

Seifert-Vogt, Hans G.

Working Paper

Über optimale Migrationsentscheidungen in einem Multi-Armed-Bandit-Migrationsmodell mit risikoaversen Migranten und variierendem Risiko

Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 55

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Seifert-Vogt, Hans G. (1988) : Über optimale Migrationsentscheidungen in einem Multi-Armed-Bandit-Migrationsmodell mit risikoaversen Migranten und variierendem Risiko, Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 55, Universität Konstanz, Sonderforschungsbereich 178 - Internationalisierung der Wirtschaft, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/101562>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

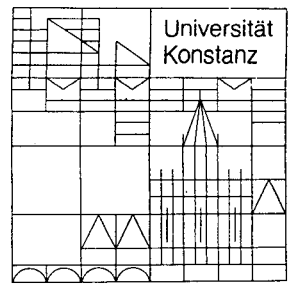
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



Sonderforschungsbereich 178
„Internationalisierung der Wirtschaft“

Diskussionsbeiträge

Juristische
Fakultät

Fakultät für Wirtschafts-
wissenschaften und Statistik

Hans Günther Seifert-Vogt

**Über optimale
Migrationsentscheidungen in einem
Multi-Armed-Bandit-Migrationsmodell
mit risikoaversen Migranten
und variierendem Risiko**

ÜBER OPTIMALE MIGRATIONSENTSCHEIDUNGEN
IN EINEM MULTI-ARMED-BANDIT-MIGRATIONSMODELL MIT RISIKOAVERSEN MIGRANTEN UND
VARIIERENDEM RISIKO

Hans Günther Seifert-Vogt

Serie II - Nr. 55

A 9 2767 / 88
Weltwirtschaft
Kiel

April 1988

ÜBER OPTIMALE MIGRATIONSENTSCHEIDUNGEN IN EINEM
MULTI-ARMED-BANDIT-MIGRATIONSMODELL MIT RISIKO-
AVERSEN MIGRANTEN UND VARIIERENDEM RISIKO

Hans Günther Seifert-Vogt, Konstanz

1. EINLEITUNG

Ausgehend von einem Ansatz von J. McCALL (siehe McCALL/McCALL (1984) und (1987)) ist in BERNINGHAUS/SEIFERT-VOGT (1987) ein spezielles Multi-Armed-Bandit-Modell der internationalen Migration bei unvollständiger Information konstruiert und mit Hilfe der Methode der Gittins-Indices analysiert worden. Hierbei wurde ein Ergebnis hergeleitet, welches auf den ersten Blick einigermaßen überraschend wirkt, nämlich:

Sei α eine für die Entscheidung eines Migranten relevante Variable (z.B. ein Index für Lebensqualität), über deren Ausprägungen in potentiellen Auswanderungsländern l der Migrant nur unvollständig informiert ist, und sei $F_l(\alpha)$ die subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung des Migranten bezüglich α . Ist dann für ein anderes Land k mit gleichen Migrationskosten K die Verteilung $F_k(\alpha)$ riskanter als $F_l(\alpha)$, so ist ceteris paribus, das Land k mindestens so attraktiv für eine Einwanderung wie das Land l , und bei nicht zu hohen Kosten K der Migration sogar echt attraktiver.

(vgl. in BERNINGHAUS/SEIFERT-VOGT (1987) Fact 3). Noch überraschender erscheint dieses Resultat, wenn man es folgendermaßen interpretiert (Vgl. ibid. Fact 4):

Wenn ein Migrant über die Variable α in einem Land k weniger informiert ist als über die betreffende Variable in Land l , dann wird er ceteris paribus die Migration nach k mindestens so attraktiv finden wie die Migration nach l , und bei genügend kleinem K sogar echt attraktiver

Folgende "Erklärung" wurde ibid. für dieses Resultat angeboten: Eine riskantere Verteilung gibt einem risikoneutralen Migranten - und als solcher ist er in jenem Modell angenommen worden - die Chance, höhere und niedrigere Nettoerträge zu erhalten. Da der Migrant seine Migrationsentscheidung aber revidieren kann - und zwar ohne zusätzliche Kosten - wenn sich für ihn ungünstige Werte von α einstellen, ist es klar - eben wegen der Risikoneutralität -, daß er zwischen ansonsten zwei vollkommen identischen Ländern jenes mit dem größeren Risiko ausprobiert.

In diesem Paper soll nun untersucht werden, ob bzw. inwieweit sich diese Aussagen ändern, wenn im Modell der risikoneutrale Migrant durch einen risikoscheuen Migrant ersetzt wird.

Aus Gründen der Vollständigkeit wird zunächst das Modell noch einmal in seinen wesentlichen Details dargestellt; (in 2.). In Abschnitt 3 wird eine Grenzwertbetrachtung angestellt, die zeigen soll, daß die o.e. Aussagen auch für risikoaverse Migranten gelten, vorausgesetzt der Grad der Risikoaversion tendiert in Richtung auf Risikoneutralität.

In Abschnitt 4 wird versucht, (mit z.T. mühsamen Rechnungen) den Zusammenhang zwischen Migrationskosten, Grad der Risikoaversion und Grad der Unsicherheit über α näher zu

beleuchten. Es können zwar einige interessante und plausible solche Zusammenhänge aufgezeigt werden - doch (leider!) hat es sich als unmöglich herausgestellt, Zusammenhänge zu finden, die sich in schöner eindeutiger Weise formulieren ließen. Die wesentlichen Ergebnisse und Erkenntnisse werden in Abschnitt 5 zusammengefaßt.

Es sei darauf hingewiesen, daß nach Kenntnis der Literatur zu dem in diesem Paper behandelten Problemkreis noch keine Untersuchungen existieren. (Für einen Literaturüberblick, in welchem die Zusammenhänge zu dem hier behandelten Modellansatz herausgestrichen werden, sei auf den Arbeits- und Ergebnis-Bericht für den Forschungszeitraum 1986-1988 des Teilprojekts A6 "Migration" im SFB 178, Universität Konstanz, verwiesen, und zwar speziell dort auf Abschnitt 4).

2. DAS MULTI-ARMED-BANDIT-MIGRATIONSMODELL

Betrachtet wird ein Migrant, welcher in eines von L Ländern "wandern" kann, indiziert durch $l=1, \dots, L$; (hierbei wird das Heimatland als das Land $l=1$ mitgezählt). Drei Komponenten werden als für die Migrationsentscheidung relevant unterstellt: 1) das Pro-Perioden-Einkommen w_l , 2) die Wanderungskosten K_l , die nur (!) anfallen, wenn i das 1. Mal in das Land l wandert, (man hat sich unter K_l Opportunitätskosten der Informationsbeschaffung vorzustellen); und 3) die Lebensqualität in l , von der angenommen wird, daß sie durch eine reelle Zahl $\alpha_l \in [0,1]$ darstellbar ist.

Es wird ein unendlicher Planungshorizont unterstellt. Wesentlich sind nun - neben der Ertrags- und Kostenstruktur - noch die folgenden Voraussetzungen: In jeder Periode t

kann i in genau nur einem Land l leben, und jeweils vor jeder neuen Periode $t+1$ muß er sich entscheiden zwischen "noch eine Periode in l bleiben" und "in ein anderes Land $l' \neq l$ wandern". i ist zum Zeitpunkt 0 vollständig über alle w_1 und alle K_1 informiert. Bezüglich jedes α_1 besitzt i zum Zeitpunkt 0 eine subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung F_1 . Hat i in einer Periode t in l gelebt, so ist er in allen folgenden Perioden $t+1, t+2, \dots$ über dieses α_1 vollständig informiert. Da er zu Beginn im Heimatland $l=1$ lebt, kennt er also α_1 von Anfang an exakt. Vermöge einer VON NEUMANN-MORGENSTERN-Nutzenfunktion u können i 's Bewertungen der α_1 in die Einkommensdimension der w_1 und K_1 umgerechnet werden, d.h. bekommt i in einer Periode t das Einkommen y_1 und erlebt er die Lebensqualität α_1 , so läßt sich dieses Ergebnis durch den Nutzenindex $w_1 + u(\alpha_1)$ bewerten. Die Zeitpräferenzen von i werden durch einen Diskontierungsfaktor β dargestellt.

Dieses Szenario eines Migrationsentscheidungsproblems läßt sich durch folgendes spezielles Multi-Armed-Bandit-Modell erfassen: Die "Arme" l werden mit den Ländern l identifiziert und man setzt für die Zustandsräume:

$$S_1 := \{\alpha_1\} \text{ und } S_l := \{\bar{s}_l\} \cup \{\alpha_l; \alpha_l \in [0,1]\}, \quad (l=2, \dots, L),$$

wobei \bar{s}_l als der Zustand "i wandert das 1. Mal nach l " zu interpretieren ist. Die Ertragsfunktionen sind durch

$$r_l(s_l) = \begin{cases} w_1 + u(\alpha_l), & \text{falls } s_l = \alpha_l \\ w_1 - K_l, & \text{falls } s_l = \bar{s}_l \end{cases}$$

und die Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$$q_1(s_1 | s_1) = \begin{cases} F_1'(\alpha_1), & \text{falls } s_1 = \alpha_1 \\ 0, & \text{falls } s_1 \neq \alpha_1 \end{cases}$$

bzw.

$$q_1(s_1 | \alpha_1) = \begin{cases} 1, & \text{falls } s_1 = \alpha_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Das optimale Entscheidungsverhalten des Migranten i lässt sich dann in diesem Modell mittels der Methode der Gittins-Indices darstellen. Diese besteht in ihrem Kern aus folgendem; (für eine ausführliche Darstellung siehe z.B. BERNINGHAUS (1984) und/oder BERNINGHAUS/SEIFERT-VOGT (1987)): Für jedes Land l und für jeden Zustand $s_l \in S_l$ des l -ten "Armes" wird eine Zahl $Z_l(s_l)$ - nämlich der zugehörige Gittins-Index - bestimmt, so daß die optimale Reihenfolge des "Ausprobierens" verschiedener Länder gemäß der Regel festgelegt werden kann:

Wenn am Ende von Periode $t-1$ die Zustände der Länder durch $s=(s_1, \dots, s_l, \dots, s_L)$ gegeben sind, so soll in Periode t nach dem Land l^* migriert werden, für welches der Gittins-Index $Z_{l^*}(s_{l^*})$ am höchsten ist.

Mit Hilfe der WHITTLE'schen Funktionalgleichungen erhält man die folgenden Formeln für die Gittins-Indices des Migrationsmodells:

Lemma 1: a) Für $l=1, \dots, L$ und $s_l = \alpha$ ist

$$Z_l(\alpha) = \frac{1}{1-\beta} (w_l + u(\alpha))$$

1) F_1' bezeichnet die Dichtefunktion von α_1 ; insofern ist $q_1(\cdot | s_1)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

b) Für $l=2, \dots, L$ und $s_1 = \bar{s}_1$ ist der Gittins-Index $\bar{Z}_1 = Z_1(\bar{s}_1)$ die Lösung der Funktionalgleichung.

$$(1) \quad z = w_1 - K_1 + \beta \int_0^1 \max\left\{z, \frac{w_1 + u(\alpha)}{1-\beta}\right\} dF_1(\alpha)$$

für $z \in \mathbb{R}$.

Die in der Einleitung erwähnten Aussagen über den Zusammenhang zwischen "Risiko" eines Landes l und dessen Attraktivität für einen Migranten basieren auf Aussagen über das Verhalten des Gittins-Index \bar{Z}_1 bei "Mean-Preserving-Spread"-Variationen von F_1 , und diese Aussagen wiederum basieren auf der Analyse der Funktionalgleichung (1) - in der genannten Arbeit speziell für lineare Nutzenfunktionen $u(\alpha) = \alpha$.

Für die Analysen dieses Papers stellt weiterhin die Gleichung (1) die entscheidende Relation dar.

3. ÜBER DAS VERHALTEN DES GITTINS-INDEX Z_1 BEI SICH VERGRÖßERNDEN RISIKO UND FAST-RISIKO-NEUTRALEN RISIKO-AVERSEN MIGRANTEN: EINE LIMES-BETRACHTUNG²⁾

Im folgenden bezeichnen wir mit u^* eine lineare Nutzenfunktion der Gestalt $u^*(\alpha) = a + b\alpha$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$). Weiter betrachten wir zwei Länder $l, k \in \{2, \dots, L\}$ mit $w_1 = w_k =: w$, $K_1 = K_k$ und zugehöriger Verteilungsfunktion F_1 resp. F_k von α , und es sei F_1 riskanter als F_k i.S. des Mean-Preserving-Spread-Kriteriums (ROTHSCHILD/STIGLITZ (1970)). Dies impliziert

$$(2) \quad \int_0^1 g(\alpha) dF_1(\alpha) > \int_0^1 g(\alpha) dF_k(\alpha)$$

für alle strikt konvexen Funktionen $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

2) Dieser Abschnitt beruht auf einer Idee von S. BERNINGHAUS!

Dann basiert die Aussage, daß für einen Migranten mit (linearer) Nutzenfunktion u^* das Land 1 ceteris paribus attraktiver als das Land k ist, i.S. von

$$(3) \quad \bar{Z}_1^* > \bar{Z}_k^*$$

(\bar{Z}_j^* bezeichnet im folgenden den Gittins-Index $Z_j(\bar{s}_1)$ für den Entscheider mit Nutzenfunktion u^*), auf folgendem Argument: Offensichtlich ist der Integrand in (1) für jedes z eine strikt konvexe Funktion von α . Also ist wegen (2) für jedes z die rechte Seite von (1) für F_1 strikt größer als für F_k . Dies impliziert (3) für solche Kosten, die nicht zu hoch sind; (sonst bleibt $\bar{Z}_1^* = \bar{Z}_k^*$).

Man bemerkt, daß dieses Argument a fortiori gültig ist, wenn statt u^* eine konvexe Nutzenfunktion eines risikofreudigen Migranten zugrundegelegt wird.

Falls aber u konkav ist, läßt sich generell nichts mehr über die Veränderung der rechten Seite von (1) aussagen. Betrachten wir aber eine Folge (u_n) von Nutzenfunktionen mit den Eigenschaften

$$(I) \quad u_n \text{ konkav}$$

$$(II) \quad u_{n+1}(\alpha) \geq u_n(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

$$(III) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\alpha) = u^*(\alpha) \text{ für (fast alle) } \alpha \in [0,1].$$

(Beispielsweise würde

$$u_n(\alpha) := -e^{-n\alpha} + b\alpha, \quad n \in \mathbb{N}$$

diese Bedingungen erfüllen).

Aus (II) und (III) folgt, daß für jedes z die Folge von Funktionen $\max\{z, (w+u_n(\alpha))/(1-\beta)\}$, $n \in \mathbb{N}$, die Voraussetzun-

gen des Satzes von LEBESGUE (über die monotone Konvergenz) erfüllt. Also gilt für jedes z :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \max \left\{ z, \frac{w+u_n(\alpha)}{1-\beta} \right\} dF_j(\alpha) = \int_0^1 \max \left\{ z, \frac{w+u^*(\alpha)}{1-\beta} \right\} dF_j(\alpha)$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z}_j^{(n)} = \bar{Z}_j^*$ für $j=1, k$. (Hierbei bezeichnet $\bar{Z}_j^{(n)}$ den Gittins-Index $Z_j(\bar{s}_j)$ eines Entscheiders mit Nutzenfunktion u_n).

Damit ist gezeigt:

Proposition 1: Gegeben eine Folge von Nutzenfunktionen (u_n) mit den Eigenschaften (I), (II) und (III). Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$:

$$(4) \quad \bar{Z}_l^{(n)} > \bar{Z}_k^{(n)}$$

Das bedeutet: Wenn ein Migrant i risiko-avers ist, aber dabei nicht allzusehr verschieden von einem risiko-neutralen Migranten i' ist, und wenn für i' das Land l mit dem größeren Risiko attraktiver ist als das Land k , dann ist l auch für i attraktiver als k .

4. ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN MIGRATIONSKOSTEN, GRAD DER RISIKOAVERSION UND GRAD DER UNSICHERHEIT UND ATTRAKTIVITÄT EINES LANDES

4.1. Vorbemerkungen

Es ist das Anliegen dieses Abschnitts, die in der Überschrift genannten Zusammenhänge näher zu bestimmen. Hierbei konzentrieren wir uns auf den folgenden Spezialfall des Multi-Armed-Bandit-Migrationsmodells: Es werden nur $L=2$ Länder betrachtet, nämlich $l=1$, das Heimatland, und $l=2$, das potentielle Einwanderungsland. Letzteres sei

durch ein Einkommen w , Migrationskosten K und die Schar $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ von Rechteck-Verteilungsfunktionen für die Lebensqualität α charakterisiert, mit

$$(5) \quad F_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \alpha < \bar{\alpha} - \varepsilon \\ \frac{\alpha - \bar{\alpha} + \varepsilon}{2\varepsilon}, & \bar{\alpha} - \varepsilon \leq \alpha < \bar{\alpha} + \varepsilon \\ 1, & 1 \geq \alpha \geq \bar{\alpha} + \varepsilon \end{cases}$$

mit $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ und $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon} := \min(\bar{\alpha}, 1 - \bar{\alpha})$.

Die auf $\bar{\alpha}$ konzentrierte Verteilungsfunktion F_0 wird als Sicherheitsfall tituliert. $\varepsilon > 0$ wird als Grad der Unsicherheit des Migranten bez. α bezeichnet. Offensichtlich ist für $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \bar{\varepsilon}$ die Verteilung F_{ε_2} ein Mean-Preserving-Spread der Verteilung F_{ε_1} .

Des Weiteren wird vorausgesetzt: Die Präferenzen des Migranten bezüglich α sind durch eine VON NEUMANN-MORGENSTERN-Nutzenfunktion $u: [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $u(\bar{\alpha}) = 0$, u zunehmend und strikt konkav und zweimal stetig differenzierbar darstellbar.

Mit $v(z) = 0$ bzw. $= 1$ falls $z(1 - \beta) - w < u(0)$ bzw. $> u(1)$ und $v(z)$ für alle übrigen z durch

$$(6) \quad u(v(z)) = z(1 - \beta) - w$$

definiert, läßt sich Gleichung (1) äquivalent umformen zu

$$(7) \quad z = f_\varepsilon(z) := \frac{w - K}{1 - \beta} - \frac{\beta}{(1 - \beta)^2} (z(1 - \beta) - w) (1 - F_\varepsilon(v(z))) \\ + \frac{\beta}{(1 - \beta)^2} \int_{v(z)}^1 u(\alpha) dF_\varepsilon(\alpha)$$

Die Attraktivität von Land 2 wird dann durch den Gittins-Index Z_ε dargestellt, welcher die Lösung der Funktional-

gleichung (1) resp. deren äquivalenter Gleichung (7) ist, d.h. Z_ε ist durch

$$(8) \quad Z_\varepsilon = f_\varepsilon(Z_\varepsilon)$$

gegeben.

Das Hauptinteresse liegt nun im folgenden auf Aussagen über Eigenschaften der Funktion f_ε und über deren Verhalten bei variierendem Unsicherheitsgrad ε .

4.2. Über die Gestalt von f_ε

Zunächst bemerken wir:

Lemma 2: f_ε ist nicht zunehmend, genauer: Für alle z mit $F_\varepsilon(v(z)) < 1$ ist f_ε abnehmend und für alle z mit $F(v(z)) = 1$ konstant $= (w-k)/(1-\beta)$.

Beweis: Für $z \leq \underline{z}$ mit $u(v(\underline{z})) = \bar{\alpha} - \varepsilon$ ist $f_\varepsilon(z) =$ (eine von z unabhängige Konstante) $- \beta/(1-\beta)z$, also abnehmend. Für $\underline{z} < z < \bar{z}$, mit $u(v(\bar{z})) = \bar{\alpha} + \varepsilon$ ist $f_\varepsilon(z)$ differenzierbar mit $f_\varepsilon'(z) = -\beta/(1-\beta)(1-F(u(z)))$, also f_ε abnehmend. Für $z \geq \bar{z}$ ist $F(v(z)) = 1$ und damit $f_\varepsilon(z) = (w-K)/(1-\beta)$. Wegen der Stetigkeit von f_ε in den Punkten \underline{z} und \bar{z} folgt dann die Behauptung.

Korollar 1: Für alle z mit $\underline{z} < z < \bar{z}$, wobei

$$(9) \quad \left[\begin{array}{l} z = z(\varepsilon) = \frac{w}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} u(\bar{\alpha} - \varepsilon) \quad (\Leftrightarrow u(v(z)) = \bar{\alpha} - \varepsilon) \\ - - - - - \\ z = z(\varepsilon) = \frac{w}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} u(\bar{\alpha} + \varepsilon) \quad (\Leftrightarrow u(v(z)) = \bar{\alpha} + \varepsilon) \end{array} \right.$$

ist $f_\varepsilon(z)$ strikt konvex.

Beweis: Im Intervall (z, \bar{z}) ist f_ε zweimal stetig differenzierbar und es gilt: $f_\varepsilon''(z) = \beta/(1-\beta)F'(v(z))v'(z)$. Da $F'(v(z)) = 1/2\varepsilon$, und $v'(z) = (1-\beta)/u'(v(z)) > 0$, folgt: $f_\varepsilon''(z) > 0$.

Somit hat f_ε folgenden Verlauf:

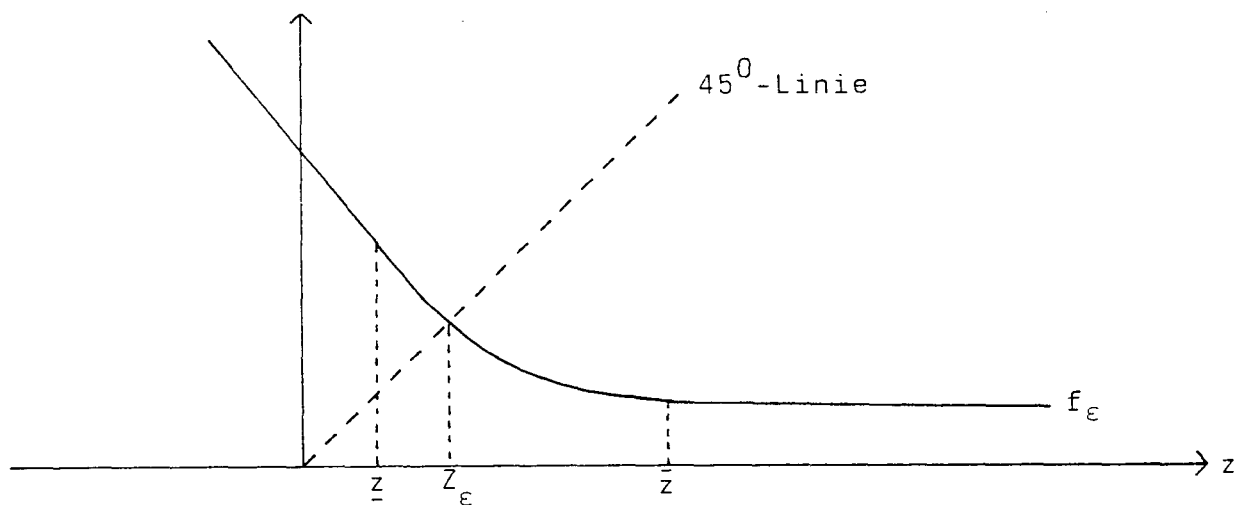


Fig. 1

Speziell für die Funktion im Sicherheitsfall, d.h. bei auf $\bar{\alpha}$ konzentrierter Verteilungsfunktion F_0 erhalten wir:

Lemma 3: Die zur bei $\bar{\alpha}$ degenerierten Verteilungsfunktion F_0 gehörende Funktion f_0 hat folgende Gestalt (vgl. Fig. 2):

$$(10) \quad f_0(z) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1-\beta}z - \frac{K}{1-\beta} + \frac{w}{(1-\beta)^2}, & z < \frac{w}{1-\beta} \\ \frac{w-K}{1-\beta}, & z \geq \frac{w}{1-\beta} \end{cases}$$

Beweis: Für $z < \frac{w}{1-\beta}$ ist $u(v(z)) = z(1-\beta) - w < 0$ resp. $v(z) < \bar{\alpha}$ und somit $F(v(z)) = 0$ und $\int_{v(z)}^1 u(\alpha) dF(\alpha) = u(\bar{\alpha}) = 0$.

Für $z \geq \frac{w}{1-\beta}$ ist $u(v(z)) = z(1-\beta) - w \geq 0$ resp. $v(z) \geq \bar{\alpha}$ und somit $F(v(z)) = 1$ und $\int_{v(z)}^1 u(\alpha) dF(\alpha) = 0$. Aus (7) ergibt sich dann die behauptete Gestalt von f_0

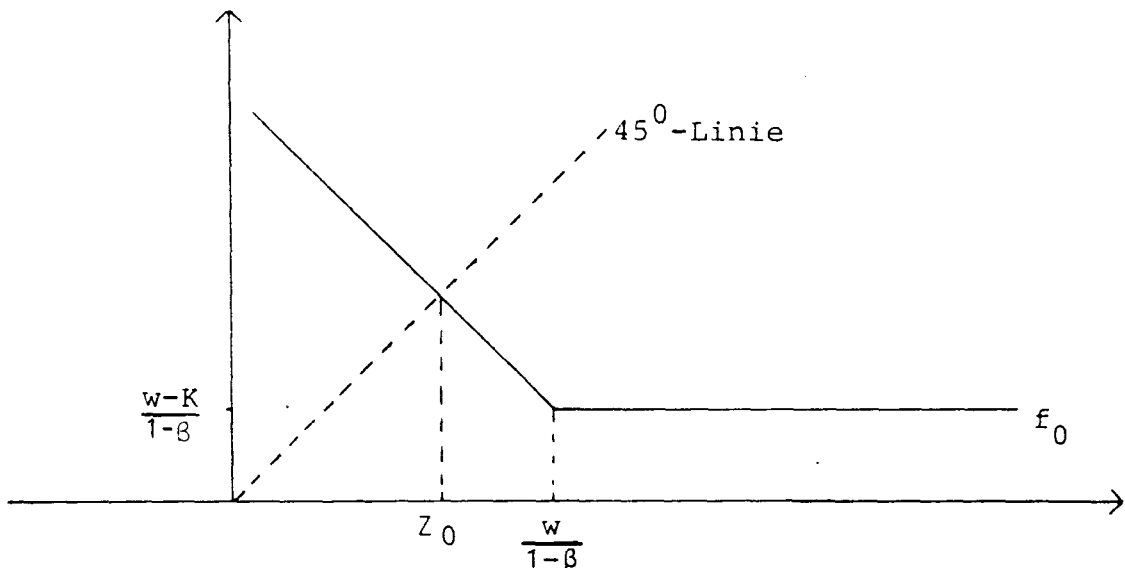


Fig. 2

Korollar 2: Der "Kein-Risiko"-Gittins-Index Z_0 ist gegeben durch

$$(11) \quad Z_0 = \frac{w}{1-\beta} - K$$

Beweis: Da der Schnittpunkt von f_0 mit der 45°-Linie stets im nicht-konstanten Teil von f_0 liegt, ist Z_0 durch $-\beta/(1-\beta)Z_0 - K/(1-\beta) + w/(1-\beta)^2 = Z_0$ determiniert, also durch (11).

Für beliebige Rechteck-Verteilungsfunktionen F_ε gemäß (5) läßt sich die Funktion f_ε offensichtlich stückweise stetig darstellen in der Gestalt:

$$(12) \quad f_\varepsilon(z) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1-\beta} z - \frac{K}{1-\beta} + \frac{w}{(1-\beta)^2} + \int_0^1 u(\alpha) dF_\varepsilon(\alpha) & \text{für } z < z(\varepsilon) \\ \approx f_\varepsilon(z) & \text{für } z(\varepsilon) \leq z < \bar{z}(\varepsilon) \\ \frac{w-K}{1-\beta} & \text{für } z \geq \bar{z}(\varepsilon) \end{cases}$$

mit einer wegen Korollar 1 strikt konvexen Funktion \tilde{f}_ε . Speziell der Funktion $\tilde{f}_\varepsilon(z)$ wird im folgenden das Hauptinteresse gelten.

4.3. Über den Zusammenhang zwischen Migrationskosten und Unsicherheitsgrad, und der Attraktivität des Gastlandes

Gesucht sind Aussagen über die Bedingungen für eine der Relationen $Z_\varepsilon > Z_0$ oder $Z_\varepsilon < Z_0$ (für $\varepsilon > 0$). Das folgende Lemma zeigt, daß wir uns hierbei auf die Untersuchung der Relation zwischen $f_\varepsilon(Z_0)$ und Z_0 beschränken können.

Lemma 4: $Z_\varepsilon \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} Z_0 \iff f_\varepsilon(Z_0) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} Z_0$

Beweis: Sei $Z_\varepsilon = Z_0$, dann ist $Z_0 = f_\varepsilon(Z_\varepsilon) = f_\varepsilon(Z_0)$; und umgekehrt: wenn $f_\varepsilon(Z_0) = Z_0$, dann muß, weil $f_\varepsilon = \tilde{f}_\varepsilon$ abnehmend ist, $Z_0 = Z_\varepsilon$ ist.

Falls $Z_\varepsilon > Z_0$, dann ist $Z_0 < Z_\varepsilon = f_\varepsilon(Z_\varepsilon) < f_\varepsilon(Z_0)$, und umgekehrt; wenn $f_\varepsilon(Z_0) > Z_0$, und $Z_0 \geq Z_\varepsilon$ wäre, dann wäre $f_\varepsilon(Z_0) \geq f_\varepsilon(Z_\varepsilon) = Z_\varepsilon \leq Z_0$, d.h. es ergäbe sich ein Widerspruch.

Da wegen (6) und (11) gilt

$$(13) \quad u(v_0) = -K(1-\beta) \text{ mit } v_0 := v(Z_0)$$

können wir $f_\varepsilon(Z_0)$ zerlegen in

$$(14) \quad f_\varepsilon(Z_0) = Z_0 + \frac{\beta}{1-\beta} g(K, \varepsilon),$$

mit

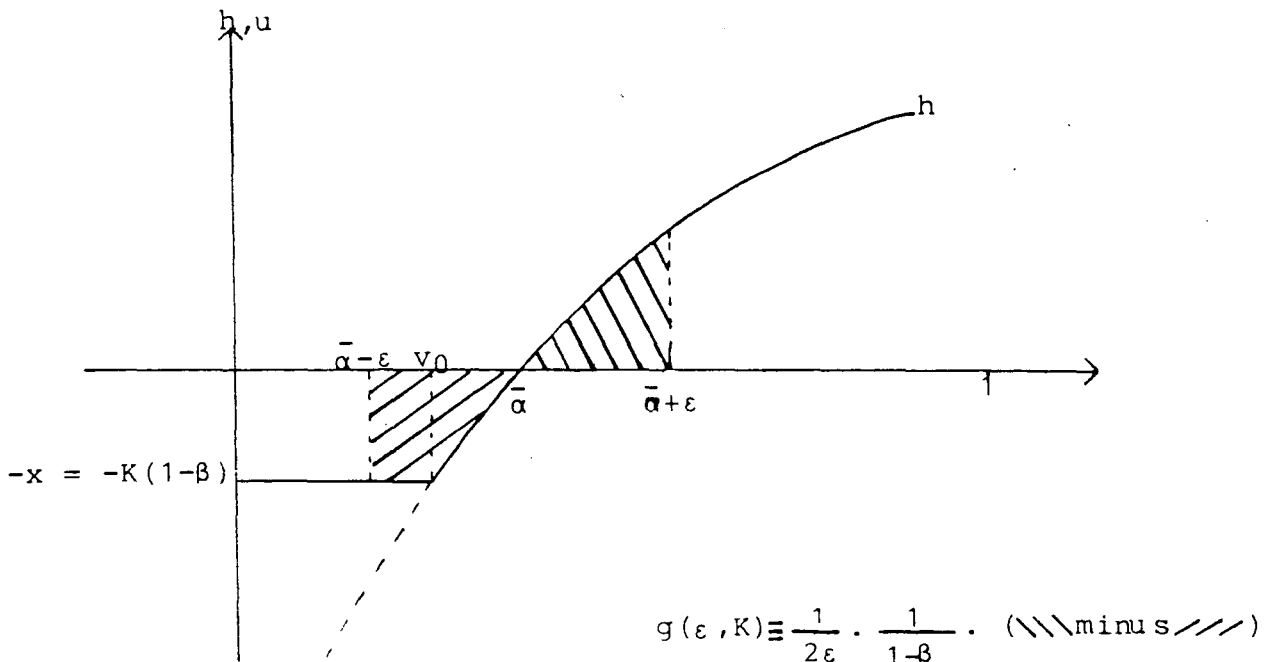
$$(15) \quad g(K, \varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{1-\beta} \int_{\bar{\alpha}-\varepsilon}^{\bar{\alpha}+\varepsilon} h(\alpha) d\alpha$$

und

$$(16) \quad h(\alpha) := \begin{cases} -K(1-\beta) & \text{für } \alpha \leq v_0 \\ u(\alpha) & \text{für } \alpha \geq v_0 \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung diene die folgende

Figur 3: Die in (16) resp. (15) definierten Funktionen g und h



Die weiteren Schritte unserer Analyse basieren auf folgender Feststellung, die sich aus dem obigen unmittelbar ergibt.

Lemma 5: Es ist $Z_\varepsilon \stackrel{>}{<} Z_0$ genau dann wenn $g(K, \varepsilon) \stackrel{>}{<} 0$ ist.

Wir wollen dann in der Menge $X := \{(\varepsilon, K) : 0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}, K \geq 0\}$ die Gestalt der Mengen

$$G_+ := \{(\varepsilon, K) \in X : g(K, \varepsilon) > 0\}$$

$$G_- := \{(\varepsilon, K) \in X : g(K, \varepsilon) < 0\}$$

studieren. Zunächst halten wir fest:

Lemma 6: Die Menge $X_1 := \{(\varepsilon, K) \in X : u(\bar{\alpha} - \varepsilon) \geq -K(1 - \beta)\}$ ist in G_- enthalten.

Beweis: Die Relation $u(\bar{\alpha} - \varepsilon) \geq -K(1 - \beta)$ ist äquivalent zu $v_0 \leq \bar{\alpha} - \varepsilon$; (vgl. (13)). Also ist $h(\alpha) = u(\alpha)$ für alle $\alpha \in [\bar{\alpha} - \varepsilon, \bar{\alpha} + \varepsilon]$. Da u strikt konkav ist, folgt dann aus der JENSEN'schen Ungleichung und (15): $g(K, \varepsilon) < 0$.

Hieraus ergibt sich

Proposition 2: Falls bei gegebenem Unsicherheitsgrad

$0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ die Migrationskosten K so hoch sind, daß die Relation $u(\bar{\alpha} - \varepsilon) \geq -K(1 - \beta)$ gilt, dann ist das Gastland bei Sicherheit attraktiver als das Gastland mit Unsicherheitsgrad ε , also: $Z_0 > Z_\varepsilon$.

Das andere Extrem ist der Grenzfall "Migrationskosten $K=0$ ". Hierfür gilt

Proposition 3: Sind die Migrationskosten $K=0$, so gilt für jeden Unsicherheitsgrad $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$: Das Gastland mit Unsicherheit ε ist attraktiver als das Gastland mit Sicherheit, also: $Z_0 < Z_\varepsilon$.

Beweis: Bei $K=0$ folgt aus (13) $v_0 = \bar{\alpha}$, (da $u(\bar{\alpha})=0$), und wegen (16): $h(\alpha)=0$ für $\alpha \leq \bar{\alpha}$ und $h(\alpha) > 0$ für $\alpha > \bar{\alpha}$. Also ist wegen (15) $g(0, \varepsilon) > 0$.

Technisch läßt sich Proposition 3 auch so ausdrücken: Die Linie $\{(0, \varepsilon); 0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}\}$ gehört zur Menge G_+ . Wir wollen nun untersuchen, wie die Trennlinie

$$G_0 := \{(\varepsilon, K) \in X: g(K, \varepsilon) = 0\}$$

in der Menge

$$X_2 := X \setminus X_1 = \{(\varepsilon, K) \in X: u(\bar{\alpha} - \varepsilon) < -K(1-\beta)\}$$

verläuft. Hierzu schreiben wir $g(K, \varepsilon)$ in der Form

$$(17) \quad g(K, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (-K(v_0(K) - \bar{\alpha} + \varepsilon)) + \frac{1}{1-\beta} \int_{v_0(K)}^{\bar{\alpha} + \varepsilon} u(\alpha) d\alpha$$

und betrachten die explizite funktionale Darstellung $k: [0, \bar{\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}$ von G_0 , welche durch $g(k(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ bzw. für $\varepsilon > 0$ durch die Gleichung

$$(18) \quad k(\varepsilon)(1-\beta)(v_0(k(\varepsilon)) - \bar{\alpha} + \varepsilon) = \int_{v_0(K(\varepsilon))}^{\bar{\alpha} + \varepsilon} u(\alpha) d\alpha$$

gegeben ist.

Lemma 7: Die Funktion k ist stetig differenzierbar und es gilt $k'(\varepsilon) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Außerdem ist $k(0) = 0$.

Beweis: a) $k(\varepsilon)$ ist eindeutig definiert: Für jedes ε ist $g(0, \varepsilon) > 0$ und $g(\hat{K}, \varepsilon) < 0$ für $\hat{K} = 1/(1-\beta)u(\bar{\alpha}-\varepsilon)$; (vgl. Prop. 2 und 3). Da $g(\cdot, \varepsilon)$ stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $k(\varepsilon)$ mit $g(k(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Außerdem ist $\delta/\delta K g(K, \varepsilon) = 1/2\varepsilon(-(v_0(K) - \bar{\alpha} + \varepsilon) - Kv_0'(K) - 1/(1-\beta)u(v_0(K)) \cdot v_0'(K)) = -1/2\varepsilon(v_0(K) - \bar{\alpha} + \varepsilon)$, wegen (13). Für (ε, K) in X_2 ist daher $g(\cdot, \varepsilon)$ abnehmend, also ist $k(\varepsilon)$ eindeutig bestimmt.

b) Die Anwendung des Impliziten-Funktionen-Theorems liefert, daß k für $\varepsilon > 0$ stetig differenzierbar ist, und durch implizites Differenzieren von (18) erhalten wir

$k'(\varepsilon)(1-\beta)(v_0(k(\varepsilon)) - \bar{\alpha} + \varepsilon) + k(\varepsilon)(1-\beta)(v_0'(k(\varepsilon))k'(\varepsilon) + 1) = u(\bar{\alpha} + \varepsilon) - u(v_0(k(\varepsilon)))v_0'(k(\varepsilon))k'(\varepsilon)$ bzw. wegen $u(v_0(k(\varepsilon))) = -k(\varepsilon)(1-\beta)$, (vgl. (13)): $k'(\varepsilon)(1-\beta)(v_0(k(\varepsilon)) - \bar{\alpha} + \varepsilon) = u(\bar{\alpha} + \varepsilon) - (1-\beta)k(\varepsilon)$. Da $(\varepsilon, k(\varepsilon)) \in X_2$, ist $v_0(k(\varepsilon)) - \bar{\alpha} + \varepsilon > 0$. Somit ist

$$(19) \quad \text{sign } k'(\varepsilon) = \text{sign } (u(\bar{\alpha} + \varepsilon) - (1-\beta)k(\varepsilon))$$

Da - wie unter c) noch gezeigt wird - $k(0) = 0$ ist, und - wie unmittelbar einsichtig - die Kurve $u(\bar{\alpha} + \varepsilon) - (1-\beta)K = 0$ in X_2 liegt und dort positiven und gegen die ε -Achse strikt konkaven Verlauf besitzt, muß $k(\varepsilon)$ stets unterhalb dieser Kurve liegen. Also ist wegen (19) $k'(\varepsilon) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$; (vgl. Figur 4).

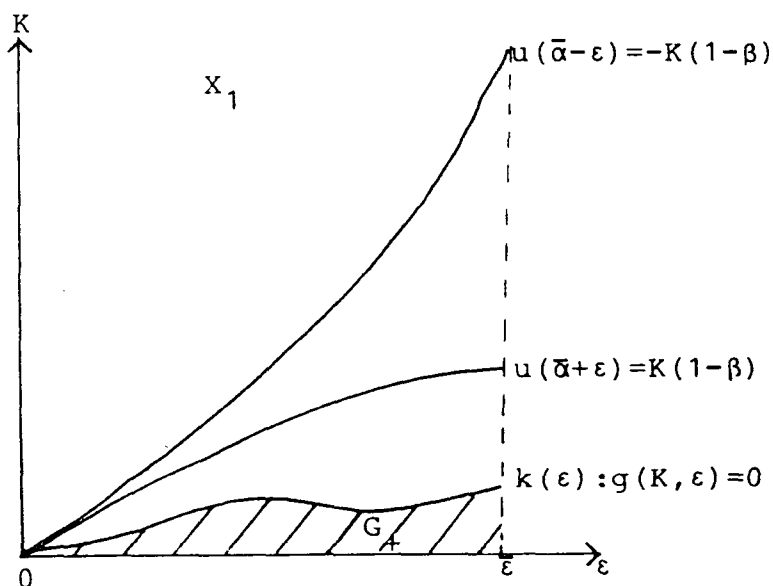
c) Zum Beweis von $k(0) = 0$ bilden wir mit Hilfe der Regel von l' Hospital den Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(K, \varepsilon) = 1/2 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ der Ableitung nach ε des Zählers von $g(K, \varepsilon)$ in (17) $= 1/2 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-K + 1/(1-\beta)u(\bar{\alpha} + \varepsilon)) = 1/2(-K)$, da $u(\bar{\alpha}) = 0$. Also ist $K = 0$ die Lösung von $g(K, 0) = 0$, d.h. $K(0) = 0$.

Damit erhalten wir:

Proposition 4: Es gibt eine zunehmende Funktion

$k: [0, \bar{\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $k(0)=0$, so daß die Menge der Kombinationen (K, ε) in X durch k in zwei Teilmengen G - und G_+ zerlegt wird (vgl. Abb. 4) mit der Eigenschaft:

- Für alle $(K, \varepsilon) \in G$ gilt: Für den Migranten ist Sicherheit bezüglich α attraktiver als Unsicherheit vom Grad ε .
- Für alle $(K, \varepsilon) \in G_+$ gilt: Für den Migranten ist Unsicherheit bezüglich α vom Grad ε attraktiver als Sicherheit.



Figur 4

Durch die Funktion k wird also für jeden Unsicherheitsgrad ε jener kritische Kostenwert $k(\varepsilon)$ bestimmt, unterhalb dessen sich für den Migranten das Ausprobieren des

Landes eher "lohnt", wenn er bezüglich α unsicher ist, als wenn er α genau kennt.

Leider erscheint es unmöglich, für die zweite Ableitung von k ein eindeutiges Vorzeichen zu bestimmen, so daß offenbleiben muß, ob k einen konvexen oder konkaven Verlauf hat. Immerhin zeigt der Beweis des letzten Lemmas die Verschärfung der Aussage von Proposition 2, nämlich:

Korollar 3: Für gegebenes ε ist die Attraktivität des Gastlandes bei Sicherheit bereits dann größer als bei Unsicherheitsgrad ε , wenn die aufdiskontierten Migrationskosten $K(1-\beta)$ mindestens so hoch sind wie der maximale Nutzengewinn $u(\bar{\alpha}+\varepsilon)$.

Eine zusätzliche Schranke für die Migrationskosten, über welcher Sicherheit attraktiver ist als Unsicherheit, ist durch $\bar{K}=k(\bar{\varepsilon})$ gegeben, d.h.

Korollar 4: Falls die Migrationskosten K höher sind als der Wert \bar{K} , welcher durch die Gleichung $g(\bar{K}, \bar{\varepsilon})=0$ bestimmt ist, ($\bar{\varepsilon}$ ist der maximal zulässige Unsicherheitsgrad), so ist für jedes $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ das Gastland bei Sicherheit attraktiver als bei Unsicherheitsgrad ε .

Zum Abschluß dieses Unterabschnitts sind noch zwei Bemerkungen angebracht:

- 1) Der Grenzfall $K=0$ (vgl. Proposition 3) unterstreicht die Bedeutung der sequentiellen Entscheidungsstruktur besonders: Wenn die Migration keine Kosten verursacht, so ist Unsicherheit immer besser als keine, denn der Migrant kann das Gastland ja nur für eine Periode aufsuchen, um sich dort über α zu informieren. Sollte es sich für ihn als unvorteilhaft herausstellen, d.h.

er dort ein α mit $\alpha < \bar{\alpha}$ erfahren, so kann er in Periode 2 zurückkehren. Wegen $K=0$ verliert er dabei nichts.

Andererseits wird er bei einem günstigen α , d.h. $\alpha > \bar{\alpha}$, ebenfalls wegen $K=0$, auf jeden Fall gewinnen.

- 2) So, wie die Analyse hier aufgebaut ist, nämlich u.a. die Ausnützung von Lemma 4, lassen sich i.a. keine Aussagen über die Veränderung der Attraktivität des Gastlandes bei Variation von ε zu einem $\varepsilon' > \varepsilon$ hin machen, außer wir befinden uns im Bereich X_1 . Dann gilt:

Proposition 4: Gegeben seien (K, ε) und (K, ε') im Bereich X_1 (vgl. Lemma 6), und es sei $\varepsilon > \varepsilon'$. Dann ist das Gastland bei ε' attraktiver als das Gastland bei ε .

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 6 gezeigt ist für alle $\alpha \in [\bar{\alpha} - \varepsilon, \bar{\alpha} + \varepsilon]$ die Funktion $h(\alpha) = u(\alpha)$. Da der Übergang von $F_{\varepsilon'}$ zu F_{ε} einen Mean-Preserving-Spread darstellt, und $h = u$ strikt konkav ist, folgt

$$\int_0^1 u(\alpha) dF_{\varepsilon}(\alpha) < \int_0^1 u(\alpha) dF_{\varepsilon'}(\alpha).$$

Weiter kann man sich überlegen, daß für die durch (9) gegebenen $\underline{z}(\varepsilon)$ und $\underline{z}(\varepsilon')$ gilt: $\underline{z}(\varepsilon) < \underline{z}(\varepsilon')$, und wegen $(K, \varepsilon) \in X_1$: $Z_0 < \underline{z}(\varepsilon)$. Also ist nach Proposition 2: $Z_{\varepsilon}, Z_{\varepsilon'} < Z_0 < \underline{z}(\varepsilon) > \underline{z}(\varepsilon')$, d.h. (vgl. (12)) Z_{ε} und $Z_{\varepsilon'}$ sind die Schnittpunkte des linearen Teils von f_{ε} bzw. $f_{\varepsilon'}$ mit der 45°-Linie.

Dies zusammen mit dem 1. Teil des Beweises zeigt $Z_{\varepsilon'} > Z_{\varepsilon}$.

4.4. Migrationskosten, Grad der Risikoaversion und Attraktivität des Gastlandes

Wir wollen nun in diesem Abschnitt untersuchen, ob für zunehmenden Grad der Risiko-Aversion die Trennlinie G_0 bzw. die Funktion $k(\varepsilon)$ nach unten "shiftet", was inhaltlich bedeuten würde, daß eine Trade-off-Beziehung zwischen Höhe der Migrationskosten und Grad der Risikoaversion in dem Sinn besteht: Bei gegebenem Unsicherheitsgrad ε kann die Schranke $k(\varepsilon)$ für die Migrationskosten, oberhalb derer $Z_\varepsilon > Z_0$ gilt, bei zunehmendem Grad der Risiko-Aversion immer weiter nach unten gesenkt werden.

Zu diesem Zweck gehen wir von einer Schar $u(\cdot; c)$, $c \geq 0$ von Nutzenfunktionen aus, welche für jedes c die in 4.1 spezifizierten Annahmen erfüllen, wo c positiv mit dem Grad der lokalen absoluten Risiko-Aversion variiert und wobei u partiell stetig differenzierbar nach c ist. Analog parametrisieren wir die Funktion g aus (15) bzw. (17). Da wir im Moment nur an einem festen Unsicherheitsgrad $\varepsilon > 0$ interessiert sind, genügt es, die Funktion $\bar{g} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(20) \quad \bar{g}(x, c) := -x(\bar{v}_0(x, c) - \alpha + \varepsilon) + \int_{\bar{v}_0(x, c)}^{\bar{\alpha} + \varepsilon} u(\alpha, c) d\alpha$$

wobei $\bar{v}_0(x, c)$ durch $u(\bar{v}_0(x, c), c) = -x$ definiert ist (vgl. (13)), zu betrachten. Offensichtlich ist $\bar{g}(x, c)$ bis auf den Faktor $z_\varepsilon(1-\beta)$ identisch mit $g(K, \varepsilon)$ aus (17). Dann ist \bar{g} partiell nach c differenzierbar, und es gilt $\frac{\delta \bar{g}}{\delta c} =$

$$= - \frac{\delta \bar{v}_0}{\delta c} x + \int_{\bar{v}_0(x, c)}^{\bar{\alpha} + \varepsilon} \frac{\delta}{\delta c} u(\alpha, c) d\alpha - u(\bar{v}_0(x, c), c) \frac{\delta \bar{v}_0}{\delta c}.$$

Also ist

$$(21) \quad \frac{\delta \bar{g}}{\delta c}(x, c) = \int_{v_0(x, c)}^{\bar{\alpha} + \varepsilon} \frac{\delta}{\delta c} u(\alpha, c) d\alpha$$

Damit ergibt sich

Proposition 5: Es sei $(u(\cdot; c))_c$ eine Schar von strikt konkaven zunehmenden Nutzenfunktionen $u(\cdot; c): [0, 1] \rightarrow \bar{R}$ mit $u(\bar{\alpha}) = 0$, und es gelte

$$(i) \quad \frac{\delta}{\delta c} \left(- \frac{u''(\alpha, c)}{u'(\alpha, c)} \right) > 0 \quad \text{für alle } \alpha$$

$$(ii) \quad \int_{v_0(x, c)}^{\bar{\alpha} + \varepsilon} \frac{\delta}{\delta c} u(\alpha, c) d\alpha < 0 \quad \text{für alle } x \geq 0$$

Dann ist $k(\varepsilon, c)$ für jedes ε in c abnehmend, d.h. der Bereich G_+ aus Proposition 4 wird für zunehmenden Grad der Risiko-Aversion kleiner.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß - für festes ε - die durch $\bar{g}(x, c) = 0$ definierte Funktion $x(c) = (1 - \beta)k(\varepsilon, c)$ in c abnehmend ist. Durch implizites Differenzieren und unter Berücksichtigung von $\delta \bar{g} / \delta x < 0$ (vgl. den Beweisteil a) von Lemma 7) erhält man:

$$\text{sign } \frac{\delta x}{\delta c} = \text{sign } \frac{\delta g}{\delta c}(x(c), c)$$

Wegen (ii) und (21) folgt dann die Behauptung.

Bisher ist es noch nicht gelungen, explizit eine Schar von Nutzenfunktionen mit den in Proposition 5 angegebenen Bedingungen (i) und (ii) anzugeben. Insofern ist offen, ob der in der Conclusion der Proposition behauptete Sachverhalt überhaupt auftreten kann. Nach meiner Meinung be-

steht aber kein Anlaß für einen Pessimismus in dieser Richtung.

5. ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wurde das Verhalten des Migrations-Gittins-Index, welcher im sequentiellen Migrationsmodell die optimale Migrations-"Politik" determiniert, und variierendem Risiko untersucht. Das Hauptinteresse lag auf der Frage, inwieweit sich das für risiko-neutrale Migranten bekannte Ergebnis, daß für sie Länder mit höherem Risiko bezüglich der Verteilung der Lebensqualität attraktiver sind als solche mit kleinerem Risiko, bei risikoaversen Migranten verändert.

Zunächst wurde formal die Idee präzisiert, daß das, was bei Risikoneutralität gilt, auch für wenig risikoaverse Individuen gelten sollte.

Sodann wurde nur solches Risiko betrachtet, welches sich durch eine Rechteckverteilung in einem Intervall $[\bar{\alpha}-\varepsilon, \bar{\alpha}+\varepsilon]$ darstellen läßt. Dadurch wurde es möglich, einen positiven Zusammenhang zwischen Höhe des Risikos, gemessen durch ε , und jenen kritischen Migrationskosten $k(\varepsilon)$ aufzuzeigen, unterhalb derer Unsicherheit vom Grad ε immer attraktiver ist als Sicherheit.

Schließlich wurde versucht, diese kritische Höhe $k(\varepsilon)$ der Migrationskosten in Beziehung zum Grad der Risikoaversion zu setzen. Unter "bestimmten Bedingungen" konnte dann gezeigt werden, daß diese kritischen Kosten umso niedriger anzusetzen sind, je risikoaverser der Migrant ist. Offen mußte hierbei der Nachweis bleiben, daß eine Klasse von Nutzenfunktionen mit diesen "bestimmten Bedingungen" exi-

stiert - doch wäre es sehr überraschend, wenn stattdessen ein Unmöglichkeitstheorem gezeigt werden kann.

LITERATUR

- S. BERNINGHAUS/H.G. SEIFERT-VOGT (1987): International Migration under Incomplete Information. Schweiz. Z. f. Volksw. und Statistik, 199-218.
- J. McCALL/B. McCALL (1984): The Economics of Information: A Sequential Model of Capital Mobility. Univ. of Konstanz, Dept. of Economics, Disc. Paper No. 186, Series A.
- B. McCALL/J. McCALL (1987): A Sequential Study of Migration and Job Search. Journal of Labor Economics, Oct. 1987.
- M. ROTHSCHILD/J. STIGLITZ (1970): Increasing Risk: I. A Definition. Journal of Economic Theory 2, 225-243.