechziger Jahre in das Rentenalter gelangen. Der Alterslastquotient ist ein Indikator für die finanzielle Belastung des Systems der sozialen Alterssicherung. Trotz Zuwanderung mit junger Altersstruktur steigt der Alterslastquotient. Langfristig ist der Alterslastquotient von der Höhe der Zuwanderer unabhängig, da sich eine stationäre Bevölkerung einstellt. Kurzfristig und mittelfristig hängt die Entwicklung des Alterslastquotienten aber von der Zahl der jährlichen Zuwanderer ab (vgl. etwa Pflaumer, 1991). Je höher diese ist, um so geringer ist der Alterslastquotient. In diesem Zusam-

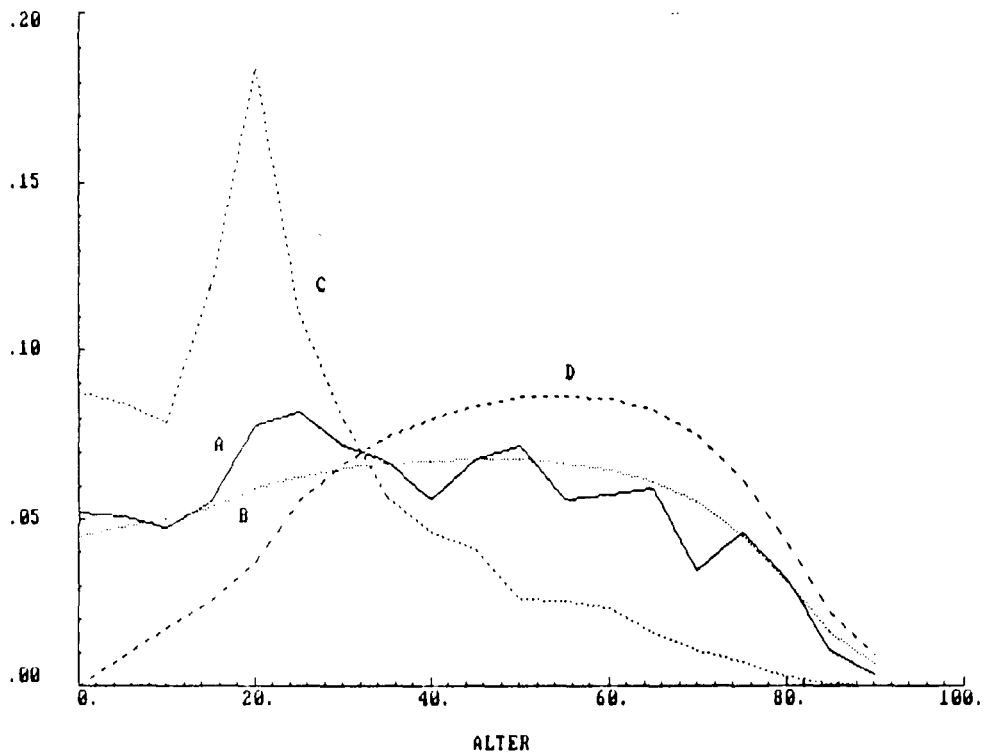


Abb.1: Altersstruktur der Wohnbevölkerung 1990 (A), der stationären Bevölkerung (B), der Ausländer in der stationären Bevölkerung (D) und der jährlichen Zuzüge (C)

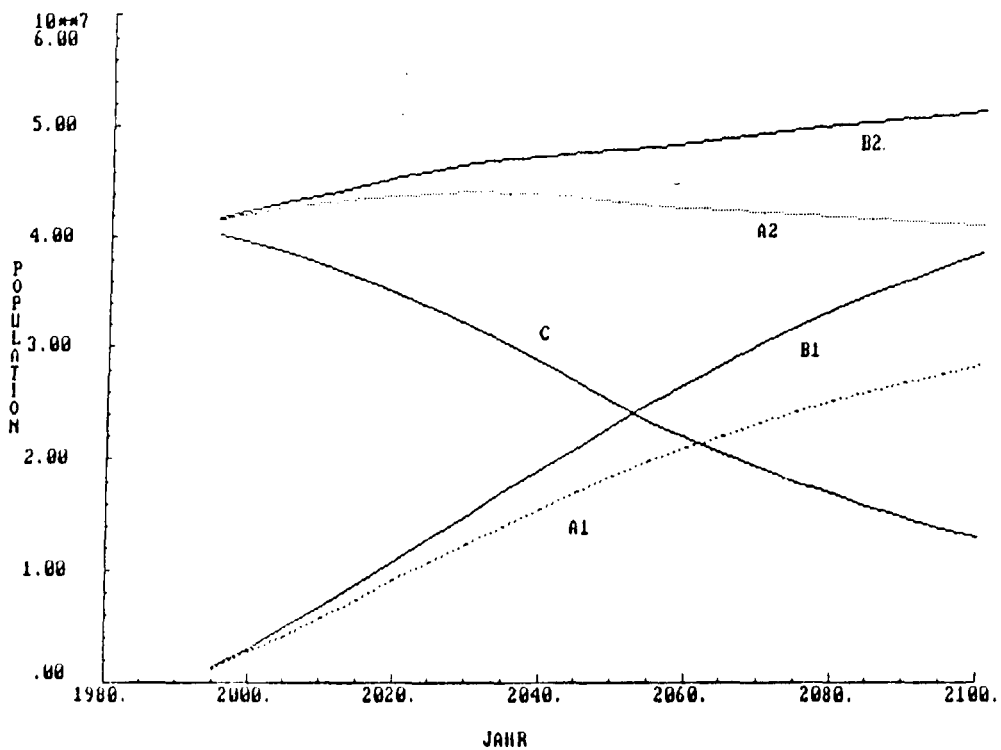


Abb.2: Entwicklung der Gesamt- (A2, B2), der neuen (A1, B1) und der alten Bevölkerung (C) bei unterschiedlicher Fertilität der Zuwanderer

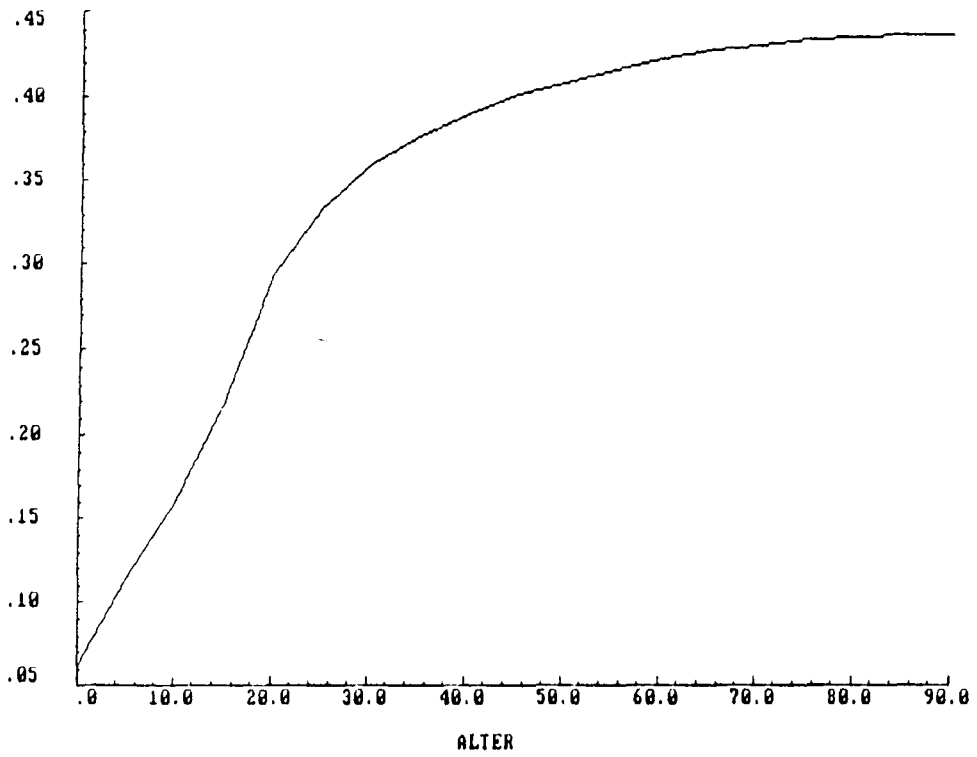


Abb.3: Ausländeranteile der stationären Bevölkerung in den einzelnen Altersklassen

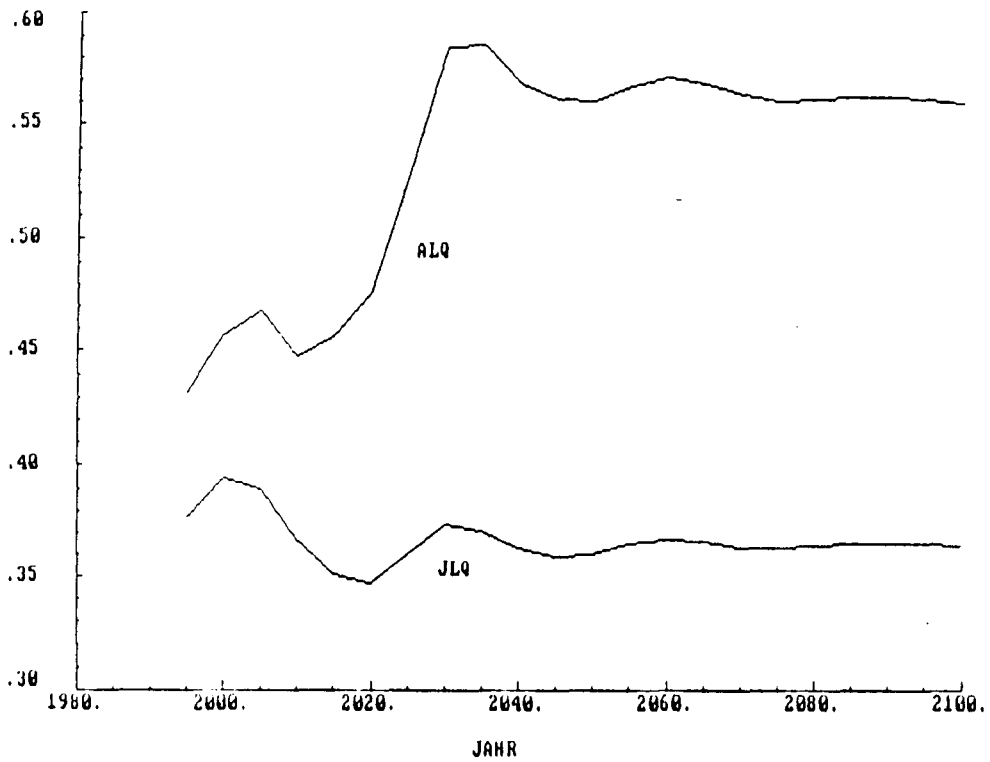


Abb.4: Alterslastquotient (ALQ) und Jugendlastquotient (JLQ)

menhang sind die statisch-komparativen Analysen, die den Einfluß der Zuwanderung auf eine Bevölkerung mit einer Fertilität unter dem Bestandserhaltungsniveau untersuchen, zu kritisieren (vgl. bspw. Espenshade et al., 1982; Mitra, 1990; Cerone, 1987). Es wird der Anfangszustand mit dem stationären Endzustand verglichen, ohne die zeitliche Entwicklung zwischen diesen beiden Zuständen zu berücksichtigen.

In der folgenden Bevölkerungsprojektion wird die wohl realistischere Annahme gemacht, daß sich inländische und ausländische Fertilitäten unterscheiden. Es wird berücksichtigt, daß die Einwanderer erst allmählich, gewöhnlich nach ein bis zwei Generationen, die Verhaltensweisen des neuen Heimatlandes übernehmen. Die höhere anfängliche Fertilität (Nettoreproduktionsrate = 1,645) soll sich nach 30 Jahren an die inländische Fertilität anpassen, wobei eine geometrische Anpassung unterstellt wird.

Die Entwicklungen der alten und der neuen Bevölkerungsgruppen sind der Abb. 2 zu entnehmen. Aufgrund der höheren Fertilität nimmt die neue Bevölkerungsgruppe schneller als im vorigen Fall zu. Die stationäre Bevölkerung steigt auf etwa 60 Millionen. Bei einer stationären Zielbevölkerung von 40 Millionen wären jährlich nur knapp 175.000 Zuwanderer nötig.

2. Weltbevölkerungsszenarien

Die Weltbevölkerung hat die 5-Milliarden-Grenze überschritten. Ihr Wachstum beträgt etwa 1,7% jährlich. Während in Industrieländern die Bevölkerung langfristig mit großer Wahrscheinlichkeit zurückgehen oder stagnieren wird, wird sie in Entwicklungsländern weiter wachsen. Es ist unumstritten, daß in Entwicklungsländern Stationarität im wesentlichen nur durch eine Reduzierung der Nettoreproduktionsrate auf Eins erzielt werden kann. Im folgenden soll untersucht werden, inwieweit Wanderungsströme von Entwicklungsländern zu den Industrieländern als flankierende Maßnahme zur Erreichung des Zieles Stationarität beitragen können. Zu diesem Zweck wird die Weltbevölkerung in die Bevölkerung der Industrieländer (More Developed Countries, 1990: 0,62 Mrd. Frauen) und in die Bevölkerung der Entwicklungsländer (Less Developed Countries, 1990: 1,98 Mrd. Frauen) aufgeteilt. Die Nettoreproduktionsrate betrage in den Industrieländern einheitlich 0,7 (in Industrieländern werden die Fertilitäts- und Mortalitätsraten der Bundesrepublik Deutschland von 1985 unterstellt; vgl. Pflaumer, 1988) und in Entwicklungsländern 1,645 (in Entwicklungsländern werden die Fertilitäts- und Mortalitätsraten von Mauritius 1970 unterstellt; diese Raten spiegeln die zur Zeit geltenden Verhältnisse in Entwicklungsländern adäquat wieder und entsprechen einer stabilen Wachstumsrate von 1,8% pro Jahr; vgl. Keyfitz/Flieger, 1990). Die Bevölkerung in jeder Gruppe wird separat projiziert. Obiges Modell erhebt keinen Anspruch auf realistische Weltbevölkerungsprognosen, da der

Aggregationsgrad viel zu groß ist. Vielmehr soll grundsätzlich der Einfluß von Wanderungen auf das langfristige Bevölkerungswachstum analysiert werden.

Die Abb. 5 zeigt vier Szenarien der Entwicklung der weiblichen Bevölkerung in Entwicklungsländern, wobei konstante Mortalitätsverhältnisse und das Nichtvorhandensein von Wanderungen unterstellt wird.

Szenario I: Die Nettoreproduktionsrate der Ausgangsbevölkerung von 1,645 ändert sich nicht. Die weibliche Bevölkerung steigt bis zum Ende des nächsten Jahrhunderts auf etwa 16 Mrd. an. Dies würde eine Gesamtbevölkerung von ca. 32 Mrd. Menschen in Entwicklungsländern bedeuten. Aufgrund des hohen Aggregationsgrads unterschätzt vorliegendes Modell jedoch die Bevölkerungsentwicklung, falls konstante Fertilitätsverhältnisse unterstellt werden. Viele Länder in Afrika haben aber eine Nettoreproduktionsrate die über 2 liegt. Lutz und Prinz (1991) projektieren mit einem Modell, welches die Welt in sechs Regionen einteilt, eine Weltbevölkerung von über 56 Mrd. Menschen im Jahr 2100 unter der Annahme konstanter Fertilitätsverhältnisse.

Szenario II: Die Fertilität sinkt sofort auf ihr Bestandserhaltungsniveau. Aufgrund von Altersstruktureffekten steigt die Bevölkerung in Entwicklungsländern dennoch zunächst auf 3 Mrd an, um dann schließlich den stationären Zustand von 2,99 Mrd. zu erreichen. Unter der Berücksichtigung der Gesamtbevölkerung in Industrieländern und der männlichen Bevölkerung in Entwicklungsländern beträgt die gesamte stationäre Weltbevölkerung rund 7 Mrd.. Lutz und Prinz (1991) kommen mit ihrem realitätsnäheren Modell zu ähnlichen Ergebnissen.

Szenario III: Schneller Fertilitätsrückgang der Fertilität auf das Bestandserhaltungsniveau nach 40 Jahren. Die stationäre weibliche Bevölkerung in Entwicklungsländern beträgt 4,41 Mrd. (Gesamte Weltbevölkerung: 9,8 Mrd).

Szenario IV: Langsamer kontinuierlicher Rückgang der Fertilität auf das Bestandserhaltungsniveau nach 100 Jahren. Die stationäre weibliche Bevölkerung in Entwicklungsländern beläuft sich auf 7,46 Mrd. (Gesamte Weltbevölkerung: 16 Mrd.).

Da sowohl Szenario I als auch Szenario II sehr unrealistisch sind, wird die Weltbevölkerung Ende nächsten Jahrhunderts vermutlich zwischen 10 und 16 Mrd. Menschen liegen. Vergleichbare Ergebnisse publizieren auch andere Autoren (vgl. z. B. Lutz/Prinz, 1991 oder United Nations, 1992). Hiermit bestätigt sich, daß weniger der Aggregationsgrad des Modells, sondern vielmehr die Annahmen bezüglich Mortalität und Fertilität für die Ergebnisse ausschlaggebend sind.

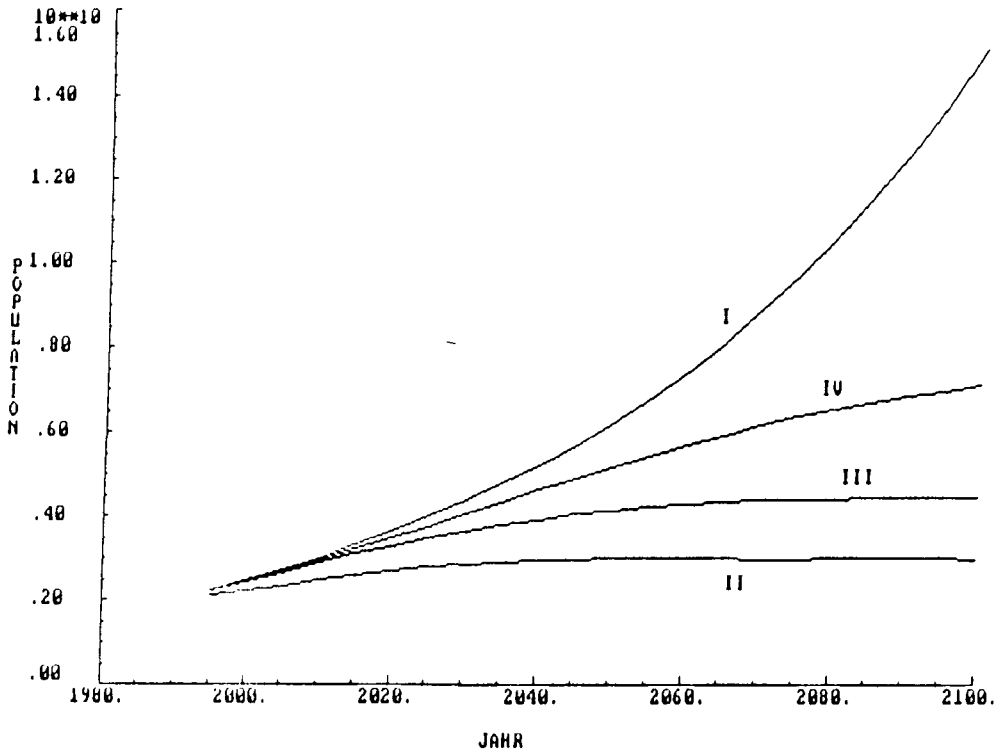


Abb.5: Szenarien der weiblichen Bevölkerung in Entwicklungsländern

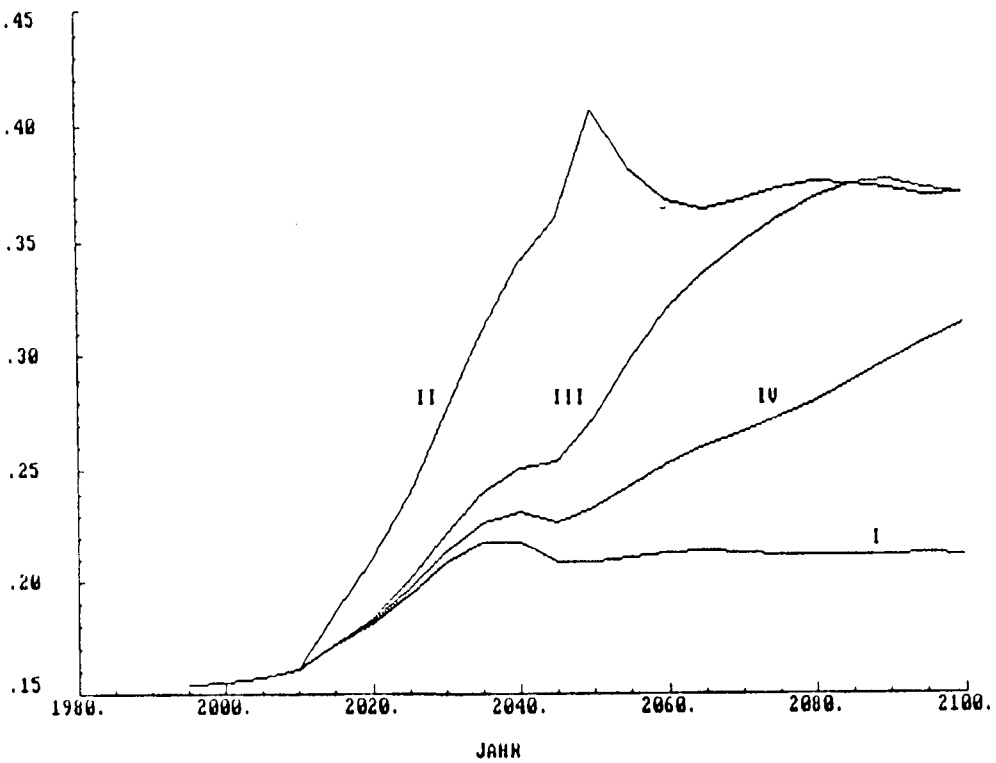


Abb.6: Szenarien der Alterslastquotienten in Entwicklungsländern

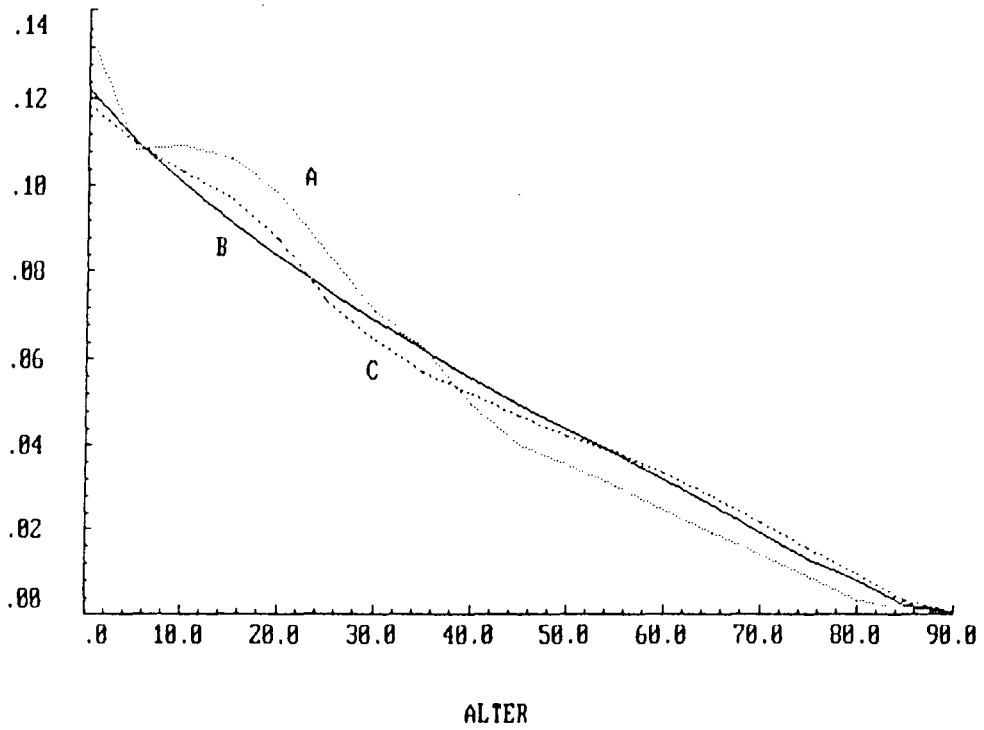


Abb.7: Altersstrukturen der Bevölkerung in Entwicklungsländern 1990 (A), der stabilen Bevölkerung (B) und der stationären Bevölkerung (C)

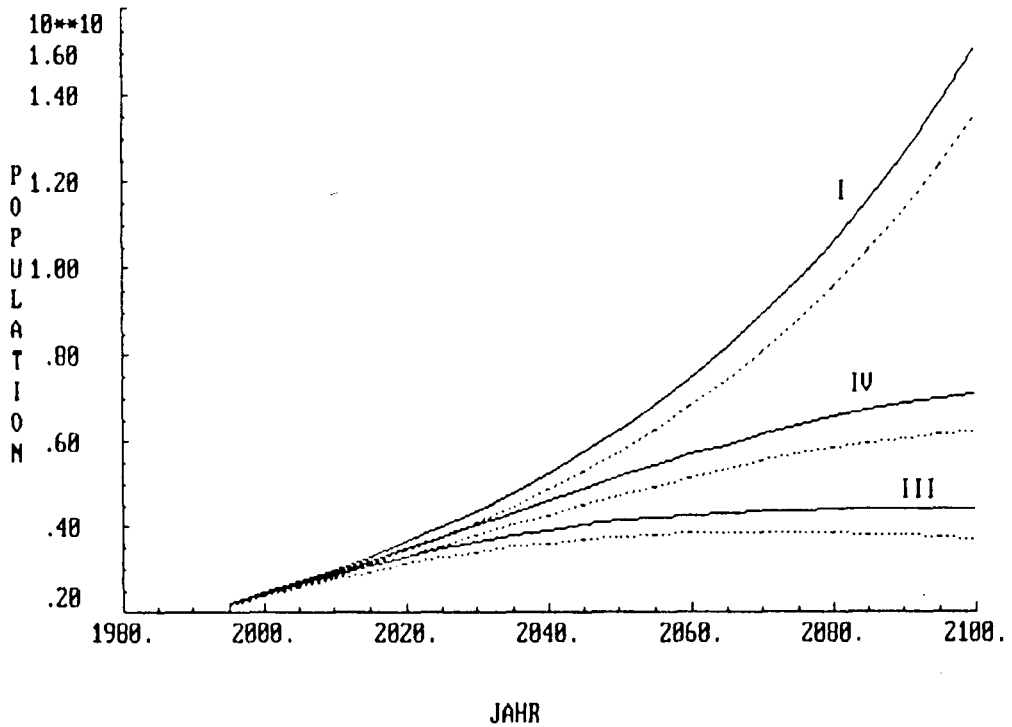


Abb.8: Szenarien der weiblichen Bevölkerung in Entwicklungsländern mit (- -) und ohne (—) Auswanderungen

In Abb. 6 sind die Entwicklungen der Alterslastquotienten der verschiedenen Szenarien dargestellt. Bei einer stationären Bevölkerung würde der Alterslastquotient ceteris paribus in diesen Ländern auf etwa 0,37 ansteigen. Wegen der höheren Mortalität ist der Alterslastquotient der stationären Bevölkerung in Entwicklungsländern niedriger als in Industrieländern. (vgl. Abb. 4). Da die Kinderlast bei den Szenarien II bis IV sinkt, geht der Gesamtlastquotient von 1,08 auf 0,9 zurück. Bei der weiterhin wachsenden Bevölkerung des Szenarios I stabilisiert sich der Gesamtlastquotient bei 1,1.

Unter Berücksichtigung der finanzmathematischen Ergebnisse in Abschnitt B müßte die Zahl der weiblichen Auswanderer in Entwicklungsländern jährlich etwa 36 Millionen betragen, damit hier die Bevölkerung nicht weiter zunimmt. Unterstellt man für die Fortzüge die Altersstruktur der Zuzüge in Abb. 1 (Altersstruktur C), so sinkt die notwendige Auswandererzahl zur Erreichung der Stationarität auf 32,417 Millionen pro Jahr. Ist die Zahl der Auswanderer geringer, so wächst die Bevölkerung in Entwicklungsländern langfristig mit 1,8% jährlich, falls die Fertilität konstant bleibt (stabil wachsende Bevölkerung; vgl. Abb. 8) Die Auswirkungen der Auswanderungen auf die Altersstruktur in Entwicklungsländern ist in Abb. 7 zu erkennen. Solch hohe Einwanderungszahlen sind für die Industrieländer aber nicht denkbar. Unter der Annahme einer Nettoreproduktionsrate von 0,7 in Industrieländern, die bei so hohen Zuwanderungsströmen völlig unrealistisch ist, ergäbe sich eine stationäre (weibliche) Bevölkerung von 4,8 Mrd.

Auswanderung in einigermaßen realistischen Dimensionen hat dagegen kaum einen Einfluß auf die Bevölkerungsentwicklung in Entwicklungsländern, wie Abb. 8 und Tab. 2 zeigen. Es wird angenommen, daß die Zahl der weiblichen Auswanderer in Entwicklungsländern jährlich 4 Millionen beträgt. Einwanderungen in dieser Höhe führt in Industrieländern zu einer stationären Bevölkerung von 0,613 Mrd. Frauen. Die Höhe der stationären Bevölkerung entspricht ungefähr der Höhe der tatsächlichen Bevölkerung im Jahr 1990.

Tab. 2: Weltbevölkerungsszenarien

	SZENARIO I		SZENARIO II		SZENARIO III	
	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit
	Wand.	Wand.	Wand.	Wand.	Wand.	Wand.
Weibliche Bevölkerung in Entwicklungsländern	15,06	13,47	4,41	3,73	7,08	6,20
Weibliche Bevölkerung in Industrieländern	0,24	0,68	0,24	0,68	0,24	0,68
Gesamt	15,30	14,15	4,65	4,41	7,32	6,88

D. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Langfristig muß das Ziel der quantitativen Bevölkerungspolitik Nullwachstum lauten. Dieses Ziel führt zu einer stationären Bevölkerung. Läßt man die demographische Variable Mortalität außer acht, so kommen als einzige Instrumente für dieses Ziel Maßnahmen in Betracht, die die Fertilität und die Migration beeinflussen. Während in Entwicklungsländern die Bevölkerung weiter wachsen wird, wird sie in Industrieländern zurückgehen, wenn es zu keinen Zuwanderungen kommt. Es wurde deutlich gemacht, daß in Entwicklungsländern das Ziel Stationarität im wesentlichen nur durch einen Rückgang der Fertilität erreicht werden kann. Je schneller der Fertilitätsrückgang ist, um so kleiner wird die stationäre Bevölkerung sein. In Industrieländern kann Stationarität durch eine Erhöhung der Fertilität oder durch Zuwanderung erreicht werden. Die Berechnungen haben gezeigt, daß unter den gemachten Annahmen Deutschland zwischen 350.000 und 500.000 Zuwanderer jährlich aufnehmen muß -je nach Altersstruktur und Fertilität der Zuwanderer -, damit langfristig der Bevölkerungsbestand bei 80 Millionen bleibt.

Eine Einwanderungspolitik hat auf die Altersstruktur und die Zusammensetzung der Bevölkerung aber andere demographische Konsequenzen als eine pronatalistische Bevölkerungspolitik. Trotz der jungen Altersstruktur der Zuwanderer wird die stationäre Bevölkerung die typische Urnenform einer stabil schrumpfenden Bevölkerung aufweisen. Die Frage, ob Immigration Kinder ersetzen kann, läßt sich wie folgt beantworten: Immigration verhindert bei einer Netto-reproduktionsrate von kleiner Eins das Aussterben der Bevölkerung, in diesem Sinne ist sie ein Ersatz für Kinder, sie verhindert aber nicht das Altern der Bevölkerung, in diesem Sinne ist sie

kein Ersatz für Kinder. Die Altersstruktur kann nachhaltig nur durch einen Anstieg der Fertilität verjüngt werden. Wird Stationarität einer Bevölkerung durch Zuwanderung erreicht, dann muß man hohe Ausländeranteile in Kauf nehmen. In Deutschland wird bei heutigen Fertilitätsverhältnissen der Ausländeranteil auf über 30% steigen. Schon nach zwei bis drei Generationen wird die Zahl der Zugezogenen einschließlich ihrer Nachkommen die Zahl der inländischen Bevölkerung übersteigen. Ob bei solch hohen Einwanderungszahlen die nationale Gemeinschaft erhalten werden kann, oder ob die Bevölkerung in eine Vielzahl autonomer konkurrierender und rivalisierender Formationen zerfällt, wie es der französische Orientalist Maxime Rodinson (vgl. Chimelli, 1989) befürchtet, hängt sowohl von der Integrationsfähigkeit der Einwanderer als auch von Maßnahmen der qualitativen Bevölkerungspolitik ab, deren Aspekte in der hier ausschließlich quantitativ orientierten Untersuchung nicht erörtert worden sind.

LITERATURHINWEISE

- W.B. Arthur; T.J. Espenshade (1988): Immigration policy and immigrants' ages, *Population and Development Review* 14: 315-326.
- L.F. Bouvier; T.J. Espenshade (1989): The stable population model, migration, and complementarity, *Population Research and Policy Review* 8: 165-179.
- P. Cerone (1987): On stable population theory with immigration, *Demography* 24: 431-442
- R. Chimelli (1989): Frankreichs Hauptthema: Ausländer, *Süddeutsche Zeitung* Nr.289: 12
- A. Coale (1972): Alternative paths to a stationary population, C.F. Westhoff; R. Parke (eds): *Demographic and social aspects of population growth*, Washington, D.C.
- R. Dinkel (1989): *Demographie, Bd.1: Bevölkerungsdynamik*, München.
- G. Feichtinger; G. Steinmann (1992): Immigration into a population with fertility below replacement level- the case of West Germany, *Population Studies* 46: 275-284.
- T.J. Espenshade; L.F. Bouvier; W.B. Arthur (1982): Immigration and the stable model, *Demography* 19: 125-133.
- B. Huppert (1990). *Angewandte lineare Algebra*, Berlin- New York.
- H. Ihrig; P. Pflaumer (1992): *Finanzmathematik*, 2. Aufl., München.
- N. Keyfitz (1977): *Applied mathematical demography*, New York.
- N. Keyfitz (1971): Migration as a means of population control, *Population Studies* 25: 63-72.
- N. Keyfitz; W. Flieger (1990): *World population growth and aging*, Chicago.
- W. Lutz; C. Prinz (1991): Scenarios for the world population in the next century: excessive growth or extreme aging, *IIASA-Paper WP-91-22*, Laxenburg.

- S. Mitra (1987): An analysis of the consequences of certain patterns of immigration, *Demography India* 16: 109-118.
- S. Mitra (1990): Immigration, below-replacement fertility, and long-term national population trends, *Demography* 27:121-129.
- P. Pflaumer (1988): *Methoden der Bevölkerungsvorausschätzung unter besonderer Berücksichtigung der Unsicherheit*, Berlin.
- P. Pflaumer (1991): Demographic consequences of guestworker migration, *American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section*, Atlanta, 425-430.
- P. Pflaumer (1992): Age structures of guestworker migrants in Germany: An application of the cluster analysis, S. Schach; G. Trenkler (eds): *Data analysis and statistical inference*, Bergisch-Gladbach, 503-511.
- P. Pflaumer (1992): Forecasting US population totals with the Box-Jenkins approach, *International Journal of Forecasting* 8: 329-338.
- J.H. Pollard (1973): *Mathematical models for the growth of human population*, Cambridge.
- A. Rogers (1990): The multistate stable population model with immigration, *Mathematical Population Studies* 2: 313-324.
- C. P. Schmertmann (1992): Immigrant's ages and the structure of stationary populations with below-replacement fertility, *Demography* 29: 295-312.
- United Nations (1992): *Long-range world population projections*, New York.