

Abberger, Klaus

**Working Paper**

## Nichtparametrische Schätzung bedingter Quantile in Finanzmarktdaten

Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 225

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Konstanz

*Suggested Citation:* Abberger, Klaus (1994) : Nichtparametrische Schätzung bedingter Quantile in Finanzmarktdaten, Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 225, Universität Konstanz, Sonderforschungsbereich 178 - Internationalisierung der Wirtschaft, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/101607>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

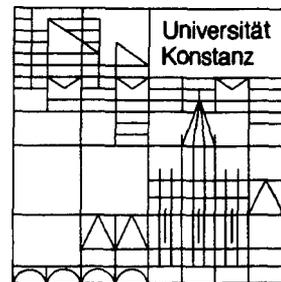
*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

**Sonderforschungsbereich 178**  
**„Internationalisierung der Wirtschaft“**

Diskussionsbeiträge



Juristische  
Fakultät

Fakultät für Wirtschafts-  
wissenschaften und Statistik

---

Klaus Abberger

**Nichtparametrische Schätzung  
bedingter Quantile in Finanzmarktdaten**

# **Nichtparametrische Schätzung bedingter Quantile in Finanzmarktdaten**

**Klaus Abberger**

Serie II - Nr. 225

Mai 1994

# NICHTPARAMETRISCHE SCHÄTZUNG BEDINGTER QUANTILE IN FINANZMARKTDATEN

Klaus Abberger

SFB 178, Universität Konstanz

## **Zusammenfassung:**

In der Literatur wurden verschiedene parametrische Modelle zur Analyse der Heteroskedastie in Zeitreihen von Finanzmarktdaten entwickelt. Eine Möglichkeit, die bedingte Volatilität nichtparametrisch zu erfassen, ist die Kernschätzung von bedingten Quantilen. In diesem Aufsatz werden einige asymptotische Eigenschaften des Kernschätzers präsentiert. Die Anwendung von nichtparametrischen Schätzern setzt die Wahl eines Glättungsparameters voraus. Es wird die Bandweitenwahl mittels Cross-Validation als Lösung diskutiert. Die Prozedur wird zur Schätzung von bedingten Quantilen in der Zeitreihe täglicher DAX-Renditen verwendet.

# 1 Einleitung

Die Zeitreihen täglicher Finanzmarktdaten (Aktienkurse, Wechselkurse, etc.) werden charakterisiert durch die statistischen Eigenschaften:

- (i) sie sind linear nicht modellierbar,
- (ii) besitzen leptokurtisch verteilte Renditen,
- (iii) verhalten sich heteroskedastisch.

Die Renditen sind durch  $Y_i = (Kurs_i - Kurs_{i-1})/Kurs_{i-1}$  definiert. Ein Modell, das kongruent mit den drei genannten Eigenschaften ist, lautet

$$Y_i = \mu + V_i U_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit  $E[U_i] = 0$ ,  $Var[U_i] = 1$  und  $\{V_i\}$  eine Folge positiver Zufallsvariablen. Es sei  $V_i$  unabhängig von  $U_i$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= \mu, \\ Var[Y_i | V_i] &= v_i^2. \end{aligned}$$

Die Zeitreihe besitzt einen konstanten Erwartungswert und zeitabhängige Varianzen. Weitere Eigenschaften dieses Modells sind: Die Zeitreihe  $\{Y_i\}_{i=1}^n$  besitzt keine Autokorrelationen. Die quadrierten Werte  $\{Y_i^2\}_{i=1}^n$  können jedoch autokorreliert sein. Existieren die vierten Momente von  $U_i$  und  $V_i$  und bezeichne  $k_u$  die Kurtosis von  $U_i$  ( $k_u = E[U_i^4]/E[U_i^2]^2$ ), dann gilt für stationäre  $\{U_i\}$  und  $\{V_i\}$

$$k_y = \frac{k_u E[V_i^4]}{E[V_i^2]^2}.$$

Da für alle positiven Zufallsvariablen  $V_i$  mit positiver Varianz  $E[V_i^4] > E[V_i^2]^2$  gilt, ist die gemeinsame Verteilung der  $\{Y_i\}$  leptokurtisch sogar dann, wenn  $\{U_i\}$  gemeinsam normalverteilt ist.

Eine ökonomische Erklärung für die Heteroskedastie in den Zeitreihen täglicher Finanzmarktdaten ist die Ankunft und Verarbeitung von Information auf dem Markt. Zwei Aspekte sind besonders zu beachten:

- (1) Die Information trifft sequentiell auf dem Markt ein. Sie erreicht die Händler nicht gleichzeitig. Es gibt daher zu jedem Zeitpunkt informierte und nicht informierte Händler.
- (2) Die Einschätzung der Information ist unterschiedlich. Die Menge der Händler teilt sich in Optimisten und Pessimisten.

In der statistischen Analyse von Finanzmärkten sind ARCH- (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) und GARCH-Modellierungen (General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) für die bedingte Varianz  $V_i^2$  sehr beliebt. Das ARCH (q)-Modell wurde von Engle (1982) eingeführt. Es lautet

$$V_i^2 = w + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{i-j}^2 = w + \alpha(L)\epsilon_i^2, \quad (1)$$

mit  $\epsilon_i = V_i U_i$ . Bollerslev (1986) hat dieses Modell erweitert. Das GARCH (p, q)-Modell hat die Gestalt

$$V_i^2 = w + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j V_{i-j}^2 = w + \alpha(L)\epsilon_i^2 + \beta(L)V_i^2. \quad (2)$$

Geschätzt werden beide Modelle mit der Maximum-Likelihood-Methode. Das bedeutet, für die Schätzung muß die Verteilungsfamilie der bedingten Verteilung vorgegeben werden. Nichtparametrische Verfahren dagegen arbeiten verteilungsfrei. Daher wird im folgenden die Kernschätzung bedingter Quantile vorgestellt. Die Schätzung von bedingten Quantilen statt bedingten Varianzen birgt einige Vorteile in sich:

- (i) Ein auf Quantilen beruhendes Streuungsmaß existiert auch dann, wenn die Varianz nicht existiert. Das ist insbesondere zu beachten, wenn die bedingte Verteilung leptokurtisch ist.

- (ii) Die Schätzung von bedingten Quantilen ist robuster gegenüber Ausreißern als die Schätzung der bedingten Varianz.
- (iii) Bedingte Quantile zeigen Asymmetrien in den bedingten Verteilungen auf. Ein Risikomaß das auf Quantilen basiert, enthält mehr Information als ein Risikomaß das auf der Varianz basiert.

Der weitere Aufbau dieses Aufsatzes bestimmt sich wie folgt: in Abschnitt zwei wird ein Kernschätzer für bedingte Quantile definiert. Seine asymptotischen Eigenschaften werden dargestellt und das Problem der Bandweitenwahl wird diskutiert. In Abschnitt drei wird der Kernschätzer auf die Zeitreihe täglicher DAX-Werte angewendet. Eine Schlußbetrachtung faßt die gewonnenen Erkenntnisse zusammen.

## 2 Kernschätzung bedingter Quantile

### 2.1 Definition des Kernschätzers

In der Literatur wurden verschiedene nichtparametrische Schätzer für bedingte Quantile vorgeschlagen. Exemplarisch seien hier Koenker, Portnoy und Ng (1992), die eine Splineanpassung motivieren, und Stute (1986), der einen Nächste-Nachbar-Schätzer behandelt, erwähnt. Kernschätzer werden zum Beispiel von Horváth und Yandell (1988) und von Samanta (1989) vorgeschlagen. Der nichtparametrischen Schätzung bedingten Quantilen liegt folgendes Modell zugrunde.

Es sei  $\{Y, X\}$  eine bivariate Zufallsvariable und  $F(y | x) = F_x(y)$  bezeichne die bedingte Verteilung von  $Y$  gegeben  $X = x$ . Das bedingte  $\alpha$ -Quantil  $q_\alpha(x)$  ist eine Funktion von  $x$ , wobei  $q_\alpha(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_x(y) \geq \alpha\}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Gegeben die Beobachtungen  $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$ , lautet das Modell

$$Y_i = q_\alpha(X_i) + U_i, \tag{3}$$

mit  $P_x(U_i \leq 0) = \alpha$ . In dem hier interessierenden Fall der Glättung von Zeitreihen ist  $X$  gleichverteilt auf  $[1; n]$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $X_i = t_i = \frac{i-1}{n}$  gleichverteilt auf  $(0; 1)$  angenommen werden.

Der Kernschätzer für bedingte Quantile soll hier analog zu Horváth und Yandell (1988) eingeführt werden. Es sei  $F(y, x) = P(Y \leq y, X \leq x)$  eine stetige bivariate Verteilungsfunktion mit den Randverteilungsfunktionen  $H(y) = P(Y \leq y)$  und  $G(x) = P(X \leq x)$ . Für die Analyse bedingter Quantile benötigt man eine Schätzung der bedingten Verteilungsfunktion  $F_x(y)$ . Die üblichen Schätzer für  $F(y, x)$  und  $G(x)$  sind die empirischen Verteilungsfunktionen

$$F_n(y, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y, X_i \leq x\}} \quad (y, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

und

$$G_n(x) = F_n(\infty, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Es sei  $K(\cdot)$  eine geeignete Kernfunktion,  $h_n$  eine Sequenz von Bandweiten und

$$\begin{aligned} l_n(y, x) &= h_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) d_u F_n(y, u) \\ &= h_n^{-1} n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

eine Kernschätzung für  $l(y, x) = \frac{\delta}{\delta x} F(y, x)$ . Existiert  $g(x) = \frac{\delta}{\delta x} G(x)$  in einer Umgebung von  $x$ , dann wird  $g(x)$  geschätzt durch

$$\begin{aligned} g_n(x) &= l_n(\infty, x) = h_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) dG_n(u) \\ &= h_n^{-1} n^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Für die bedingte Verteilungsfunktion ergibt sich daraus der Kernschätzer

$$F_{n,x}(y) = F_n(y | x) = \frac{l_n(y, x)}{g_n(x)}, \quad (8)$$

$$F_{n,x}(y) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}. \quad (9)$$

Die geschätzte bedingte Verteilungsfunktion wird in die Definition des bedingten  $\alpha$ -Quantils eingesetzt. Der Kernschätzer für das bedingte  $\alpha$ -Quantil ist

$$q_{n\alpha}(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_n(y \mid x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (10)$$

## 2.2 Asymptotische Eigenschaften der Kernschätzung

Im folgenden werden die schwache Konvergenz und die fast sichere Konvergenz des Kernschätzers im Falle unabhängig identisch verteilter Beobachtungen  $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$  untersucht. Für die beabsichtigte Anwendung auf Zeitreihendaten ist die Voraussetzung der Unabhängigkeit zu restriktiv. Daher wird auch die Konvergenz bei abhängigen Beobachtungen betrachtet.

Sei  $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$  unabhängig identisch verteilt und sei

$$\beta_n(y \mid x) = (nh_n)^{\frac{1}{2}}(F_n(y \mid x) - \bar{F}(y \mid x)). \quad (11)$$

$\bar{F}(y \mid x)$  ist definiert wie  $F_n(y \mid x)$ , jedoch sind in  $l_n$  und  $g_n$  die geschätzten Verteilungsfunktionen  $F_n(y, x)$  und  $G_n(x)$ , ersetzt durch die wahren Verteilungsfunktionen  $F(y, x)$  und  $G(x)$ . Das bedeutet,  $\bar{F}(y \mid x)$  ist die geglättete wahre bedingte Verteilungsfunktion. Es seien folgende Bedingungen in einer Umgebung von  $x$ , gleichmäßig in  $u$  erfüllt:

$$g(x) > 0 \quad (\text{S. 1})$$

$$|g'(x)| < \infty \quad (\text{S. 2})$$

$$\sup_{y,u} l(y, u) < \infty \quad (\text{S. 3})$$

$$\sup_y \left| \frac{\delta}{\delta u} l(y, u) \right| < \infty \quad (\text{S. 4})$$

$$K \geq 0, \lim_{u \rightarrow \pm\infty} K(u) = 0, \int K(u) du = 1 \quad (\text{K. 1})$$

$$\int |u| K^2(u) du < \infty \quad (\text{K. 2})$$

$$\int K^2(u) du < \infty \quad (\text{K. 3})$$

K besitze einen kompakten Träger und endliche Variationen in  $\mathbb{R}$  (K. 4)

$$h_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (\text{B. 1})$$

$$nh_n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (\text{B. 2})$$

$$h_n \log n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (\text{B. 3})$$

$$nh_n^3 (\log n)^{-6} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (\text{B. 4})$$

In der Beweisführung zu einem Satz vom iterierten Logarithmus für Kernschätzer zeigen Horváth und Yandell (1988) folgende Wahrscheinlichkeitsabschätzung.

**Satz 1.** *Es seien die Bedingungen (S. 1) - (S. 4), (K.1.) - (K.4.) und (B.1.) - (B.4.) erfüllt. Dann kann man eine Sequenz von Brownschen Brücken definieren,  $(B_n^{(1)}(t), 0 < t < 1)$ , so daß gilt*

$$P\left\{\sup_y |\beta_n(y|x) - \left(\int K^2(u) du / g(x)\right)^{\frac{1}{2}} B_n^{(1)}(F(y|x))|\right. \\ \left. > C_1((h_n \log n)^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{6}} h_n^{-\frac{1}{2}} \log n)\right\} \leq C_2 n^{-2}, \quad (12)$$

wobei  $C_j, j = 1, 2$ , Konstanten.

**Beweis:** siehe Horváth und Yandell (1988), S.190-194.

Die Abschätzung in Satz 1 ist der Schlüssel zur Herleitung der schwachen Konvergenz von  $\beta_n$ .

**Korollar 1.** Seien die Bedingungen aus Satz 1 erfüllt. Dann konvergiert  $\beta_n$  schwach gegen eine Brownsche Brücke:

$$\beta_n(y | x) \implies B_n^{(2)}(F(y | x)). \quad (13)$$

" $\implies$ " bedeute hier die schwache Konvergenz (Konvergenz in Verteilung).

**Beweis:**

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C_2 n^{-2} < \infty$  gilt, folgt mit dem Borell-Cantelli-Lemma und

$$B_n^{(2)}(F(y | x)) = \left( \int K^2(u) du / g(x) \right)^{\frac{1}{2}} B_n^{(1)}(F(y | x)),$$

daß gilt

$$\sup_y |\beta_n(y | x) - B_n^{(2)}(F(y | x))| \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (14)$$

Die fast sichere Konvergenz dieses Supremums impliziert  $\beta_n(y | x) \implies B_n^{(2)}(F(y | x))$ .

□

Die schwache Konvergenz gilt ebenfalls für  $(nh_n)^{\frac{1}{2}}(F_n(y | x) - F(y | x))$ , wenn der nicht-stochastische Term  $(\bar{F}(y | x) - F(y | x))$  gegen Null konvergiert. Dieses Verhalten wurde von Horváth und Yandell (1988) in einem Lemma betrachtet.

**Lemma 1.** Es sei (S. 1) - (S. 4), (K.1.) erfüllt. Weiterhin sei  $\int u^2 K(u) du < \infty$  und  $\sup_{y,u} \left| \frac{\delta^2}{\delta u^2} l(y, u) \right| < \infty$ . Dann gilt

$$\sup_y |\bar{F}(y | x) - F(y | x)| = O(h_n^3). \quad (15)$$

**Beweis:** siehe Horváth und Yandell (1988), S. 190.

Die Kernschätzung der bedingten Verteilungsfunktion ist  $\sqrt{nh_n}$  - konsistent. Die Konvergenzrate ist mit  $\sqrt{nh_n}$  geringer als die übliche Rate parametrischer Schätzer, da  $h_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert.

Erkenntnisse über die fast sicher Konvergenz der Kernschätzung bedingter Verteilungsfunktionen lassen sich aus Resultaten für die Kernschätzung bedingter Erwartungswerte gewinnen. Für die Zufallsvariable  $Z_y = \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , gilt

$$E[Z_y | x] = E[\mathbb{I}_{\{Y \leq y\}} | x] = F(y | x). \quad (16)$$

Für Zeitreihen ist die Annahme der Unabhängigkeit der Daten  $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$  zu restriktiv. Das Modell muß Abhängigkeiten zulassen. Dabei wird unterstellt, der Prozeß  $\{Y_i, X_i\}$  seien  $\alpha$ -mischend. Konvergenzbetrachtungen für andere Mischungsannahmen existieren ebenfalls.  $\alpha$ -mischende (oder stark mischende) Prozesse wurden ausgewählt, weil sie viele andere mischende Prozesse, z.B.  $\phi$ -,  $\psi$ -,  $\delta$ -,  $\rho$ -mischende enthalten (für einen Vergleich verschiedener Mischungsdefinitionen siehe Bradley et. al. (1987)). Es sei  $A_k$  ein Element der durch  $[\{Y_i, X_i\}, i = 1, \dots, k]$  generierten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_k$  und  $B_{k+s}$  ein Element der von  $[\{Y_i, X_i\}, j = k + s, \dots]$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}_{k+s}$ . Ein Prozeß  $\{Y_i, X_i\}$  heißt  $\alpha$ -mischend, wenn für die Mischungskoeffizienten

$$\alpha_s = \sup_k \sup_{A_k, B_{k+s}} |P(A_k \cap B_{k+s}) - P(A_k)P(B_{k+s})| \quad (17)$$

gilt:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_s = 0. \quad (18)$$

Ist  $\{Y_i, X_i\}$  ein  $\alpha$ -mischender Prozeß so folgt, daß auch  $\{Z_{ui}, X_i\}$   $\alpha$ -mischend ist.

Um fast sicheren Konvergenz zeigen zu können sind verschiedene weitere Annahmen nötig:

für ein  $k \in \mathbb{N}$  und ein  $\gamma \in (0, 1)$  seien  $F(y | x)$  und  $g(x)$   $k$ -mal differenzierbar und ihre Ableitungen der Ordnung  $k$  seien

$$\text{Lipschitz-stetig von der Ordnung } \gamma \quad (\text{S. 5})$$

$K(u)$  ist beschränkt, d.h.

$$\exists \bar{K}, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad |K(u)| \leq \bar{K} < \infty \quad (\text{K. 5})$$

$$|u| K(u) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |u| \rightarrow \infty \quad (\text{K. 6})$$

$$K \text{ ist Lipschitz stetig der Ordnung } \gamma \text{ in } \mathbb{R} \quad (\text{K. 7})$$

$$\int |u|^j K(u) du = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, k \quad (\text{K. 8})$$

$$\exists K^*, \quad 0 < \int |u|^{k+1} K(u) du \leq K^* < \infty. \quad (\text{K. 9})$$

Es sei  $(s_n)_N$  eine von den Mischungskoeffizienten  $(\alpha_n)_N$  abhängende Folge ganzer Zahlen, so daß gilt

$$\exists A < \infty, \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq s_n \leq \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad \frac{n \alpha_n^{(2s_n/3n)}}{s_n} \leq A.$$

**Satz 2.** *Es seien (S.5.) und (K.5.) - (K.9.) erfüllt. Die Bandweite  $h_n$  genüge der Bedingung*

$$V_n = h_n^{k+\gamma} + [(s_n \log n)/(nh_n)]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{B.5})$$

Dann gilt bei  $X$  gleichverteilt auf  $(0; 1)$  für  $Z_u = \mathbb{I}_{\{Y \leq u\}}$

$$\sup_{x \in (0,1)} |E_n(Z_u | x) - E(Z_u | x)| = O(V_n) \quad \text{f.s.}, \quad (20)$$

und mit (16)

$$\sup_{x \in (0,1)} |F_n(u | x) - F(u | x)| = O(V_n) \quad f.s. \quad (21)$$

**Beweis:** Siehe Györfi et. al. (1989) unter Beachtung der Definition von  $Z_u$ . □

Die Konvergenzrate wird von der Glattheit der bedingten Verteilungsfunktion und der Stärke der Abhängigkeiten in den Daten beeinflusst. Je glatter die bedingte Verteilungsfunktion und je geringer die Abhängigkeiten, desto schneller konvergiert  $V_n$  gegen Null. Für unabhängige Beobachtungen gilt  $\alpha_n = 0 \quad \forall n \in N$ .

In Satz 2 wird die fast sichere Konvergenz für die Schätzung der bedingten Verteilungsfunktion angegeben. Das Augenmerk liegt jedoch auf der Schätzung bedingter Quantile.

**Korollar 2.** *Es seien die Bedingungen aus Satz 2 erfüllt und es seien  $F(q_\alpha(x) | x) = \alpha$  und  $F_n(q_{n\alpha}(x) | x) = \alpha$  eindeutig. Dann gilt*

$$q_{n\alpha} \xrightarrow{f.s.} q_\alpha(x).$$

**Beweis:**

Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\eta(\epsilon) > 0$  der Form

$$\eta(\epsilon) = \min\{F(q_\alpha(x) + \epsilon | x) - F(q_\alpha(x) | x), F(q_\alpha(x) | x) - F(q_\alpha(x) - \epsilon | x)\},$$

so daß

$$|q_{n\alpha}(x) - q_\alpha(x)| > \epsilon$$

impliziert, daß

$$| F(q_{n\alpha}(x) | x) - F(q_\alpha(x) | x) | > \eta(\epsilon)$$

gilt. Es ist

$$\begin{aligned} | F(q_{n\alpha}(x) | x) - F(q_\alpha(x) | x) | &= | F(q_{n\alpha}(x) | x) - F_n(q_{n\alpha}(x) | x) | \\ &\leq \sup_{x \in (0,1)} | F_n(q_{n\alpha}(x) | x) - F(q_{n\alpha}(x) | x) | . \end{aligned}$$

Das Korollar folgt dann aus Satz 2 mit  $u = q_{n\alpha}(x)$ .

□

Es läßt sich festhalten: die Kernschätzung bedingter Quantile konvergiert unter den angegebenen Regularitätsbedingungen fast sicher gegen die zugrundeliegenden bedingten Quantile. Die Konvergenzgeschwindigkeit wird von der Glattheit der bedingten Verteilungsfunktion und damit von der Glattheit der bedingten Quantilsfunktion beeinflusst. Abhängigkeiten in den Daten beeinflussen die Konvergenzrate ebenfalls. Je glatter die bedingte Quantilsfunktion und je geringer die Abhängigkeiten, desto höher ist die Konvergenzgeschwindigkeit.

## 2.3 Bandweitenwahl

Wichtig für die Anwendung nichtparametrischer Verfahren ist die Auswahl eines Glättungsparameters. Im Falle der Kernschätzung ist dies die Wahl der Bandweite. Für den Bereich der Schätzung bedingter Erwartungswerte gibt es eine Vielzahl von Veröffentlichungen zu diesem Problemfeld. Sehr verbreitet ist die Wahl des Glättungsparameters durch Cross-Validation (siehe z.B. Härdle (1990)). Voraussetzung für diese Technik ist, daß unabhängige Beobachtungen vorliegen. Sind die Daten abhängig kann Cross-Validation zu schlechten Ergebnissen führen. Der Abhängigkeitsstruktur sollte Rechnung

getragen werden. Eine Möglichkeit ist, die Kovarianzen, geschätzt über das Spektrum der Zeitreihe, zu berücksichtigen. Man muß aber beachten, daß Kovarianzen nur lineare Abhängigkeiten abbilden. Ein weiterer Vorschlag ist, Block-Cross-Validation zu verwenden. Statt mit einem Leave-One-Out-Schätzer zu operieren, bleiben Datenblöcke unberücksichtigt. Die Verfahren der Cross-Validation können auch zur Schätzung bedingter Quantile verwendet werden.

Ausgangspunkt für die Bandweitenwahl ist die von Koenker und Bassett (1978) untersuchte Funktion

$$\sum_{i=1}^n \alpha \mathbb{I}_{\{Y_i - \theta \geq 0\}}(Y_i - \theta) - \sum_{i=1}^n (1 - \alpha) \mathbb{I}_{\{Y_i - \theta < 0\}}(Y_i - \theta), 0 < \alpha < 1. \quad (22)$$

Die Funktion wird minimal für  $\theta$  gleich dem  $\alpha$ -Quantil von  $\{Y_i\}_{i=1}^n$ . Für  $\alpha = 0,5$  reduziert sich die Funktion zur Summe der absoluten Abstände, die durch den Median minimiert wird.

Für die Bandweitemauswahl der bedingten Quantilschätzung wird in (22)  $\theta$  durch  $q_{n\alpha}^{(i)}(X_i)$  ersetzt.  $q_{n\alpha}^{(i)}(X_i)$  ist ein Leave-One-Out-Schätzer. In der Schätzung des  $i$ -ten Quantils bleibt  $(Y_i, X_i)$  unberücksichtigt. Es ist

$$F_n^{(i)}(y | X_i) = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbb{I}_{\{Y_j \leq y\}} K\left(\frac{X_j - X_i}{h_n}\right)}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K\left(\frac{X_j - X_i}{h_n}\right)} \quad (23)$$

und  $q_{n\alpha}^{(i)}(X_i) = \inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_n^{(i)}(y | X_i) \geq \alpha\}$ . Es resultiert eine von  $h_n$  abhängige Verlustfunktion der Form

$$\begin{aligned} L(h_n) &= \sum_{i=1}^n \alpha \mathbb{I}_{\{Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i) \geq 0\}}(Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (1 - \alpha) \mathbb{I}_{\{Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i) < 0\}}(Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i)). \end{aligned} \quad (24)$$

Bandweitenwahl via Cross-Validation bedeutet, daß die Bandweite ausgewählt wird, die  $L(h_n)$  minimiert.

Um die Sensitivität der gewöhnlichen Cross-Validation gegenüber abhängigen Daten zu überprüfen, kann Block-Cross-Validation hinzugezogen werden. Statt nur die  $i$ -ten Beobachtungen in den Quantilsschätzungen auszulassen, bleiben ganze Datenblöcke  $\{Y_j, X_j\}_{j=i-b_1}^{i+b_2}$ ,  $b = b_1 + b_2 + 1$ , unberücksichtigt. Diese Blöcke müssen so groß sein, daß die geschätzten Quantile an den Stellen  $X_i$  unabhängig von  $Y_i$  sind. In der Anwendung ist die Bestimmung der Blockgröße problematisch. Wieviele Beobachtungen sollen ausgelassen werden?

Einen Eindruck über die Anwendungsmöglichkeiten der Kernschätzung soll der nächste Abschnitt geben.

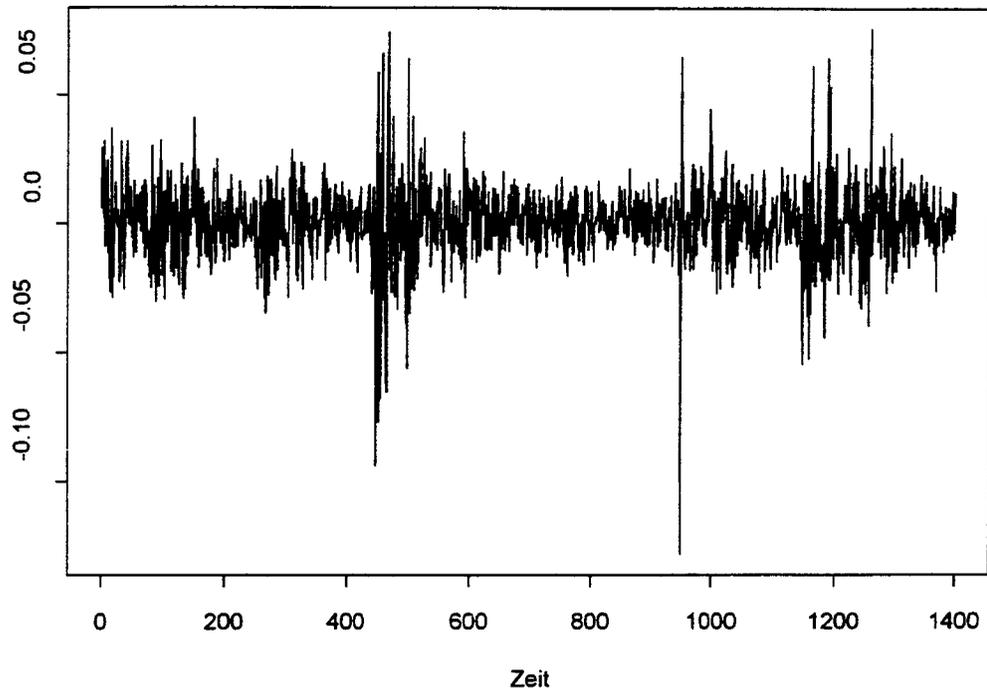
### 3 Schätzung bedingter Quantile in DAX-Renditen

Die entwickelte nichtparametrische Schätzprozedur zur Bestimmung bedingter Quantile wird auf tägliche DAX-Renditen<sup>1</sup> angewendet. Es handelt sich um 1400 Beobachtungen im Zeitraum zwischen dem 2.1.86 und dem 13.8.91. Abbildung 1 enthält die Zeitreihe. Der Verlauf der Zeitreihe läßt das Vorhandensein von Heteroskedastie und die Existenz von Ausreißern vermuten. Um diese Eigenschaften identifizieren zu können, werden neben dem bedingten Median das bedingte untere Quartil (0,25-Quantil) und das bedingte obere Quartil (0,75-Quantil) geschätzt. Als Kernfunktion dient ein Bisquare-Kern der Form  $\frac{15}{16}(1 - u^2)^2 \mathbb{I}_{[-1,1]}(u)$ . Der Bisquare-Kern ist stetig, differenzierbar und besitzt einen kompakten Träger. Hinweise auf die geeigneten Bandwei-

---

<sup>1</sup>Die Daten wurden von der Deutschen Finanzdatenbank-DFDB, Karlsruhe, zur Verfügung gestellt.

Abbildung 1: Zeitreihe täglicher DAX-Renditen vom 2.1.86 bis zum 13.8.91  
(n=1400)



ten soll das in Abschnitt 2.3 beschriebene Verfahren geben. Um Randproblemen bei der Berechnung von (24) zu entgehen, wird eine Gewichtsfunktion  $w(i) = \mathbb{I}_{\{200 < i < 1200\}}$  eingeführt. D.h., die ersten 200 und die letzten 200 Beobachtungen werden in der Berechnung von  $L(h)$  nicht berücksichtigt. Gesucht ist die Bandweite, die

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha \mathbb{I}_{\{Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i) \geq 0\}} (Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i)) - (1 - \alpha) \mathbb{I}_{\{Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i) < 0\}} (Y_i - q_{n\alpha}^{(i)}(X_i)) \right\} w(i)$$

minimiert. Die Sensitivität der gewonnenen Bandweite gegenüber Abhängigkeiten in den Daten wird mittels der Block-Cross-Validation überprüft. Es werden symmetrische Blöcke der Größe  $b = 3$  und  $b = 9$  betrachtet. Die

Funktionswerte von  $L(h)$  im relevanten Bereich zeigen die Abbildungen 2 bis 4. Bemerkenswert ist, daß die Niveaus der optimalen Bandweiten für die verschiedenen Quantile sehr unterschiedlich sind. Das gilt insbesondere für die beiden Quartile. Weiterhin zeigt es sich, daß die Anwendung von Block-Cross-Validation zu keinen wesentlich veränderten Ergebnissen führt. D.h. der Einfluß von Abhängigkeiten ist gering. Am eindeutigsten sind die Ergebnisse für das 0,25-Quantil. Die gewöhnliche Cross-Validation gibt eine optimale Bandweite von 30 vor. Für  $b = 3$  und  $b = 9$  ändert sich die optimale Bandweite auf 35. Die weitere Analyse wird  $h_{(0,25)}^* = 35$  zur Schätzung der bedingten unteren Quartile verwenden. Für den bedingten Median resultiert bei  $b = 1$  und  $b = 3$  eine Bandweite von 100. Im Fall  $b = 9$  erhöht sich die optimale Bandweite. Das Minimum der flach verlaufenden Kurve ist bei 130. Ausgewählt wird  $h_{(0,5)}^* = 100$ . Das Verfahren läßt auch für das obere Quartil keine nennenswerte Einflüsse von Abhängigkeiten auf die Bandweitenwahl erkennen. Gewöhnliche Cross-Validation ergibt eine Bandweite von 125. Für  $b = 3$  ist das Minimum bei 120 und für  $b = 9$  an der Stelle 115. Das 0,75-Quantil wird mit  $h_{(0,75)}^* = 120$  geschätzt.

Abbildung 5 präsentiert die Ergebnisse der Kernschätzung bedingter Quantile in DAX-Renditen. Wie schon die Bandweitenwahl andeutet, sind die bedingten Mediane und die bedingten 0,75-Quantile glatter als die bedingten 0,25-Quantile. Änderungen in der bedingten Volatilität der DAX-Renditen werden daher insbesondere durch das Verhalten im unteren Bereich der bedingten Verteilung beeinflusst. Die Folge davon ist ein starker negativer Zusammenhang zwischen bedingter Volatilität und bedingter Schiefe. Abbildung 6 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Erkennbar ist neben der negativen Abhängigkeit ein Cluster-Effekt. Einen ähnlichen Zusammenhang zwischen bedingter Volatilität und bedingter Schiefe vermuten Campbell und Hentschel (1992). Sie modellieren U.S.

Abbildung 2: Block-Cross-Validation für das 0.25-Quantil

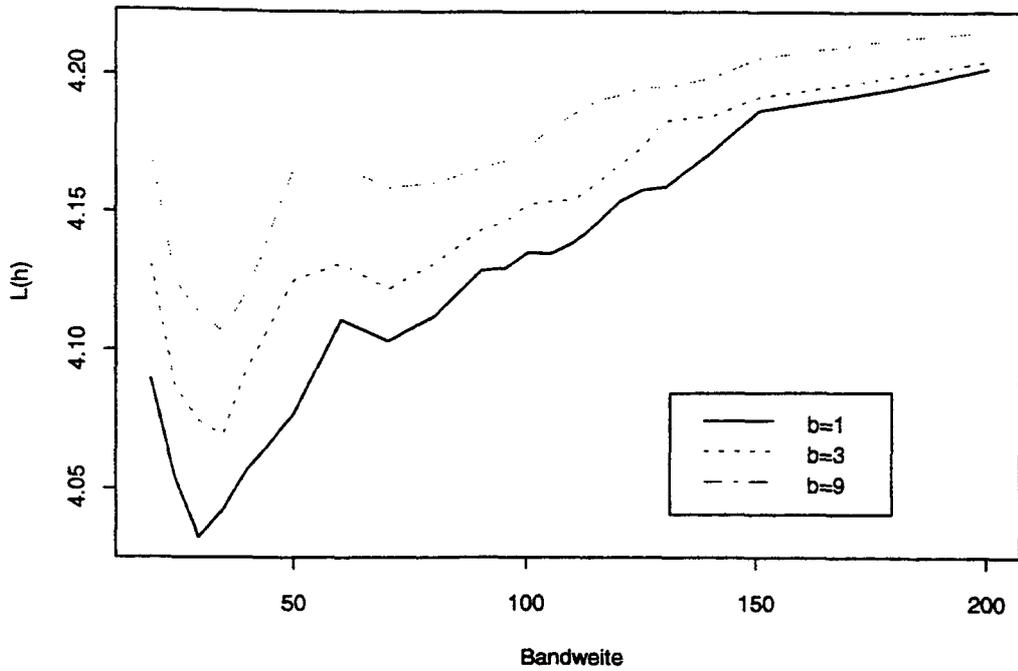


Abbildung 3: Block-Cross-Validation für das 0.50-Quantil

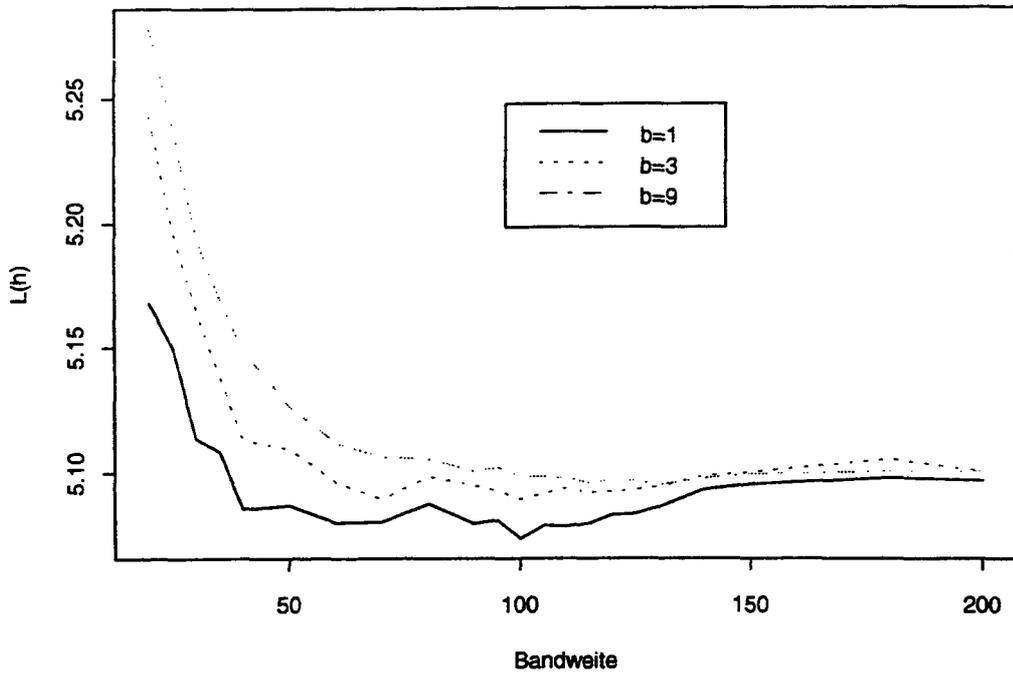
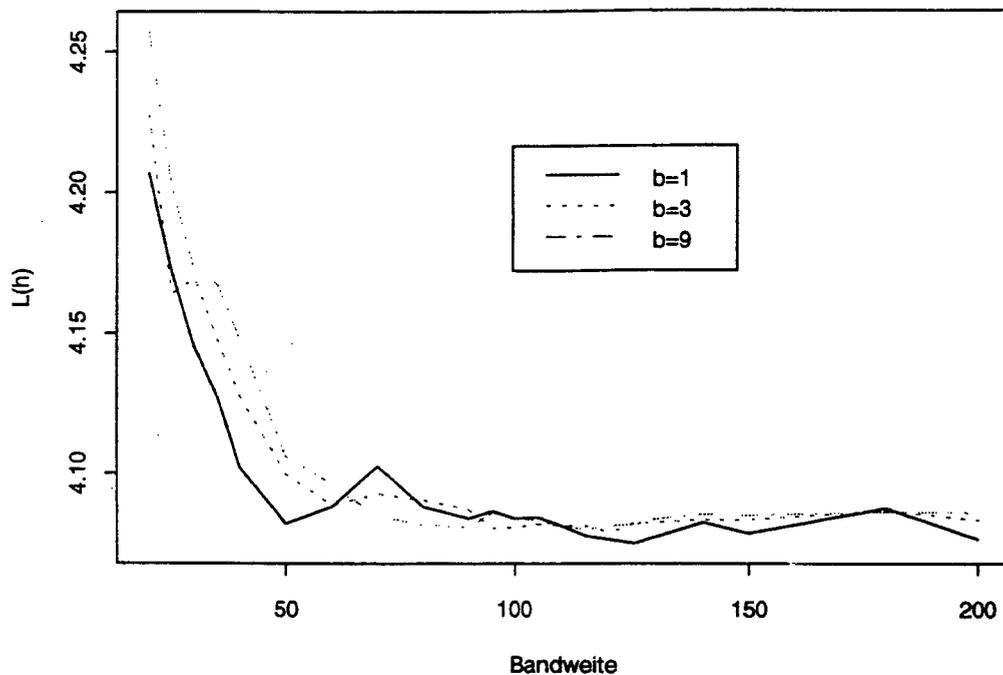


Abbildung 4: Block-Cross-Validation für das 0.75-Quantil



Aktienmarktdaten über QGARCH-Ansätze (quadratic GARCH), einer Variante der GARCH-Modelle. Die Residuen dieser Anpassungen werden dann hinsichtlich der bedingten Schiefe untersucht. Einen Erklärungsbeitrag zum Verhalten der bedingten Schiefe kann der "volatility feedback"-Effekt leisten. Dieser Effekt impliziert, daß die Renditen heute abhängig sind von den zukünftig erwarteten Volatilitäten. Ein Beispiel zeigt die Wirkungsweise dieser Rückkoppelungen: Treffen auf dem Markt negative Informationen ein, fällt der Kurs und die Volatilität steigt. Die erhöhte Volatilität läßt sich für die Zukunft eine starke Volatilität erwarten. Der aktuelle Kurs wird daher weiter fallen. Die Wirkung der negativen Information wird verstärkt. Hohe negative Renditen sind häufiger als hohe positive Renditen und es resultiert eine linksschiefe bedingte Verteilung.

Abbildung 5: Geschätzte bedingte Quantile für tägliche DAX-Renditen

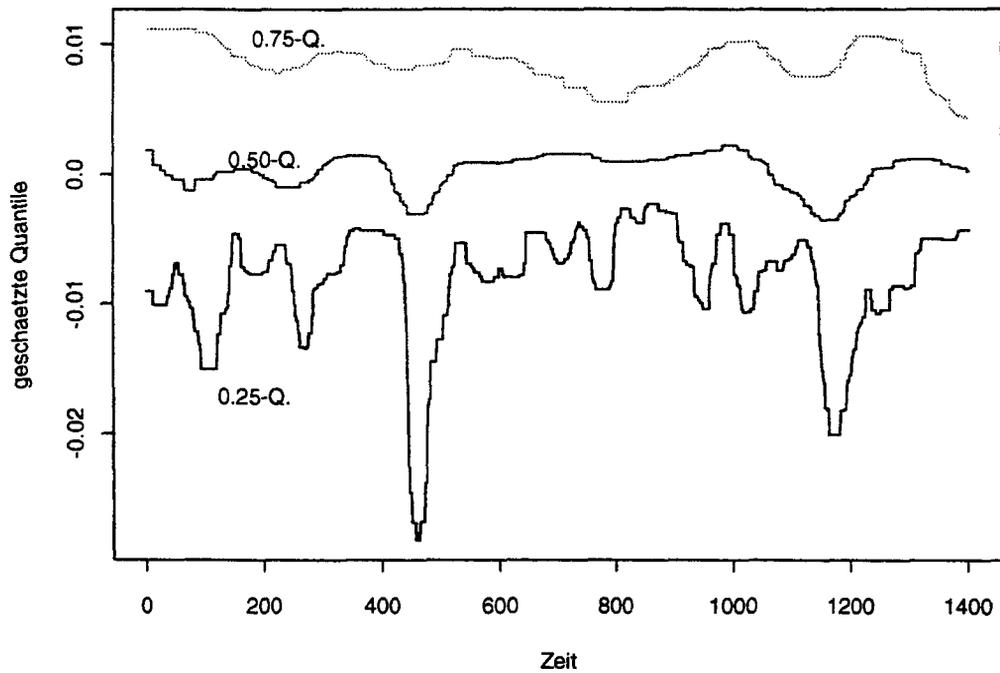
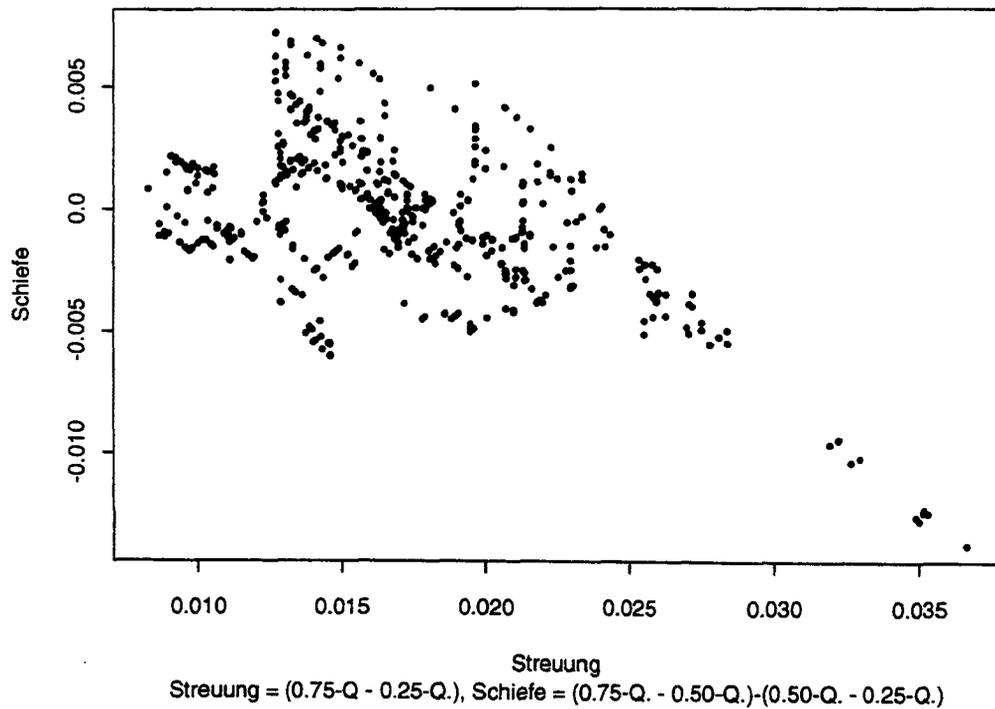


Abbildung 6: Geschätzte Schiefe versus geschätzte Streuung täglicher DAX-Renditen



## 4 Schlußbetrachtung

In diesem Aufsatz wird ein Kernschätzer für bedingte Quantile vorgestellt. Dieser Kernschätzer erweist sich für stark mischende Beobachtungen als streng konsistent. Für Kernschätzungen von großer Bedeutung ist die Bandweitenwahl. Vorgeschlagen wird die Ermittlung der Bandweite über Cross-Validation. Neben der Robustheit von Quantilsschätzungen erweist sich in der Anwendung auf DAX-Renditen die durch Quantile ermöglichte Analyse von Asymmetrien in den Verteilungen als wichtige Eigenschaft. Allein mit der Schätzung bedingter Varianzen werden Asymmetrien nicht sichtbar. Für die DAX-Renditen resultiert ein stark negativer Zusammenhang zwischen bedingter Volatilität und bedingter Schiefe. Ein Phänomen, das teilweise durch den "volatility feedback"-Effekt erklärt werden kann. Zu einer erschöpfenden Erklärung des negativen Zusammenhanges reicht dieser Effekt vermutlich nicht aus.

## 5 Literaturverzeichnis

- Bollerslev T. (1986):** Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- Bollerslev T., Chou R.Y., Kroner K.F. (1992):** ARCH modelling in finance, *Journal of Econometrics* 52, 5-59.
- Bradley R.C., Brye W., Janson S. (1987):** On Dominations between Measures of Dependence, *Journal of Multivariate Analysis*, 23, 312-329.
- Campbell J.Y. , Hentschel L. (1992):** No news is good news, *Journal of Financial Economics* 31, 281-318.
- Engle R.F (1982):** Autoregressive Conditional Heterokedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica* 50, 987-1007.
- Györfi L., Härdle W., Sarda P., Vieu P. (1989):** Nonparametric Curve Estimation from Time Series, *Lecture Notes in Statistics* 60, Springer, Berlin.
- Härdle W. (1989):** Applied nonparametric regression, Cambridge University Press, Cambridge.
- Horváth L., Yandell B.S. (1988):** Asymptotics of Conditional Empirical Processes, *Journal of Multivariate Analysis* 26, 184-206.
- Koenker R, Bassett G. (1978):** Regression Quantiles, *Econometrica* 46, 33-50.
- Koenker R, Portnoy S., Ng P. (1992):** Nonparametric Estimation of Conditional Quantile Functions, in: *L<sub>1</sub>-Statistical Analysis and Related Methods* (ed: Y. Dodge), North-Holland, New York.

**McCabe B., Tremayne A. (1993):** Elements of modern asymptotic theory with statistical applications, Manchester University Press, Manchester.

**Samanta M. (1989):** Non-Parametric Estimation of Conditional Quantiles, *Statistics & Probability Letters* 7, 407-412.

**Stute W. (1986):** Conditional Empirical Processes, *Annals of Statistics*, 14, 638-647.

**Taylor S. (1986):** Modelling Financial Time Series, Wiley, New York.