ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Heiler, Siegfried

Working Paper

Überlegungen zum Vergleich von Verfahren der Komponentenzerlegung saisonabhängiger Zeitreihen

Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 141

Provided in Cooperation with:
Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Heiler, Siegfried (1991) : Überlegungen zum Vergleich von Verfahren der Komponentenzerlegung saisonabhängiger Zeitreihen, Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 141, Universität Konstanz, Sonderforschungsbereich 178 - Internationalisierung der Wirtschaft, Konstanz

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/101476

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

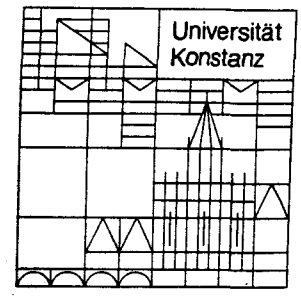
If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Sonderforschungsbereich 178
„Internationalisierung der Wirtschaft“

Diskussionsbeiträge



Juristische
Fakultät

Fakultät für Wirtschafts-
wissenschaften und Statistik

Siegfried Heiler

Überlegungen zum Vergleich von Verfahren der Komponentenzerlegung saisonabhängiger Zeitreihen

---

Postfach 5560
D-7750 Konstanz

Serie II — Nr. 141
Juni 1991

ÜBERLEGUNGEN ZUM VERGLEICH VON VERFAHREN DER KOMPONENTENZERLEGUNG SAISONABHÄNGIGER ZEITREIHEN

Siegfried Heiler

Serie II - Nr. 141

Juni 1991

Überlegungen zum Vergleich von Verfahren der Komponentenzerlegung saisonabhängiger Zeitreihen

von

Siegfried Heiler

Universität Konstanz

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Analyse saisonbehafteter Zeitreihen stehen heutzutage eine größere Anzahl von unterschiedlichen methodischen Ansätzen und auch von fertigen Software-Systemen zur Verfügung. Für die praktischen Anwendungen spielen nicht nur methodische Gesichtspunkte, sondern teilweise auch rein pragmatische Überlegungen eine Rolle. In diesem Beitrag werden die Grundtypen der vorhandenen Analysesysteme vorgestellt, Anforderungen an ihre Ergebnisse diskutiert und einige Maßzahlen zur Quantifizierung von Beurteilungskriterien vorgestellt. Als wichtiges Resultat bleibt festzuhalten, daß es ein in jeder Hinsicht "bestes" Verfahren nicht geben kann.

Inhalt

1 Einleitung 1

2 Zeitreihen als Realisierungen realer Systeme 2

3 Zerlegungsverfahren als Analysesysteme 5

3.1 Allgemeine Anforderungen an ein Analysesystem 5

3.2 Typisierung von Analysesystemen 7

3.3 Analyseziel und Verfahrensauswahl 9

3.4 Residuenanalyse 11

4 Anforderungen an die Ergebnisse von Analysesystemen 12

4.1 Dreiteilung der Beobachtungsperiode 12

4.2 Beurteilungskriterien 13

4.2.1 Vorbemerkung 13

4.2.2 Invarianz der Jahressumme 14

4.2.3 Summenerhaltung 15

4.2.4 Orthogonalität 15

4.2.5 Idempotenz 16

4.2.6 Glattheit von Trend-Zyklus- und saisonaler Komponente 16

4.2.7 Randstabilität 20

4.3 Maßzahlen zur Quantifizierung von Beurteilungskriterien 22

4.3.1 Allgemeine Anforderungen an Maßzahlen 22

4.3.2 Vorschläge für einige Maßzahlen 23

5 Literatur 29

1 Einleitung

Der Versuch, Verfahren zur Analyse saisonbehafteter Zeitreihen zu vergleichen mit dem Ziel, "weniger geeignete" oder "bessere" herauszufinden, kann bis auf Beginn dieser Analyserichtung, etwa ab 1915, zurückverfolgt werden. In der Tat sind seither mit einer Fülle methodischer Beiträge unter Einbeziehung von Bedürfnissen der Praxis wesentliche Fortschritte erzielt worden. Als Ergebnis dieses historischen Prozesses sieht sich der Anwender heute mit einer verwirrenden Vielfalt alternativer Methodenvorschläge konfrontiert, und die Aufgabe, ein für die spezielle Problemstellung besonders gut geeignetes und den eigenen Vorstellungen entsprechendes Verfahren auszuwählen, ist nicht einfach geworden. Dazu kommt noch, daß einige Analysesysteme die Möglichkeit bieten, durch "Drehen" an bestimmten "Einstellschrauben" (d.h. durch Veränderung von Systemparametern) charakteristische Eigenschaften wie Glattheit, Anpassungsfähigkeit an eine sich wandelnde Prozeßdynamik, Stabilität am aktuellen Rand zu variieren.

Die Erkenntnis, daß es ein gleichmäßig bestes Verfahren nicht gibt, hat sich inzwischen weitgehend durchgesetzt. Für eine gewisse Zeit hatte man auch versucht, beste Verfahren durch Simulationen herauszufinden. Dabei wurden künstlich erzeugte Zeitreihen den Analysesystemen eingegeben und danach festgestellt, wie gut ein System die vorher hineingesteckten Trend-Zyklen- bzw. Saisonkomponenten wieder herausrechnen konnte. Es wurde bald klar, daß die Ergebnisse stark von der unterstellten Modellsituation abhängen, ja sogar, daß man in aller Regel die Modellsituation so konstruieren kann, daß sich ein bestimmtes favorisiertes Verfahren auch als bestes herausstellt.

Insbesondere von Seiten der Praxis wurden einige logisch (wie Idempotenz, Orthogonalität) und phänomenologisch (wie Glattheit, Randstabilität) begründete Anforderungen an die Ergebnisse von Zeitreihenanalysesystemen formuliert. Auf diese wird weiter unten ausführlicher eingegangen. Inzwischen wird überwiegend eingesehen, daß die Verabsolutierung gewisser, durchaus wünschenswerter Eigenschaften ebenfalls nicht zum Ziel führt. So hat eine Überbetonung der Glattheitsanforderung zur Folge, daß durch das Verfahren konjunkturelle Schwankungen abgeschliffen und Wandlungen im saisonalen Muster nicht (oder nicht ausreichend) erkannt werden. Wird großer Wert auf hohe Randstabilität gelegt, d.h. wird gefordert, daß es nach dem Eintreffen neuer Beobachtungen nur zu geringen – oder gar keinen – Revisionen bezüglich der Aussagen über den Verlauf der interessierenden Systemkomponente am aktuellen Rand kommt, so kann das zur Folge haben, daß neue Impulse zu spät und in ihrem Ausmaß als zu gering erkannt werden (z.B. Änderungen der Konjunkturlage).

Die Auswahl eines Analyseverfahrens und die Feineinstellung der Systemparameter bedeutet also stets das Eingehen eines Kompromisses, der den Bedürfnissen des Untersuchungszieles und den Eigenarten der jeweils betrachteten Zeitreihe gerecht werden muß.

Die Beachtung der Eigendynamik einer Zeitreihe spielt bei ihrer Analyse eine wichtige Rolle. Des öfteren hört man die Klage, daß ausgereifte, bei volkswirtschaftlichen Globalzeitreihen mit Erfolg eingesetzte Verfahren bei Anwendung auf Firmen-individuelle, Branchen- oder regionale Zeitreihen versagen. Nun hat die Aggregation (das Aufsummieren) einen Glättungseffekt, der bewirkt, daß in hochaggregierten Reihen die Residualstreuung relativ niedriger ist als in den einzelnen Komponentenreihen, über die aufsummiert wird. Die Einzelreihen haben ein ungünstigeres "Signal-Rausch-Verhältnis". Die Intensität der Veränderungen der Trend-Zyklus-Komponenten bzw. der saisonalen Schwankungen im Verhältnis zur Residualstreuung spielt bei der Verfahrensauswahl und Abstimmung eine wichtige Rolle. Weiter hinten wird eine deskriptive Meßzahl zur Messung des Signal-Rausch-Verhältnisses vorgeschlagen.

Einige Verfahren bieten in gewissem Rahmen die Möglichkeit des "Self-Tuning", wobei günstige Werte für die Einstellparameter (zur Steuerung der Glattheit von Trend-Zyklus und Saison) aus den Daten heraus ermittelt werden.

Ziel dieses Beitrages ist es nicht, einige spezielle Verfahren miteinander zu vergleichen. Es sollen vielmehr einige allgemeine Prinzipien eines Verfahrensvergleichs diskutiert und Maßzahlen zum Vergleich empirischer Resultate vorgeschlagen werden.

2 Zeitreihen als Realisierungen realer Systeme

Betrachtet werden Verfahren zur Analyse von (im wesentlichen – etwa bis auf unterschiedliche Monatslängen –) äquidistanten reellwertigen Zeitreihen

$$x_T := (x_T(1), x_T(2), \ldots, x_T(T))',$$

deren Graph neben einer mittel- bis längerfristigen Grundtendenz charakteristische saisonale (jahreszeitlich bedingte) Schwankungen aufweist.

Jeder, der sich mit solchen Daten befaßt, auch jeder Praktiker, hat eine gewisse Vorstellung über das Zusammenwirken von Kräften in dem dahinterstehenden Prozeß, der die Zeitreihe generiert hat, auch wenn dies nicht immer klar und mathematisch präzise ausformuliert wird. Üblicherweise unterscheidet man, speziell in ökonomischen Datenreihen, zwischen einer Trend-Zyklus-Komponente, saisonbedingten Schwankungen, eventuell noch auf Kalenderunregelmäßigkeiten

zurückführbare Schwankungen in den Daten und den diesen Komponenten nicht weiter zurechenbaren Residuen. Im folgenden wird die Kalenderkomponente nicht gesondert neben der Saisonkomponente betrachtet.[1] Die Unterscheidung von Ursachengruppen (Komponenten) ist schon der erste Schritt einer Modellformulierung. Dieser Schritt reicht aber noch nicht aus, um daraus Analyseverfahren abzuleiten - weder im Zeitbereich noch im Frequenzbereich.[2] Dazu müssen noch die die Komponenten charakterisierenden und sie voneinander unterscheidbar machenden Eigenschaften präzisiert und die Vorstellungen über die Art ihres Zusammenwirkens (additiv, multiplikativ, gemischt) festgelegt werden. Phänomenologisch geschieht die Charakterisierung der Eigenschaften durch Formulierungen wie "glatter Verlauf" bei der Trend-Zyklus-Komponente oder "periodische Schwankung mit sich im Zeitablauf langsam ändernden Amplituden und Phasen" bei der Saisonkomponente. Um daraus ein Analyseverfahren herzuleiten, müssen diese Beschreibungen dann noch mathematisch präzisiert werden - durch Formulierung von Glattheitsvorschriften (siehe dazu den Abschnitt 4.2.5 über Glattheit).

Wir werden im folgenden von dem realen System[3] sprechen, das die Daten erzeugt hat, und das durch das Ausgangsmodell (die Arbeitshypothese) beschrieben wird. Die Trend-Zyklus-Komponente sowie die Saisonkomponente sind die unbeobachtbaren Zustände des realen Systems, die in irgendeiner Form zusammenwirken und von den irregulären Residualschwankungen überlagert werden.

Das folgende Beispiel eines additiven Systemmodells möge dies veranschaulichen. Dabei bedeute L der Verschiebeoperator, $L^k x(t) = x(t-k)$, $k = 0, 1, \ldots$, $L^0 = I$ sei der Identitätsoperator und ∇ der Differenzenoperator, $\nabla x(t) = x(t) - x(t-1), \nabla_k x(t) = \nabla(\nabla_{k-1}(x(t)))$, $k = 2, 3, \ldots$ und p die Periode der Saison.

Beobachtungsgleichung:

(2.1) $$x(t) = g(t) + s(t) + u(t),$$

additives Zusammenwirken der Komponenten;

[1] Bezüglich der Schwierigkeiten, die Wirkungen beider Ursachengruppen zu trennen, sei auf Strohm (1986) verwiesen. Eine Einbeziehung der kalenderbedingten Schwankungsursachen in das allgemeine Modell wird von Pauly (1987, 1990) vorgenommen.

[2] Der Frequenzbereichsaspekt wird in diesem Beitrag nicht weiterverfolgt.

[3] Unter einem System versteht man ganz allgemein einen beliebigen Prozeß, der zur Transformation von Signalen führt.

Zustandsgleichungen:

(2.2) $$\nabla_2 g(t) = g(t) - 2g(t-1) + g(t-2) = v(t),$$

Glattheitsvorschrift an die Trend-Zyklus-Komponente;

(2.3) $$(I - L^p)s(t) = s(t) - s(t-p) = w(t),$$

Glattheitsvorschrift an die Saisonkomponente.

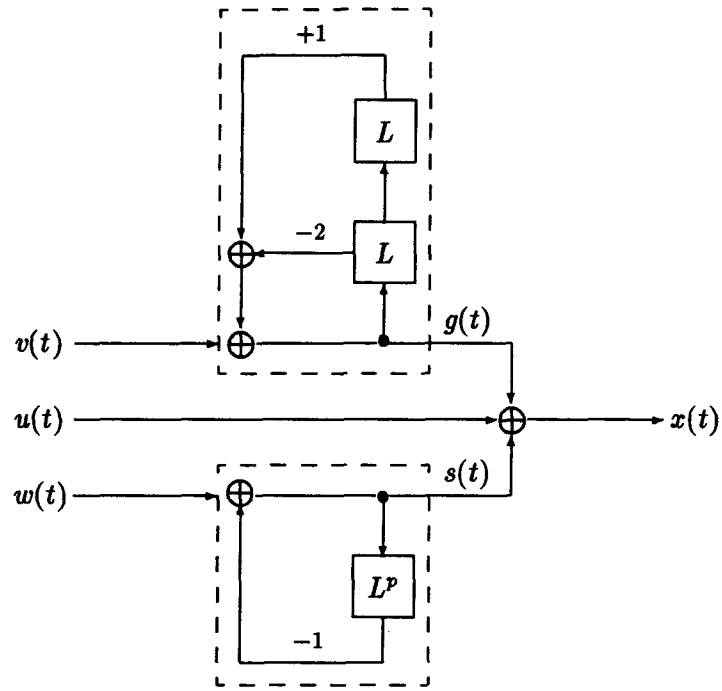


Abbildung 1: Struktur des Modellsystems (2.1) – (2.3)

Dem additiven Grundmodell entspricht die Parallelschaltung in Abbildung 1, und die gestrichelten Kästen repräsentieren die Systemoperatoren ∇_2 bzw. $(I - L^p)$.

Im obigen Beispiel sind $((u(t), v(t), w(t))$ die das System antreibenden Kräfte (die Innovationen).[4]

[4]Bei stochastischer Modellformulierung sind dies Zufallsvariablen, über deren Verteilung gewisse Annahmen gemacht werden. Man spricht dann von einem Zustandsraum-Modell.

Einem multiplikativen Grundmodell würde eine Serienschaltung entsprechen, z.B. der Art

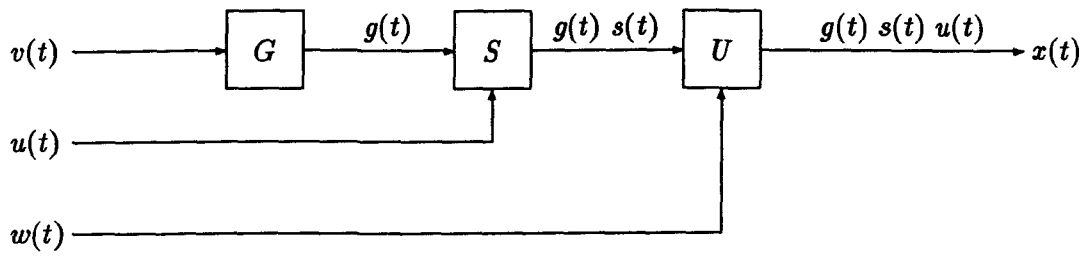
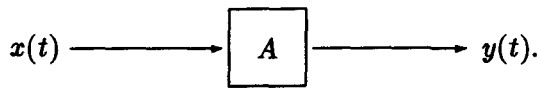


Abbildung 2: Beispielstruktur eines multiplikativen Zeitreihenmodells

3 Zerlegungsverfahren als Analysesysteme

3.1 Allgemeine Anforderungen an ein Analysesystem

Im folgenden soll unter einem Zeitreihenanalyseverfahren ganz allgemein ein (rechnerisches) System verstanden werden, das, abgeleitet aus Modellannahmen (Schäffer ,1970, spricht von Arbeitshypothesen), das Eingangssignal Zeitreihe in das Ausgangssignal (errechnete) Systemkomponente transformiert,



Dabei kann, je nach interessierendem Aspekt, als Ausgangssignal die ermittelte Trend-Zyklus-Komponente, die Saisonkomponente oder auch die sog. saisonbereinigte Reihe auftreten.

Bei einer unendlich langen Zeitreihe und einem linearen, zeitinvarianten System wäre der Systemoperator A von der Gestalt $A = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j L^j$, (wobei $L^{-j}x(t) = x(t+j)$), d.h.

$$y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x(t-j). \tag{3.1}$$

Bei praktischen Zeitreihen endlicher Länge sind die Summationsbereiche natürlich begrenzt, was bei vielen der bekannten Glättungsverfahren zu den "Randproblemen" am Anfang und Ende der Beobachtungsperiode führt. Dem Beispiel

$$y(t) = \sum_{j=-m}^{n} a_j x(t-j) \qquad m,n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

entspricht das folgende Strukturbild (für $m < n$):

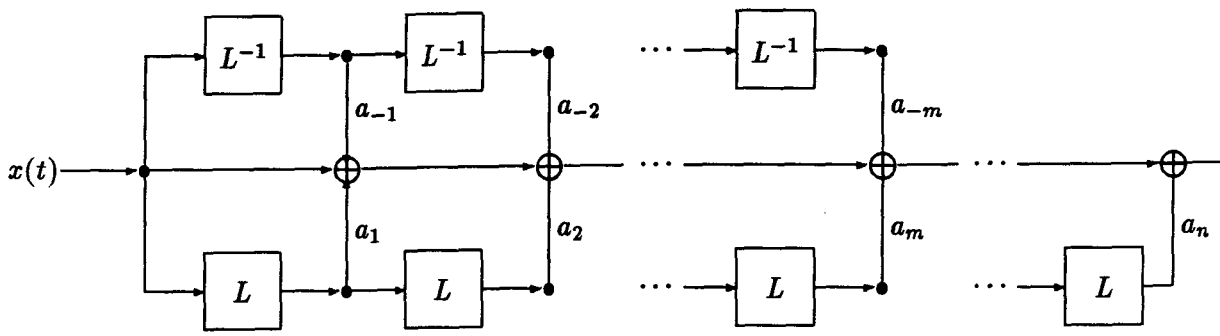


Abbildung 3: Struktur eines endlichen gleitenden Mittels

Die meisten zur Verfügung stehenden Analysesysteme weisen jedoch nicht diese einfache Struktur auf. Deshalb soll im folgenden unter einem Analysesystem ganz allgemein eine beliebige Abbildung (Transformation) $A_T : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ verstanden werden,

$$y_T = A_T(x_T). \tag{3.3}$$

Dabei bringt der Index T beim Systemoperator A eine möglicherweise bestehende Abhängigkeit von der Länge T der Beobachtungsperiode zum Ausdruck.

Als eine Grundvoraussetzung an ein Analysesystem ist zu fordern, daß das Verfahren auf einer klar formulierten Modellvorstellung aufbaut, und daß die Prozedur aus dieser Modellvorstellung logisch widerspruchsfrei abgeleitet ist. Dabei darf das Grundmodell nicht zu speziell sein, um unterschiedlichen Datensituationen gerecht werden zu können.

Schäffer (1970) formuliert wie folgt:
"Das Grundkonzept des Verfahrens soll theoretisch einwandfrei sein; dazu müssen mindestens folgende Bedingungen gegeben sein:

a) Hinreichend allgemeiner Ansatz,

b) Eindeutig spezifizierte Arbeitshypothesen,

c) Widerspruchsfreiheit der Arbeitshypothesen."

(Schon diese Grundvoraussetzungen sind bei einigen älteren Verfahren nicht erfüllt.) Neben gewissen statistischen Kriterien wie Unverzerrtheit und minimale Varianz (darauf soll in diesem Beitrag nicht näher eingegangen werden) fordert Schäffer dann noch, ein Verfahren solle flexibel

("d.h. anhand von objektiven Kriterien auf die Eigenart jeder Reihe abstimmbar") sein und es solle Hilfsmittel für die sachliche Interpretation der Ergebnisse bereitstellen.

Im Zusammenhang mit der Diskussion robuster Glättungsverfahren führt Huber (1979) die folgenden vier wünschenswerten Eingeschaften auf (siehe auch Schlittgen, 1989):

a) Ein Verfahren sollte (über einen Parameter) einstellbar sein von extremer Glättung bis hin zur Nicht-Glättung. (Dies entspricht der obigen Forderung nach Flexibilität.)

b) Ein Verfahren sollte über einen Robustheitsparameter einstellbar sein von nicht-robuster Glättung bis hin zu sehr hoher Robustheit.

c) Eine glatte Funktion sollte exakt reproduziert werden. (Dies entspricht in etwa der weiter unten diskutierten Forderung nach Idempotenz.)

d) Eine abrupte Änderung im Reihenniveau sollte nicht über einen weiten Bereich verschmiert werden. Dies bedeutet möglichst schnelle Reaktion auf größere Niveauänderungen des Systemzustandes.

Die sowohl von Schäffer als auch von Huber weiter angeführte Forderung nach möglichst geringem Zeit- und Kostenaufwand (d.h. Rechenaufwand) hat durch die seither rasante Entwicklung im Computer-Bereich an Bedeutung verloren.

3.2 Typisierung von Analysesystemen

Die meisten Analysesysteme können beim Verfahrensvergleich gewissen Grundtypen zugeordnet werden.

Von der zugrundelegenden Modellvorstellung her kann man unterscheiden zwischen Verfahren, die datenanalytisch konzipiert sind, bei denen bei der Festlegung der Arbeitshypothesen also heuristisch argumentiert wird und solchen, die von einem stochastischen Modell mit der Einführung von Zufallsvariablen und Annahmen über deren Verteilung ausgehen.

Mit der Form des Ausgangsmodells zu tun hat auch die Unterscheidung zwischen parametrischen und nichtparametrischen Verfahren. Erstere bauen auf einem stochastischen Modell auf, bei dem gewisse Modellparameter eingeführt und diese dann im Verfahrensablauf geschätzt werden. Der Ausgangsmodelltyp ist häufig ein saisonales ARIMA-Modell (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average Model), wie es von Box und Jenkins (1970) formuliert wurde. Modelle dieser Art und Anwendungen dazu sind zu finden bei Grether und Nerlove (1970) und

Nerlove (1980). Nichtparametrische Verfahren kann man als hinsichtlich der Rigorosität der Arbeitshypothesen "schwach" modelliert bezeichnen. Alle Glättungsverfahren, bei denen nur gewisse Glättungsparameter festgelegt werden, gehören dazu. Als interessante und relativ neue Methode sind hier auch zu nennen die nichtparametrischen Zeitreihenanalyseverfahren, die mit Kern- oder Nearest-Neighbour-Schätzern arbeiten. Ein Überblick über die methodischen Ansätze und Anwendungsmöglichkeiten ist zu finden bei Michels (1991). Verfahren können weiter danach unterschieden werden, ob die Arbeitshypothesen im Zeitbereich oder im Frequenzbereich formuliert sind. Im Zeitbereich beziehen sich die Ausgangsüberlegungen auf Glattheitseigenschaften der Systemkomponenten. Im Frequenzbereich wird die Zeitreihe nach Fouriertransformation als eine Summe von Schwingungen interpretiert, und die Systemkomponenten werden als Schwingungen innerhalb gewisser Frequenzbänder abgegrenzt. Die Trend-Zyklus-Komponente entspricht dann dem Niederfrequenzbereich, die saisonale Komponente gewissen Frequenzbändern um die der Periode der Saison entsprechende Frequenz $\lambda_1 = 2\pi/p$ und den zugehörigen Oberwellen $\lambda_j = 2\pi j/p$, $j = 2, \ldots, [p/2]$. Die Herleitung eines Analyseverfahrens entspricht hier dem Entwurf geeigneter Tiefpaß- bzw. Bandpaßfilter. Dabei soll die Kennlinie (mit Amplitudencharakteristik und Phasencharakteristik) der eines vorgegebenen idealen Filters möglichst nahe kommen. Der Entwurf von Filtern für saisonabhängige Zeitreihen wird behandelt in den Arbeiten von Heiler (1976), Heiler und Willers (1976), Schips und Stier (1976), Stier (1978), Metz und Stier (1991) und hier nicht weiter besprochen.

Bei der Konstruktion im Zeitbereich kann man unterscheiden zwischen Verfahren, bei denen die Glattheitseigenschaften von Trend-Zyklus- und saisonaler Komponente global, d.h. für die gesamte Beobachtungsperiode formuliert werden und solchen, bei denen diese Glattheitseigenschaften lokal festgelegt werden, d.h., daß sie "im kleinen", für Stützbereiche kleinerer Länge m, gelten sollen.

Zu den globalen Ansätzen gehören die Vorschläge von Akaike (1980), Schlicht (1981) sowie Pauly und Schlicht (1982, 1983, mit Weiterentwicklungen von Pauly 1987, 1990), Kitagawa und Gersch (1984) sowie Hebbel und Heiler (1987). Der letztere kann sowohl global wie lokal verwendet werden und bildet in der lokalen Version die Grundlage des "Verallgemeinerten Berliner Verfahrens (VBV)". Die Grundprinzipien der eben aufgeführten global arbeitenden Verfahren sind im Abschnitt 4.2.6 näher ausgeführt. Die lokale Formulierung der Glattheitseigenschaften führt zu einer lokalen Anpassung in Stützbereichen kleinerer Länge. (Bei Monatsdaten haben sich Stützbereichslängen zwischen 18 und etwa 48 in der Praxis als für viele Zeitreihentypen geeignet herausgestellt.) Dabei fällt – zumindest bezüglich der Trend-Zyklus-Komponente – die Anpassung in der Mitte des Stützbereichs am besten aus. Dies führt zu zweiseitigen (i.a. symmetrischen) gleitenden Durchschnitten im Mittelbereich der Beobachtungsperiode. Der Ansatz

läßt sich logisch konsequent bis an die Ränder der Beobachtungsperiode fortsetzen, wenn auch im allgemeinen mit abnehmender Güte der Anpassung. Dies führt dann zu Revisionen bei neu hinzukommenden Beobachtungen in darauffolgenden Perioden. Keine solche Revisionen treten auf bei den einseitigen Verfahren. Dazu gehören nach Vorgaben im Frequenzbereich konstruierte einseitige (sog. physikalisch realisierbare) Filter, insbesondere Transversalfilter (einseitige gleitende Mittel) oder rekursive Filter. Letztere sind aufgebaut wie ein ARMA-Modell, $y(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j y(t-j) = \sum_{k=0}^{n} b_k x(t-k)$, die Koeffizienten werden jedoch nicht aus den Daten geschätzt, sondern nach den Konstruktionsprinzipien im Frequenzbereich festgelegt. Ein einseitiges Verfahren ist auch der nach einer Modellformulierung in Zustandsraumform (vgl. hierzu das einleitende Beispiel) arbeitende Kalman-Filter.

Für einen Verfahrensvergleich bedeutsam ist der Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen Systemen. Bei linearen Systemen ist der Systemausgang eine lineare Funktion der Zeitreihe am Systemeingang. Lineare Systeme haben den Vorteil, daß sich viele ihrer Eigenschaften exakt analytisch ermitteln lassen, was bei nichtlinearen Systemen in der Regel nicht möglich ist, weshalb man bei ihnen letztendlich auch auf empirische Vergleichsanalysen angewiesen ist. Zwar führen viele der neuen Ansätze zu linearen Systemen. Aber wenn datengesteuert Glättungsparameter festgelegt oder Iterationsschritte durchgeführt werden, geht die Linearitätseigenschaft verloren. Deshalb sind viele "ausgefeilte" Analysesysteme nichtlinear.

Verfahren, bei denen die Anpassung an die Daten über ein Kleinstquadratekriterium gesteuert wird (und dazu gehören die meisten klassischen), reagieren sehr empfindlich auf Ausreißer. Dies mag hinnehmbar sein bei hochaggregierten Zeitreihen, bei denen die Summierung einen gewissen Glättungseffekt schon in sich hat. Bei ausreißeranfälligen Daten und Zeitreihen mit hohem Rauschanteil (niedrigem Signal-Rausch-Verhältnis) sollte jedoch Ausreißer-resistenten Verfahren der Vorzug gegeben werden. Unter solchen Aspekten konzipierte Glättungsverfahren werden in der explorativen Datenanalyse diskutiert (siehe Tukey, 1977, oder Velleman und Hoaglin, 1981). Ein umfangreiches Analysesystem zur resistenten Saisonbereinigung wird in dem Programmpaket SABL (Cleveland et al., 1978) angeboten. Einen Überblick über das Gebiet der robusten Glättung und Komponentenzerlegung mit eigenen Beiträgen und vergleichenden Analysen bietet Schlittgen (1989, 1990, 1991).

3.3 Analyseziel und Verfahrensauswahl

Wesentlich für die Auswahl eines Verfahrens ist der Zweck, zu dem die Analyse durchgeführt wird. Natürlich soll sie stets Informationen liefern über das hinter den Daten stehende reale Sys-

tem. Während es durchaus Anwendungen gibt, in denen die saisonalen Schwankungen für sich von Interesse sind, z.B. in der Medizin oder der Umweltforschung (Tagesrythmen, Jahresganglinien), gilt in ökonomischen Anwendungen doch dem mittel- bis längerfristigen Verlauf, also der Trend-Zyklus- Komponente, das Hauptinteresse. Dabei treten im Graphen der Zeitreihe die Saisonschwankungen als störend auf. Daher wurde für lange Zeit die Saisonbereinigung als die Hauptaufgabe einer auf Komponentenzerlegung basierenden Zeitreihenanalyse angesehen. Dies war sicher richtig, solange die Verfahren zum Herausfiltern der Trend-Zyklus-Komponente noch relativ unbefriedigend waren. Heute stehen dafür leistungsfähige und flexible Methoden zur Verfügung. Daher sollte das Hauptaugenmerk beim Verfahrensvergleich der Trend-Zyklus-Komponente gewidmet sein, eventuell ergänzt durch eine Residuenanalyse (siehe dazu den nächsten Abschnitt).

Eine wichtige Rolle beim Verfahrensvergleich spielt auch der Zweck, zu dem die Ergebnisse der Analyse verwendet werden sollen. Lautet die Frage was war?, was ist?, oder was wird sein?

Bei der retrospektiven Betrachtung interessiert der historische Verlauf des Systems. Hier steht die Frage nach der adäquaten Glättung im Fordergrund. Das Verhalten an den Rändern der Beobachtungsperiode ist demgegenüber von nachgeordnetem Interesse. Anwendungen der Zeitreihenanalyse in der historischen Forschung sind beispielsweise zu finden in den Arbeiten von Metz (1984) und Spree (1991).

Bei der Frage "was ist?" möchte man Aufschlüsse über den Systemverlauf in der jüngsten Vergangenheit erhalten. Das frühzeitige Erkennen von Wendepunkten ist für die aktuelle Konjunkturdiagnose von besonderer Bedeutung. Bei diesem Aspekt ist also das Verhalten eines Verfahrens am jeweiligen aktuellen Rand einer Zeitreihe von Interesse. Man möchte daher die Treffsicherheit bzw. Randstabilität eines Verfahrens beurteilen können.

Obwohl die Diagnose des aktuellen Systemzustands und seiner letzten Veränderungen häufig als Grundlage für darauf basierende kurzfristige Vorhersagen verwendet wird, scheinen die meisten Anwender keinen Wert auf Verfahren zu legen, die direkt Prognosewerte liefern. Man zieht es vor, aus der Systemdiagnose am aktuellen Rand – gegebenenfalls unter Hinzunahme der Residuen – und unter Berücksichtigung nicht in den Daten steckender, weiterer (eventuell nur "qualitativ" erfaßbarer) Informationen subjektiv Projektionen zu formulieren. Diese Art der Meinungsfindung steht hier nicht zur Debatte. Dennoch ist nicht einzusehen, warum Prognosen, die mit gewissen Verfahren möglich sind, nicht als zusätzliche Informationen in den Meinungsbildungsprozeß einbezogen werden sollten.

Die meisten Glättungsverfahren sind nicht auf die Erstellung von Prognosen ausgerichtet und

eignen sich auch gar nicht dazu, da sie nur Informationen jeweils aus einem Teilabschnitt (Stützbereich) ausnützen. Für Prognosezwecke eher geeignet sind Verfahren, die auf parametrischen Modellen basieren (wie saisonale ARIMA-Modelle), aber auch die Verfahren mit globalem Ansatz. Eine interessante Alternative bieten hier insbesondere die nichtparametrischen Zeitreihenanalyseverfahren, die mit Kern- oder Nearest-Neighbour-Schätzern arbeiten. Bei ihnen werden dem letzten Verlauf ähnliche Verläufe in der Vergangenheit zur Prognose herangezogen (siehe hierzu Michels,1991).

3.4 Residuenanalyse

Schon seit längerer Zeit ist erkannt worden, daß die Analyse der Residuen einer Schätz- oder Anpassungsprozedur von großer Bedeutung ist. In der Tat kann die Residualreihe, d.h. die um alle systematischen Einflüsse "bereinigte" Zeitreihe interessante Hinweise liefern über einmalige historische Ereignisse oder über ungewöhnliche Zeitabschnitte oder auch über besondere Entwicklungen am aktuellen Rand mit möglichem Einfluß auf die nachfolgenden Perioden. Ein Analysesystem sollte daher die Möglichkeit zur Betrachtung der Residuen bieten. Die getrennte Betrachtung der Trend-Zyklus-Komponente und der Residuen liefert mehr Information als die saisonbereinigte Reihe, da in der letzteren die mittlere Entwicklung und irreguläre Einflüsse nicht getrennt und nicht klar trennbar sind. Allerdings muß darauf hingewiesen werden, daß nichtresistente Verfahren dazu tendieren, ungewöhnliche Einflüsse nur abgeschwächt widerzugeben (Maskierungseffekt), da Ausreißer starken Einfluß auf die errechnete Trend-Zyklus-Komponente haben. Vom Standpunkt der Residuenanalyse ist also die Anwendung eines resistenten Verfahrens vorzuziehen.

Neben der prozeßbezogenen Analyse können die Residuen auch im Verfahrensvergleich verwendet werden, etwa zur Beantwortung der Frage, ob saisonale Unter- oder Überbereinigung vorliegt (siehe hierzu den Abschnitt über Orthogonalität) oder zum Vergleich der Residualvarianzen. Letztere gehen auch ein in das Signal-Rausch-Verhältnis, das sowohl zur Typisierung von Zeitreihen als auch zum Vergleich von Analysesystemen herangezogen werden kann. Im Abschnitt 4.3.2 werden dafür Maßzahlen vorgeschlagen. Als weitere diagnostische Informationen seien erwähnt die Ermittlung der empirischen Verteilung oder die Berechnung von Autokorrelationskoeffizienten der Residuen.

4 Anforderungen an die Ergebnisse von Analysesystemen

4.1 Dreiteilung der Beobachtungsperiode

Bei den Analyseverfahren, die Systemeigenschaften wie Glattheit bzw. Periodizität lokal charakterisieren (und bei nach Vorschriften im Frequenzbereich konzipierten, nicht einseitigen Filtern), kann man den Ausgang des Zerlegungsverfahrens (d.h. den Vektor $y_T \in \mathbb{R}^T$) in drei Abschnitte zerlegen:

- Eine Anfangs- oder Einschwingphase, in der wegen fehlender, weiter zurückliegender Beobachtungswerte die Systemzustände weniger zuverlässig "ermittelt" werden können als im
- Mittelbereich der Zeitreihe, in dem wegen genügendem Vor- und Nachlauf die Systemzustände am besten analysiert werden können. Hier haben sich die rechnerisch ermittelten Systemzustände stabilisiert in dem Sinn, daß neu hinzukommende Beobachtungen nicht mehr zu Revisionen der Ergebnisse führen.
- Zum Randbereich gehören diejenigen Beobachtungszeitpunkte, zu denen, da neu hinzukommende Beobachtungen beim Übergang $(T \rightarrow T+1)$ im allgemeinen auch Informationen über die Systemverläufe der jüngeren Vergangenheit enthalten werden, Revisionen der Zustandsberechnungen vorgenommen werden.

Die Dreiteilung entspricht dem aus der Numerik bekannten Sachverhalt, daß sich eine Funktion im mittleren Bereich eines Datensatzes genauer approximieren läßt als an den Rändern. Dies gilt in besonderem Maße für Polynome, während, wie bekannt, etwa Splines eine größere Randstabilität aufweisen. Das Ende T_0 der Anfangsphase läßt sich weder aus den Verfahrensausgängen noch durch Analyse des Verfahrens selbst exakt festlegen (wann ist ein Einschwingvorgang "genügend" abgeklungen?). Das Ende des mittleren, "zuverlässigen" Bereichs ist gegeben durch den Zeitpunkt

$$T_* = \max_{1 \le t \le T} \{t | y_T(t) - y_{T-1}(t) = 0\}.$$

T_* ist natürlich verfahrensabhängig. Bei den meisten der bekannten Verfahren für Monatsdaten tritt jedoch eine Stabilisierung nach spätestens zwei Jahren ein, d.h. es kann $T_* \geq T - 24$ unterstellt werden. Bezeichnet $\mathcal{T} = \{1,2,\ldots,T\}$ die Beobachtungsperiode, so sei im folgenden $\mathcal{T}_a = \{1,2,\ldots,T_0\}$ der Anfangsbereich, $\mathcal{T}_m = \{T_0+1,\ldots,T_*\}$ der mittlere Bereich und $\mathcal{T}_e = \{T_*+1,\ldots,T\}$ der Randbereich. Die obige Dreiteilung ist nicht anwendbar bei (etwa nach

Designvorschriften im Frequenzbereich konstruierten) einseitigen Filtern (in der Systemtheorie sog. physikalisch realisierbaren Systemen). Bei diesen Transversal- oder rekursiven Filtern kommt es per Definition zu keinen Revisionen, d.h. sie sind automatisch "randstabil", $T_* = T$. (Mit Interpretation im Zeitbereich könnte man auch sagen, sie sind nicht "lernfähig".). Demgegenüber können rekursive Filter eine sehr lange Einschwingphase aufweisen (wenn Polstellen des Systems nahe am Einheitskreis liegen). Deshalb sollte bei Verfahrensvergleichen die Länge der Anfangsphase auch relativ großzügig bemessen werden. Als Faustregel für Monatsdaten wird $T_0 \approx 60$ vorgeschlagen (basierend auf der Überlegung, daß beim Betrag einer Polstelle von 0.95 die Dämpfung $0.95^{60} \approx 0.05$ beträgt).

Die obige Dreiteilung der Beobachtungsperiode ist ebenfalls nicht adäquat bei Verfahren, die Systemeigenschaften nicht lokal, sondern global festlegen und mit der Optimierung einer Zielfunktion arbeiten. Dazu gehören etwa die Vorschläge von Akaike (1980), Kitagawa und Gersch (1984), Pauly und Schlicht (1981, 1987). Bei diesen Verfahren wird für jedes T eine Neuberechnung für alle $t = 1,\ldots,T$ vorgenommen. Hier ist $T_* = 1$, d.h. genau genommen ist die gesamte Beobachtungsperiode aktueller Rand und es kommt jeden Monat (jedes Quartal etc.) zu einer Revision aller bisherigen Angaben. Zwar stellt man bei Anwendungen dieser Verfahren in der Praxis ebenfalls eine gewisse Stabilisierung zeitlich weiter zurückliegender Zustandsermittlungen fest, dennoch stehen sie, methodisch gesehen, im Vergleich zu den einseitigen Filtern am anderen Ende der Verfahrenspalette.

Diese vom Modellansatz her bedingten Verfahrensunterschiede zwischen globalen Verfahren, Systemzustände im Zeitbereich lokal definierender Verfahren (mit Revisionen am aktuellen Rand) und nach Überlegungen im Frequenzbereich konstruierten Filtern sind bei einem Methodenvergleich in jedem Fall besonders zu berücksichtigen und zu bewerten. Vor einem allzu schematischen Vorgehen mit einigen – noch einzuführenden – Maßzahlen ist also zu warnen.

4.2 Beurteilungskriterien

4.2.1 Vorbemerkung

Im folgenden werden einige Kriterien zur Charakterisierung gewisser Eigenschaften von Zeitreihenanalyseverfahren diskutiert und Maßzahlen dazu vorgeschlagen. Es muß nachdrücklich betont werden, daß es sich dabei nicht um Gütekriterien handelt, sondern daß die Maßzahlen nur zum deskriptiven Vergleich gewisser charakteristischer Eigenschaften von Zeitreihenanalyseverfahren (bei Festlegung bestimmter Optionen – Hyperparameter –) herangezogen werden

können.

Beispielsweise kann Glattheit nicht als Ideal schlechthin für die Trend-Zyklus-Komponente angesehen werden. Den glattesten Verlauf liefert eine Konstante, und das ist gewiß nicht, was sich die meisten unter einer realen Trend-Zyklus-Komponente vorstellen. Auch größtmögliche Randstabilität ist kein Ideal, bedeutet sie doch, daß neu hinzukommende Informationen keinerlei Einfluß auf die Aussage über Zustandsänderungen des Systems in der jüngsten Vergangenheit haben. Andererseits führen häufige, starke und zeitlich weit zurückreichende Revisionen bisheriger Aussagen über den Systemverlauf zu großen Unsicherheiten bei der aktuellen Lagebeurteilung. Konjunkturdiagnose mit Verfahren der Komponentenzerlegung von Zeitreihen ist stets ein Schiffen zwischen Skylla und Charybdis.

Jedes Analyseverfahren setzt eine gewisse Mindestlänge der Beobachtungsperiode voraus, um eingesetzt werden zu können. In den folgenden Abschnitten wird diese Mindestlänge der Einfachheit halber gleich T_0 gesetzt.

4.2.2 Invarianz der Jahressumme

Ist $y_T = x_T - s_T$ die saisonbereinigte Reihe, dann besagt diese Forderung, daß, jeweils über ein Jahr aufsummiert, die Summe saisonbereinigter Werte gleich der Summe der Originalwerte sein soll. Mit p als Periode der Saison soll also für die umindizierten Variablen

$$x_{ij} := x_T((i-1)p+j), \quad i = 1,\ldots,I, \quad j = 1,\ldots,p$$

(entsprechend für $y(t)$) gelten

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{p} y_{ij} \quad \text{für alle } i = 1,\ldots,I.$$

Dabei gibt I die Anzahl der Jahre und j den Index für die Monate (Quartale, etc.) an. Da dies $\sum_{j=1}^{p} s_{ij} = 0$ für alle Jahre $i = 1,...,I$ impliziert, andererseits aber auch $s_{ij} \approx s_{(i-1)j}$ gelten soll, sieht man, daß diese Forderung nur durch eine sich exakt periodisch wiederholende Funktion ("starre Saisonfigur") erfüllt werden kann, wenn man nicht Sprünge jeweils zu Jahresende zulassen will. Eine sich nur allmählich und kontinuierlich verändernde Saisonfigur ("glatter Saisonverlauf") ist dadurch angeschlossen. Diese Bedingung widerspricht damit den Anforderungen der Praxis und sollte daher nicht beachtet werden.

4.2.3 Summenerhaltung

Wenn zwei oder mehrere Zeitreihen vorliegen, deren Komponenten sich in sinnvoller Weise aufsummieren lassen zu einer sogenannten aggregierten Zeitreihe, dann besagt die Forderung nach Summenerhaltung, daß die aus der aggregierten Zeitreihe herausgerechnete Komponente gleich sein sollte der Summe der aus den Einzelreihen ermittelten Komponenten. Sind also u_T und v_T zwei Zeitreihen, dann soll

$$A_T(u_T + v_T) = A_T(u_T) + A_T(v_T), \quad T \geq T_0$$

gelten. Die Forderung ist also äquivalent zur Linearität der Operatoren und bedeutet, daß nur Analyseverfahren verwendet werden sollen, die linear in den Ausgangsdaten sind. Die Verwendung linearer Verfahren hat neben der Summenerhaltung eine Reihe weiterer Vorzüge. Insbesonder lassen sich viele ihrer Eigenschaften exakt analytisch bestimmen, ohne auf phänomenologische Beurteilungskriterien zurückgreifen zu müssen.

4.2.4 Orthogonalität

Im Zusammenhang mit Saisonbereinigungsverfahren wurde die Forderung erhoben, die saisonbereinigte Reihe solle orthogonal zur ermittelten Saisonkomponente sein, da ja sonst die saisonbereinigte Reihe noch saisonale Restschwingungen enthalte. Etwas allgemeiner läßt sich die Forderung so formulieren: Sei $y_T = A_T(x_T)$ die ermittelte Komponente und $z_T = x_T - y_T$ die "bereinigte" Reihe, dann soll

$$\langle y_T, z_T \rangle = y_T' z_T = 0 \text{ für alle } x_T \in \mathbb{R}^T \text{ und } T \geq T_0 \tag{4.1}$$

gelten. Diese Forderung ist zumindest für lineare Systeme sehr einleuchtend. Dort ist A_T eine $T \times T$-Matrix und $y_T = A_T x_T$. Aus Bedingung (4.1) folgt dann

$$x_T' A_T' (I_T - A_T) x_T = 0 \quad \text{für alle } x_T \in \mathbb{R}^T.$$

Dies impliziert, daß die Matrix $A_T'(I_T - A_T)$ schiefsymmetrisch sein muß, d.h. $A_T'(I_T - A_T) = -(I - A_T')A_T$ oder $A_T' + A_T = 2A_T'A_T$. Ist die Systemmatrix A_T zusätzlich symmetrisch, dann folgt daraus ihre Idempotenz, d.h. A_T ist eine Projektionsmatrix. Im allgemeinen Fall, das heißt ohne die zusätzliche Symmetrieeigenschaft, folgt aus der Orthogonalität jedoch nicht die Idempotenz.

4.2.5 Idempotenz

Die Forderung nach Idempotenz besagt, daß eine einmal ermittelte (Trend-Zyklus- oder Saison-) Komponente bei wiederholter Anwendung des Systems auf diese Komponente reproduziert werden soll. Ist $y_T = A_T(x_T)$, so soll für alle $x_T \in \mathbb{R}^T$ und $T \geq T_0$

$$A_T(y_T) = A_T(A_T(x_T)) = A_T \circ A_T(x_T) = y_T$$

oder anders formuliert

(4.2) $$A_T \circ A_T = A_T \quad \text{für} \quad T \geq T_0$$

gelten. Diese intuitiv einleuchtende Forderung zielt in dieselbe Richtung wie die nach Orthogonalität. Bei linearen System impliziert sie, daß die Anwendung des Systems auf die Residualreihe z_T den Nullvektor ergibt, d.h. daß die Residuen keine Information mehr über die Systemkomponente enthalten, denn

$$A_T z_T = A_T(x_T - y_T) = A_T x_T - A_T \cdot A_T x_T = 0_T.$$

Die Idempotenzbedingung impliziert auch bei linearen Systemen nicht die Orthogonalität – die idempotente Matrix A_T braucht nicht symmetrisch zu sein. Ist A_T allerdings symmetrisch, dann sind beide Bedingungen äquivalent.

Ob der Unterschied zwischen Orthogonalität und Idempotenz jedoch von praktischer Relevanz ist, sei hier dahingestellt.

Bei den in der Praxis angebotenen, nichtlinearen Analysesystemen stellt man fest, daß weder die Forderung nach Idempotenz noch die nach Orthogonalität (letzteres ist bei nichtlinearen Verfahren auch gar nicht zu erwarten) exakt erfüllt sind. Hier sollen Maßzahlen, die den Grad der Abweichung vom Ideal zum Ausdruck bringen, bei der Beurteilung im Verfahrensvergleich weiterhelfen.

Bei $A_T(x_T - y_T) \neq 0_T$ könnte man, in Anlehnung an Vorschläge zur resistenten Regression in der explorativen Datenanalyse, daran denken, durch iterative Anwendung der Prozedur y_T solange zu korrigieren, bis $\|A_T(x_T - y_T)\|$ genügend klein wird (sogenanntes "Twicing").

4.2.6 Glattheit von Trend-Zyklus- und saisonaler Komponente

Die meisten Anwender in der Praxis haben eine intuitive Vorstellung davon, was sie unter einem "glatten" oder "eher unruhigen" Verlauf der Trend-Zyklus-Komponente verstehen wollen oder

wann eine Saisonkomponente als "sich langsam und allmählich ändernd" bzw. "sehr variabel" einzustufen sei. Diese Vorstellungen sind im allgemeinen intuitiv verschieden.

Im folgenden soll eine sich nur langsam und allmählich ändernde Saisonkomponente ebenfalls als glatt bezeichnet werden.

Bei der Konzeption eines Analysesystems und beim Vergleich unterschiedlicher Verfahren hinsichtlich eines Glattheitskriteriums müssen (sollten zumindest) die intuitiven Glattheitsanforderungen in irgendeiner Form mathematisch präzisiert und quantifizierbar gemacht werden.

Alle Analyseverfahren stellen, auch wenn das nicht immer explizit so formuliert wird, einen Kompromiß her zwischen einem als ideal angenommenen glatten Verlauf der Trend-Zyklus-Komponente sowie der Saisonkomponente und der Güte der Anpassung des ermittelten Verlaufs an die Daten. Dies wird exemplarisch an einem dafür besonders charakteristischen Verfahren vorgestellt. Eine naheliegende Vorstellung von einer idealen Trend-Zyklus-Komponente ist, daß der Verlauf lokal (d.h. jeweils in Stützbereichen begrenzter Länge (von m Zeitpunkten) oder global (für die gesamte Beobachtungsperiode) durch ein Polynom vom Grad $k-1$ beschrieben werden kann. Dabei ist die Glattheitsvorschrift um so rigider, je niedriger der Polynomgrad – bzw. je höher bei gegebenem k bei den die Eigenschaften lokal definierenden Verfahren die Stützbereichslänge m angesetzt wird. Die Aussage, die ideale Trend-Zyklus-Komponente lasse sich durch ein Polynom von Grad $k-1$ darstellen, ist äquivalent zu der Aussage, sie genüge der folgenden Differenzengleichung der Ordnung k:

$$\nabla_k y(t) := (I-L)^k y(t) = 0, \tag{4.3}$$

wobei L der (im allgemeinen auf dem Raum der zweiseitig unendlichen reellen Folgen definierte) Lag-Operator mit $(Lx)_t = x(t-1)$, $t \in \mathbb{Z}$, ist. Im folgenden soll ∇_k als Trend-Zyklus-Operator bezeichnet werden, da die Menge der Folgen, die (4.3) erfüllen, bezeichnet als der Nullraum von ∇_k, $\mathcal{N}_{\nabla_k}$, ideale Trend-Zyklus-Verläufe beschreibt. Es ist wohlbekannt, daß eine Folge genau dann zu $\mathcal{N}_{\nabla_k}$ gehört, wenn sich ihr Verlauf durch ein Polynom vom Grad höchstens $k-1$ beschreiben läßt.

Entsprechend läßt sich eine "ideal glatte" Saisonkomponente bei gegebener Periode p der Saisonschwankungen beschreiben als Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$(I-L^p)y(t) = 0. \tag{4.4}$$

Die Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$y(t) = \sum_{j=0}^{q} (\alpha_j cos\lambda_j t + \beta_j sin\lambda_j t)$$

mit den Saisonfrequenzen $\lambda_j = 2\pi j/p, \quad j = 0,1\ldots,q,\ q = [p/2]$.

Da die Funktionen $cos\lambda_j t$ und $sin\lambda_j t$, wie man leicht nachrechnet, zum Nullraum des linearen Operators $(I - 2cos\lambda_j L + L^2)$ gehören, (d.h. $(I - 2cos\lambda_j L + L^2)cos\lambda_j t = 0$ und $(I - 2cos\lambda_j L + L^2)sin\lambda_j t = 0$), können wir einen entsprechenden Saisonoperator auch schreiben in der Form

$$D_q := \prod_{s=1}^{q}(I - 2cos\lambda_j L + L^2)$$

d.h., eine in diesem Sinne ideal glatte Saisonkomponente genügt der Bedingung

$$D_q y(t) = 0.$$

Für p gerade und $q = p/2$ stimmen die Operatoren $(I - L^p)$ und D_q überein.

Bezeichnen wir vorübergehend die Summe aus Trend-Zyklus- und Saisonkomponente mit $y_T(t)$, so ist ein naheliegendes Kriterium für die Güte der Anpassung an den Datenvektor x_T gegeben durch

$$S_T^2 = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_T(t) - x_T(t))^2 \tag{4.5}$$

(bei lokal definiertem Modell ist natürlich nur über den entsprechenden Stützbereich zu summieren). Anstelle dieses Kleinst-Quadrate-Kriteriums kann bei ausreißerbehafteten Zeitreihen auch ein robustes Anpassungskriterium (etwa Ersetzen von $(\cdot)^2$ durch $|\cdot|$ oder durch eine bei M-Schätzern übliche ρ-Funktion) verwendet werden.

Ein Kompromiß zwischen Glattheit und Güte der Anpassung wird erreicht durch Lösung eines Minimumproblems der Art

$$\tau^2\sum_{t=1}^{T}(I - L)^k D_q y_T(t) + S_T^2 \Rightarrow \min_{y_T}. \tag{4.6}$$

Dabei ist $\tau^2 \in \mathbb{R}_+$ ein Steuerparameter, mit dem die Gewichte zwischen Glattheit und Güte der Anpassung kontinuiertlich gesteuert werden können.

Das Problem (4.6) besitzt eine explizite Lösung, die in der Form $y_T = W_T x_T$ geschrieben werden kann. Im einzelnen sei auf Hebbel und Heiler (1987) verwiesen. Die Lösung ist ein diskreter, natürlicher Spline (Hebbel, 1982), und sie kann in Trend-Zyklus- und Saisonkomponente in natürlicher Weise aufgespalten werden.

Die Matrix W_T ist invariant gegenüber Verschiebungen auf der Zeitachse ($t \to t - t_0$). Der Lösungsansatz kann daher sowohl global, für die gesamte Beobachtungsperiode, als auch lokal, d.h. auf Stützbereiche der Länge $m < T$ angewendet werden. Im letzteren Fall werden die

Gewichte des gleitenden Durchschnitts aus den Zeilen von W_m ausgewählt. Dieser Ansatz liegt dem "Verallgemeinerten Berliner Verfahren (VBV)" zugrunde.

Die Matrix W_T ist (bei endlichem τ^2) nicht idempotent, jedoch werden Funktionen aus dem Nullraum der Glattheitsoperatoren (ideal glatte Komponenten) bei wiederholter Anwendung reproduziert.

Die Komponentenverläufe werden um so glatter, je größer τ^2 gewählt wird. Für $\tau^2 \to 0$ führt das Verfahren zu einer reinen Dateninterpolation (nur das Anpassungskriterium ist wirksam). Für $\tau^2 \to \infty$ werden die ideal glatten Funktionen aus dem Nullraum oder Glattheitsoperatoren (Polynome vom Grad $k-1$ und streng periodische Funktionen) an die Daten angepaßt. Bei lokalem Ansatz führt dies zu dem dem "Berliner Verfahren" zugrundliegenden Modell (vgl. Heiler, 1970), das zwar den Vorteil einer großen Randstabilität der saisonalen Komponente, jedoch den Nachteil der geringeren Randstabilität der Trend-Zyklus-Komponente (bedingt durch den bekannten Nachteil der geringen Anpassungsgüte von Polynomen in den Randbereichen) gegenüber dem Splines-Ansatz aufweist.

Die globalen Ansätze von Akaike (1980), Pauly und Schlicht (1982, 1983) sowie Kitagawa und Gersch (1984) sind zum obigen eng verwandt und arbeiten mit einem ähnlichen Minimierungsansatz. Der Unterschied besteht im wesentlichen darin, daß die Trend-Zyklus-Komponente g_T und die Saisonkomponente s_T schon im Ansatz getrennt werden ($y_T = g_T + s_T$).

Bezüglich der Saisonkomponente wird ein weiterer Glattheitsoperator

$$(I + L + L^2 + \ldots + L^{p-1}) = \sum_{j=0}^{p-1} L^j \tag{4.7}$$

hinzugefügt, der zum Ausdruck bringt, daß bei einer idealen Saisonfigur sich p aufeinanderfolgender Werte zu Null aufaddieren. Unter Verwendung der obigen Glattheitsoperatoren (4.3) und (4.4) laufen diese Ansätze dann auf eine Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} &\tau_1^2 \sum_t (\nabla_k g_T(t))^2 + \tau_2^2 \sum_t ((I - L^p) s_T(t))^2 \\ &+ \tau_3^2 \sum_t \left(\sum_{j=0}^{p-1} L^j s_T(t) \right)^2 + \sum_t (x_T(t) - g_T(t) - s_T(t))^2 \Longrightarrow \min_{s_T, g_T} \end{aligned} \tag{4.8}$$

hinaus. Dabei sind $\tau_1^2, \tau_2^2, \tau_3^2$ Einstellparameter zur Steuerung der Glattheit von Trend-Zyklus-Komponente und Saison.

Bei Schlittgen (1989) werden robuste Varianten der beiden vorgestellten Ansätze diskutiert, wobei im Anpassungskriterium das Quadrat ersetzt wird durch eine bei M-Schätzern verwendete ρ-Funktion.

Bei den meisten anderen, bisher in der Praxis angebotenen Verfahren vermißt man eine entsprechende, klare Konzeption und Präzisierung der Vorstellung von Glattheit.

Die oben eingeführten Glattheitsoperatoren können als Bausteine zur Konstruktion von Maßzahlen für den Grad der Glattheit der Trend-Zyklus-Komponente und der Saisonkomponente (bzw. der Variabilität beider Komponenten) empirisch nach bestimmten Verfahren analysierter Zeitreihen verwendet werden.

4.2.7 Randstabilität

Wie schon erwähnt, kommt es mit Ausnahme der einseitigen Filter bei allen übrigen Zeitreihenanalysesystemen am aktuellen Rand zu Revisionen bei den Verläufen der Systemkomponenten, wenn neue Beobachtungen hinzukommen. Dies ist ganz natürlich und auch wünschenswert, da neue Beobachtungen auch Informationen über die Systemverläufe in den unmittelbaren Vorperioden enthalten. Vom inhaltlichen Standpunkt her können deshalb Verfahren ohne Revisionen gar nicht wünschenswert sein. Andererseits können solche Anpassungen an den aktuellen Informationsstand auch Revisionen bei den daraus resultierenden empirischen Diagnosen und Prognosen (etwa zur kurzfristigen Konjunkturvorhersage) nach sich ziehen, die, wenn sie zu oft auftreten und zu heftig ausfallen, in der Praxis zu großen Problemen führen. Von diesem Standpunkt aus wäre ein System als ideal zu bezeichnen, das den aktuellen Systemzuständen $y(T), y(T-1), y(T-2), \ldots$ und deren Veränderungen schon zur Zeit T dieselben Werte zuweist, wie es das nach Ablauf einiger weiterer Perioden tut. Ein solches "ideal randstabiles" System mit

$$y_T(T) = y_{(T+1)}(T) = \ldots = y_{(T+h)}(T) = \ldots =: y(T)$$

läßt sich unter Verwendung von Konstruktionsprinzipien im Frequenzbereich stets finden. Ob der so ermittelte Komponentenverlauf den unbekannten, "wahren" Verlauf des dahinterstehenden realen Systems korrekt widerspiegelt, erscheint jedoch fraglich. Wo das Ideal zwischen flexibler Anpassung und absoluter Randstabilität liegt, läßt sich methodisch nicht beantworten und dürfte auch vom praktischen Untersuchungsziel und der Eigenart der untersuchten Zeitreihe abhängen. Empirische Systeme mit hohem Rauschpegel erfordern straffe Zügel, geringe Streuungen in den Residuen (hohe "signal to noise ratios") erlauben flexible Verfahren. Es erscheint deshalb sinnvoll, nach Maßzahlen zu suchen, die ein Urteil darüber ermöglichen, welchen Grad der Randstabilität ein bestimmtes Verfahren (oder eine gewisse Parametereinstellung bei einem Verfahren) erreicht. Dazu ist natürlich notwendig, daß sich der vom Analysesystem ausgegebene Verlauf nach Ablauf einer gewissen Frist stabilisiert. Als Bewertungskriterium kann man einmal die Zeitspanne heranziehen "die verstreicht, bis die Grundrichtung der untersuchten Zeitreihe

anhand der Ergebnisse des Analyseverfahrens sicher erkennbar ist" (Schäffer, 1988). Zum anderen sind natürlich auch die Größenordnungen der Revisionen von Bedeutung, wobei es noch darauf ankommt, an welcher Stelle des aktuellen Randes sie vorgenommen werden. Von praktischer Bedeutung sind weiter auch Aussagen über die Veränderungen Δy im Randbereich sowie über das Vorzeichen dieser Veränderungen ("es geht aufwärts", oder "es geht abwärts").

Auch Graphiken können bei der Beurteilung der Situation hilfreich sein, in denen die Stärke der Revisionen vom aktuellen Rand bis zum Mittelbereich dargestellt wird. Bezeichnet $h = T - T_*$ die von T unabhängige Länge des Endbereichs eines Analysesystems, so kann $y_T(T)$ als Prognosewert für den später ermittelten Systemzustand $y_{T+h+1}(T)$ interpretiert werden. Entsprechendes gilt für $y_T(T-1)$ bezüglich $Y_{T+h}(T-1)$ etc. Deshalb können im Prinzip alle im Zusammenhang mit Prognoseverfahren entwickelten Prognosegütemaße zur Beurteilung der Randstabilität herangezogen werden. Im folgenden Abschnitt werden einige davon vorgestellt. Um solche Maße empirisch bestimmen zu können, bedarf es einer retrospektiven Vorgehensweise:
Die historischen Zeitreihen der Länge T werden zunächst gekürzt, und ab einem $\tilde{T} \geq T_0$ im Mittelbereich der Zeitreihe werden sukzessive Analysen durchgeführt. So erhält man die retrospektiven Wertereihen

$$y_t(t), y_t(t-1), \ldots, y_t(t-h) \quad \text{für} \quad t = \tilde{T}, \tilde{T}+1, \ldots, T-h,$$

für Zeitpunkte, die zur Zeit T im Mittelbereich $\mathcal{T}_m$ der Zeitreihe liegen. Diese werden dann mit den stabilisierten Zustandsberechnungen

$$y_T(t), y_T(t-1), \ldots, y_T(t-h)$$

verglichen.

Schäffer spricht im Zusammenhang mit solchen Vergleichen von der Treffsicherheit oder Effizienz einer Methode. Zur Messung der Effizienz hat er erstmals 1976 eine Maßzahl vorgeschlagen, deren neueste Version in Abschnitt 4.3.2 behandelt wird.

Die Verwendung des Wortes "Effizienz" im Verfahrensvergleich kann allerdings Vorstellungen suggerieren, die sich bei unreflektierter Anwendung als falsch erweisen. So ist etwa ein einseitiger Filter, bei dem $y_t(t) = y_{t+h}(t)$ für alle $h \geq 0$ gilt, per Definition effizient und jedes andere Analysesystem im Vergleich dazu ineffizient. Man muß daher die Annahme beachten, die Schäffer trifft: "Der grundsätzlich unbekannte "tatsächliche Zustand des Systems" kann hinreichend genau durch eine retrospektive Analyse der Zeitreihe ermittelt werden (das ist erfahrungsgemäß meist schon zwei Jahre nach dem letzten Beobachtungszeitpunkt möglich)" (Schäffer, 1991).

Das obige Beispiel mit den einseitigen Systemen zeigt, daß unter Umständen (welchen?) Ver-

gleichwerte aus einem anderen Verfahren (welchem?) zu übernehmen sind. Mit dem Wort Effizienz (und auch dem Wort Stabilität) wird eine Wertung verbunden, die einer Aussage über das Verhalten eines Zeitreihenanalysesystems am aktuellen Rand nicht unbedingt gerecht wird und beim Anwender falsche Assoziationen hervorrufen kann.

4.3 Maßzahlen zur Quantifizierung von Beurteilungskriterien

4.3.1 Allgemeine Anforderungen an Maßzahlen

Zur Quantifizierung der oben aufgeführten Kriterien sollen nun mögliche Maßzahlen angegeben werden. Bei den qualitativen Kriterien Orthogonalität und Idempotenz kann es natürlich nur darum gehen, den Grad der eventuellen Verletzung dieser Forderung geeignet zum Ausdruck zu bringen. Entsprechend dem Grundprizip, daß äquivalenten Sachverhalten gleiche Werte der Maßzahl M zugeordnet sein sollten, sind gewisse Mindestanforderungen an solche Maßzahlen zu stellen. Eine solche Forderung ist beim Vergleich von Zeitreihenanalyseverfahren die der Transformationsinvarianz. Invarianzprinzipien in der mathematischen Statistik besagen zum Beispiel, daß die Aussage eines Tests nicht von der gewählten Meßskala abhängen sollte. Übertragen auf eine deskriptive Maßzahl würde dies etwa bedeuten, daß die Maßzahl invariant sein soll gegenüber einer möglichst großen Gruppe G von Transformationen der Daten, d.h.

$$M(g(x_1),\ldots,g(x_T)) = M(x_1,\ldots,x_T) \quad \text{für alle } g \in G.$$

In unserem Fall sollten die Maßzahlen zumindest invariant sein gegenüber der Gruppe der Lineartransformationen[5], um Anwendungen auf unterschiedliche Zeitreihen miteinander vergleichen zu können. Diese Forderung der Lokations- und Skaleninvarianz bedeutet

$$M(a+bx_1,\ldots,a+bx_T) = M(x_1,\ldots,x_T) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Eine weitere wünschenswerte Eigenschaft einer Maßzahl ist ihre Normierung, also etwa die Beschränkung des Wertebereichs auf das Intervall [0, 1]. Häufig läßt sich aber keine geeignete Bezugsgröße finden, um dies zu erreichen.

Schließlich kann es auch wünschenswert sein, daß der Wert einer Maßzahl nicht zu sehr von einzelnen ausreißerbehafteten Beobachtungswerten abhängt, es sei denn, diese Maßzahl soll selbst die Ausreißerempfindlichkeit eines Verfahrens zum Ausdruck bringen.

[5] Obwohl auch beispielsweise logarithmische Transformationen in der Zeitreihenanalyse – um ein multiplikatives Modell auf ein additives zurückzuführen – eine gewisse Rolle spielen.

Bei der vergleichenden Verfahrensbeurteilung können Maßzahlen für den gesamten Beobachtungsbereich oder auch nur für Teilbereiche von Interesse sein. Da der Anfangsbereich einer Zeitreihe, in den die Einschwingphase von Analysesystemen fällt, in der Regel nur von historischem Interesse ist, wird man ihn häufig bei der vergleichenden Beurteilung außer acht lassen. Bei Glattheitsbetrachtungen können sowohl der Mittelbereich als auch der Endbereich – oder auch beide getrennt – von Interesse sein. Bei Überlegungen zur Randstabilität muß die retrospektive Analyse auf den mittleren Bereich beschränkt bleiben, in dem kein Einschwingverhalten mehr festzustellen und keine Revisionen der errechneten Systemszustände mehr vorgenommen werden. Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden bei Summen die Angabe des Summationsbereichs meist weggelassen. Es kann sich um $\mathcal{T}, \mathcal{T}_m \cup \mathcal{T}_e, \mathcal{T}_m$ oder nur $\mathcal{T}_e$ handeln. Die Länge wird einheitlich mit n bezeichnet.

Bilden Differenzen der Art $\tilde{y}_T(t) - y_T(t)$ Grundlage eines Vergleichs, so erhält man eine lokations-, jedoch nicht skaleninvariante Maßzahl. Umgekehrt führt die Verwendung von Quotienten $\tilde{y}_T(t)/y_T(t)$ zu einer skaleninvarianten, jedoch Niveau-abhängigen Maßzahl. Letzteres gilt auch für die relativen Differenzen $(\tilde{y}_T(t) - y_T(t))/y_T(t)$ $(y_T(t) > 0$ für alle t vorausgesetzt).

Maßzahlen mit relativen Differenzen sollten also dann, wenn Zeitreihen unterschiedlichen Meßniveaus in den Vergleich einbezogen werden, nicht benützt werden. Ein Ausweg kann die Normierung der Differenzen durch Division mit einem geeigneten Skalenmaß sein.

4.3.2 Vorschläge für einige Maßzahlen

(a) Orthogonalität

Als normiertes Skalarprodukt zur Beurteilung der Stärke der Verletzung der Orthogonalitätsforderung bietet sich der Korrelationskoeffizient nach Bravais Pearson an:

$$R(y,z) = \frac{\sum(y_T(t) - \bar{y})(z_T(t) - \bar{z})}{[\sum(y_T(t) - \bar{y})^2 \sum(z_T(t) - \bar{z})^2]^{1/2}}$$

mit $z_T(t) = x_T(t) - y_T(t)$, $\bar{y} = n^{-1} \sum y_T(t)$, $\bar{z} = n^{-1} \sum z_T(t)$.

Auch mehr Ausreißer-resistente Korrelationsmaße wie der Rangkorrelation oder Kendalls τ können, insbesondere bei nichtlinearen Analyseverfahren, sinnvoll sein. Die Vorzeichen der ermittelten Korreltationsmaße können unter Umständen ebenfalls zur Interpretation herangezogen werden ("Unterbereinigung" bzw. "Überbereinigung").

(b) Idempotenz

Zur Beurteilung einer Abweichung von der Idempotenzforderung betrachten wir die ermittelte Systemkomponente $y_T = A_T(x_T)$ und den Ausgang des Systems nach Anwendung auf y_T, $\tilde{y}_T = A_T(y_T)$.

Die relativen Abstände bzw. die relativen Abstandsquadrate zwischen den beiden Verläufen,

$$RD(y,\tilde{y}) = n^{-1}\sum\left|\frac{\tilde{y}_T(t)-y_T(t)}{y_T(t)}\right|$$

bzw.

$$RSD(y,\tilde{y}) = n^{-1}\sum\left(\frac{\tilde{y}_T(t)-y_T(t)}{y_T(t)}\right)^2, \quad y_T(t)>0 \text{ für alle } t,$$

ergeben zwei skaleninvariante, jedoch nicht lageinvariante und nach oben nicht beschränkte Maßzahlen für die Abweichung vom Ideal der Idempotenz. Eine lage- und skaleninvariante sowie nach oben durch 1 beschränkte Maßzahl ist gegeben durch

$$D(y,\tilde{y}) = \frac{[\sum(\tilde{y}_T(t)-y_T(t))^2]^{1/2}}{[\sum(\tilde{y}_T(t)-y^*)^2]^{1/2}+[\sum(y_T(t)-y^*)^2]^{1/2}}$$

wobei als Bezugspunkt y^* etwa genommen werden könnte

$$y^* = (\bar{\tilde{y}}+\bar{y})/2 \quad \text{mit } \bar{\tilde{y}} = n^{-1}\sum\tilde{y}_T(t),\ \bar{y} = n^{-1}\sum y_T(t).$$

Diese Maßzahl ist, wie man sieht, aus der Dreiecksungleichung abgeleitet. Der Wert 1 wird genau dann angenommen, wenn $\tilde{y}_T = -cy_T$, $c>0$.

(c) Glattheit

Maßzahlen zur Beurteilung der Glattheit von Trend-Zyklus- bzw. Saisonkomponente basieren auf den in Abschnitt 4.2.6 eingeführten Glattheitsoperatoren. Die Glattheit der Trend-Zyklus-Komponente wird dort quantifiziert durch die Summe $\sum(\nabla_k y_T(t))^2$. In Ingenieuranwendungen wird als Krümmungsmaß einer Funktion gern das Integral über das Quadrat der zweiten Ableitung verwendet. Dem entspräche in unserem diskreten Fall, in der obigen Summe $k=2$ zu setzen. Eine Normierung auf das Intervall [0,1] wird erreicht durch den Quotienten

$$RSCR_k = 2^{-k}\left(\frac{\sum(\nabla_k y_T(t))^2}{\sum(y_T(t)-\bar{y})^2}\right)^{1/2}$$

In der L_1-Norm ist das entsprechende Glattheitsmaß

$$ACR_k = 2^{-k}\frac{\sum|\nabla_k y_T(t)|}{\sum|(y_T(t)-\tilde{y}|}$$

mit $\tilde{y}$ als Median der $y_T(t)$.

Spielt die Niveauabhängigkeit beim Vergleich keine Rolle, dann können auch die relativen Krümmungsmaße

$$n^{-1}\sum\left(\frac{\nabla_k y_T(t)}{y_T(t)}\right)^2 \text{ bzw. } n^{-1}\sum\left|\frac{\nabla_k y_T(t)}{y_T(t)}\right|$$

verwendet werden.

Entsprechende Kenngrößen zur Beurteilung der Glattheit (Variabilität) der Saisonkomponente erhält man, indem oben der Operator $\nabla_k = (I-L)^k$ durch $(I-L^p)$ ersetzt wird,

$$RSSR = \left(\frac{\sum(y_T(t)-y_T(t-p))^2}{4\sum(y_T(t)-\bar{y})^2}\right)^{1/2},$$

bzw.

$$ASR = \frac{\sum|y_T(t)-y_T(t-p)|}{2\sum|y_T(t)-\bar{y}|}$$

bzw.

$$n^{-1}\sum\left(\frac{y_T(t)-y_T(t-p)}{y_T(t)}\right)^2 \quad \text{und} \quad n^{-1}\sum\left|\frac{y_T(t)-y_T(t-p)}{y_T(t)}\right|.$$

(d) Randstabilität

Als eine die Randstabilität charakterisierende Maßzahl wurde bereits die Geschwindigkeit der Anpassung erwähnt. Bei Systemen, die auf gleitenden Mittelwerten basieren, läßt sich die Zeitspanne H, nach der es zu keinen Revisionen mehr kommt, genau angeben oder aus den Ergebnissen feststellen. Bei anderen - etwa bei auf globalen Strukturmodellen basierenden - muß man präzisieren, wann man einen Verlauf als "im wesentlichen stabilisiert" ansehen will. Wird dazu eine Schranke ϵ vorgegeben, dann ist eine mögliche Wahl

$$H_\epsilon = \min\{h \mid \left|\frac{y_{t+h}(t)-y_{t+h-1}(t)}{y_{t+h}(t)}\right| < \epsilon\}.$$

Dabei stammen die $y_{t+h}(t)$ aus einer retrospektiven Analyse im Mittelbereich und es wird unterstellt, daß H_ϵ nicht von t abhängt (ansonsten wäre der ungünstigste Fall, d.h. $\max_{t\in\mathcal{T}_m} H_{\epsilon,t}$ zu wählen).

Wir interpretieren nun $y_{t+h}(t)$, $t \in \mathcal{T}_m$, $h = 0,1,\ldots,H-1$, in der retrospektiven Analyse als Prognose für $y_{t+H}(t) =: y(t)$. Ein beliebtes Prognosegütemaß ist der mittlere (quadratische) Prognosefehler

$$MSPE(h) = n^{-1}\sum_{t\in\mathcal{T}_m}(y_{t+h}(t)-y(t))^2, \quad h = 0,1,\ldots,H-1.$$

Daraus läßt sich, durch entsprechende Normierung, die folgende, dem zweiten Theilschen Ungleichheitskoeffizienten verwandte lage- und skaleninvariante Maßzahl

$$TU(h) = \left(\frac{\sum(y_{t+h}(t)-y(t))^2}{\sum(y(t)-\bar{y})^2}\right)^{1/2}, \quad h = 0,1,\ldots,H-1$$

ableiten, die jedoch nicht auf das Intervall [0, 1] beschränkt ist. Letzteres läßt sich erreichen, wenn man wie bei der Maßzahl $D(y, \tilde{y})$ bei der Idempotenzforderung vorgeht. Die resultierende Maßzahl

$$TU_1(h) = \frac{[\sum(y_{t+h}(t) - y(t))^2]^{1/2}}{[\sum(y_{t+h}(t) - y^*)^2]^{1/2} + [\sum(y(t) - y^*)^2]^{1/2}}$$

ähnelt dem ersten Theilschen Ungleichheitskoeffizienten. Die $TU(h)$ entsprechende Maßzahl in der L_1-Norm ist

$$\tilde{TU}(h) = \frac{\sum|y_{t+h}(t) - y(t)|}{\sum|y(t) - \tilde{y}|}, \quad h = 0, 1, \ldots, H-1$$

mit $\tilde{y}$ als dem Median der $y(t)$.

Der Graph $(h, TU(h))$ kann als "Stabilogramm" zur optischen Veranschaulichung beim Verfahrensvergleich beitragen.

Beliebte, auf unseren Fall übertragbare Prognosefehlermaße sind auch der relative mittlere quadratische Prognosefehler

$$RMSPE(h) = n^{-1}\sum\left(\frac{y_{t+h}(t) - y(t)}{y(t)}\right)^2, \quad h = 0, 1, \ldots, H-1$$

bzw. der mittlere absolute Prognosefehler

$$RMAPE(h) = n^{-1}\sum\left|\frac{y_{t+h}(t) - y(t)}{y(t)}\right|, \quad h = 0, 1, \ldots, H-1.$$

Die durchschnittliche relative Stärke aufeinanderfolgender Revisionen, gemessen durch

$$MSRC = n^{-1}\sum_t\left(H^{-1}\left(\sum_{h=1}^{H}\left(\frac{y_{t+h}(t) - y_{t+h-1}(t)}{y_{t+h}(t)}\right)^2\right)\right),$$

kann ebenfalls zum Verfahrensvergleich herangezogen werden.

Wichtiges Charakteristikum einer Prognose ist, ob die Richtung der Veränderung des Systemzustands korrekt vorhergesagt wird. Von einem Treffer spricht man, wenn $sign(y_t(t) - y_t(t-1)) = sign(y(t) - y(t-1))$. Bezeichnet $\mathbf{1}(\cdot)$ die Indikatorfunktion des Ereignisses in Klammern, dann ist die Trefferquote

$$Q = n^{-1}\sum\mathbf{1}(sign(y_t(t) - y_t(t-1)) = sign(y(t) - y(t-1))).$$

Dieses einfache Prognosemaß kann ebenfalls für die aktuelle Konjunkturdiagnose verwendet werden. Es ist jedoch wenig aussagefähig, wenn viele "kleine", praktisch unerhebliche Richtungsänderungen vorliegen. Eine erste Verbesserung bietet die Angabe des Anteils der sogenannten Bandtreffer, wobei alle Fälle gezählt werden, die in einem Band konstanter Breite um die Diagonale $\nabla y_t(t) = \nabla y(t)$ (Linie der "Volltreffer") liegen. Das von Schäffer (1979, 1988) vorgeschlagene Effizienzmaß stellt eine Verfeinerung der Bandtrefferquote in mehrfacher Hinsicht

dar. Dabei wird eine Bewertung der Abweichung zwischen $\nabla y_t(t)$ (diagnostizierte Änderung) und $\nabla y(t)$ (tatsächliche Änderung) durch eine bis zu einem (vorzugebendem) Schwellenwert c, von dem ab eine Diagnose als unbrauchbar gilt, monoton abnehmende Funktion vorgenommen.

Außer vom Abstand $\nabla y_t(t) - \nabla y(t)$ wird die Bewertung noch davon abhängig gemacht, ob die "Tendenz" richtig getroffen wurde ($sign\nabla y_t(t) = sign\nabla y(t)$) oder ob ein Tendenzfehler ($sign\nabla y_t(t) \neq sign\nabla y(t)$) vorliegt. Dazu wird ein weiterer Streuungsparameter ("Verschärfungsgrad") q mit $0 \leq q \leq 1$ eingeführt.

Mit Turkey's Bi-square-Funktion

$$f(u|c) = \begin{cases} [1-(u/c)^2]^2 & ,|u| \leq c \\ 0 & ,|u| > c \end{cases}$$

als Bewertungsfunktion und dem "verschärften" Schwellenwert

$$c_q = \begin{cases} c & ,\nabla y_t(t) \cdot \nabla y(t) \geq 0 \\ c[1-q-f(\nabla y_t(t) + \nabla y(t)/c)] & ,\nabla y_t(t) \cdot \nabla y(t) < 0 \end{cases}$$

wird die Situation $(\nabla y_t(t), \nabla y(t))$ bewertet mit $f(\nabla y_t(t) - \nabla y(t)|c_q)$ und das resultierende Effizienzmaß für n aufeinanderfolgende Perioden ist

$$EFF = n^{-1} \sum f(\nabla y_t(t) - \nabla y(t)|c_q).$$

Diese Maßzahl ist lageinvariant und skaleninvariant, falls der Schwellenwert proportional zu einem Skalenmaß der $\nabla y(t)$ gewählt wird. Eine Möglichkeit, c zu präzisieren, besteht darin, den Schwellenwert proportional zum Signal-Rausch-Verhältnis zu wählen.

Die Maßzahl hängt von der Wahl von c und q ab. Wie man leicht sieht, gilt $EFF \to 1$ für $c \to \infty$ und $EFF \to 0$ für $c \to 0$.

(e) Signal-Rausch-Verhältnis

Die Residualvarianz der um Trend-Zyklus- und Saisonkomponente bereinigten Zeitreihe steht als Kriterium, wie im Abschnitt Glattheit ausgeführt, in Konkurrenz zu den Glattheitskriterien, und viele Verfahren bieten die Möglichkeit, die Größenordnungen über die Festlegung von Tuning-Konstanten beliebig zu steuern.

In der Spektralanalyse stationärer Prozesse wird das Signal-Rausch-Verhältnis SNR (signal to noise ratio) verwendet als eine (frequenzabhängige) Kenngröße bei der Extraktion von Signalen. Es ist definiert als der Quotient aus der Amplitude eines Signals (mit einer bestimmten Frequenz) und der Standardabweichung des dieses Signal überlagernden Rauschens. Je höher SNR (λ),

desto besser kann das Signal extrahiert werden. Eine entsprechend abgewandelte, deskriptive Maßzahl kann zur Charakterisierung von Zeitreihen beitragen und auch im Verfahrensvergleich nützliche Informationen beitragen. Ist z_T die Residualreihe und y_T die betrachtete Komponente, dann wird ein empirisches Signal-Rausch-Verhältnis definiert durch

$$SNR(y) = \left(\frac{\sum (y_T(t) - \bar{y})^2}{\sum (z_T(t) - \bar{z})^2} \right)^{1/2}.$$

Ob allerdings für die Trend-Zyklus-Komponente einer stark trendbehafteten Zeitreihe der Zähler eine geeignete Größe zur Messung der Intensität des Signals darstellt, sei hier dahingestellt. In einem solchen Fall könnten im Zähler beispielsweise auch die Abweichungen von einer einfachen Trendfunktion verwendet werden.

5 Literatur

Akaike, H. (1980): Seasonal adjustment by a Bayesian modelling. J. Time Series Analysis 1, 1-13.

Cleveland, W.S., Dunn, D.M., Terpenning, I.J. (1978): SABL: A resistant seasonal adjustment procedure with graphical methods for interpretation and diagnosis. In: A. Zellner (Hrsg.): Seasonal analysis of economic time series. Economic Research Report, ER-1, Bureau of the Census, Washington D.C., 201-241.

Fahrmeir, L. (1991): Zustandsraummodelle: Filtern, Glätten und Prognose dynamischer Systeme. Allg. Statist. Archiv 75, 53-74.

Grether, D.M., Nerlove, M. (1970): Some properties of 'optimal' seasonal adjustment. Econometrica, vol. 38, 682-704.

Hebbel, H. (1982): Lineare Systeme, Analysen, Schätzungen und Prognosen (unter Verwendung von Splinefunktionen). Habilitationsschrift, Dortmund.

Hebbel, H., Heiler, S. (1987): Trend and saisonal decomposition in discrete time. Statistische Hefte 28, 133-158.

Heiler, S. (1970): Theoretische Grundlagen des "Berliner Verfahrens". In: W. Wetzel (Hrs.)

Heiler, S. (1976): Entwurf kausaler Filter zur Analyse ökonomischer Zeitreihen bei Vorschriften im Frequenzbereich. In: K.-A. Schäffer (Hrsg): Beiträge zur Zeitreihenanalyse, Sonderheft 9 zum Allg. Statistischen Archiv, 7-33.

Heiler, S. (1991): Zeitreihenanalyse – Ein kurzer Abriß der historischen Entwicklung. Allg. Statist. Archiv 75, 1-8.

Heiler, S., Willers, R. (1976): Design of recursive filters for discrete stationary processes. COMPSTAT 1976 Proceedings in computational statistics. Wien, 311-317.

Huber, P.J. (1979): Robust smoothing. In: R.L. Launer und G.N. Wilkinson (Hrsg.): Robustness in statistics. Academic Press, New York, 33-47.

Kitagawa, G., Gersch, W. (1984): A smoothness priors state-space modelling of time series with trend and seasonality. JASA 79, 378-389.

Kohlmüller, G. (1987): Analyse von Zeitreihen mit Kalenderunregelmäßigkeiten. Verlag Josef Eul, Bergisch Gladbach.

Metz, R. (1984): Zur empirischen Evidenz ≪langer Wellen≫. Kyklos 37, 266-290.

Metz, R., Stier, W. (1991): Filter design in the frequency domain. In: Kleinknecht, A., Mandel, E., Wallenstein I. (Hrsg.): New findings in long wave research. London.

Michels, P. (1991): Nichtparametrische Modellierung von Zeitreihen mit Hilfe von Kern- und Nearest-Neighbour-Schätzern. Dissertation, Universität Konstanz.

Nerlove, M. (1980): Unobserved components models for economic time series. In: M. Nerlove et al. (1980), 9-40.

Nerlove, M., Heiler, S., Lenz, H.-J., Schips, B., Garbers, H. (1980): Problems of time series analysis. Bibliographisches Institut, Mannheim.

Oppenheim, A.V., Willsky, A.S. (1989): Signale und Systeme. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim.

Pauly, R. (1987): Estimation and model selection of nonstationary time series models with trend, season and trading day components. Beiträge des Instituts für Empirische Wirtschaftsforschung, Fachbereich Wirtschaftswissenschaft, Universität Osnabrück, Nr.6.

Pauly, R. (1990): Strukturelle Komponentenmodelle in der Zeitreihenzerlegung. Beiträge des Instituts für Empirische Wirtschaftsforschung, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Osnabrück.

Pauly, R., Schlicht, E. (1982): The decomposition of economic time series: A deterministic and stochastic approach. Beiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Osnabrück.

Pauly, R., Schlicht, E. (1983): Descriptive seasonal adjustment by minimizing perturbations. Empirica vol. 1, 15-28.

Schäffer, K.-A. (1970): Beurteilung einiger herkömmlicher Methoden zur Analyse von ökonomischen Zeitreihen. In: W. Wetzel (Hrsg.), 131-164.

Schäffer, K.-A. (1976): Vergleich der Effizienz von Verfahren zur Saisonbereinigung einer Zeitreihe. In: K.-A. Schäffer (Hrsg.): Beiträge zur Zeitreihenanalyse, Sonderheft 9 zum Allg. Statistischen Archiv, 83-104.

Schäffer, K.-A. (1988): Probleme bei der Analyse der Arbeitslosenreihe. In: Reyher, L. und Kühl, J. (Hrsg.): Resonanzen – Festschrift für Dieter Mertens. Nürnberg, 385-400.

Schäffer, K.-A. (1991): Bewertung der Effizienz von Diagnosemethoden. Entwurf, Köln.

Schäffer, K.-A. (1991): Methoden der Zeitreihenanalyse – Ein Überblick. Allg. Statist. Archiv 75, 24-36.

Schips, B., Stier, W. (1974): Zum Problem der Saisonbereinigung ökonomischer Zeitreihen. Metrika, Bd. 21, 65-81.

Schips, B., Stier, W. (1975): Gedanken zum Problem der Saisonbereinigung am "aktuellen Rand" einer Zeitreihe, IFO-Studien, 21. Jahrgang, 59-65.

Schips, B., Stier, W. (1976): Gedanken zur Verwendung rekursiver Filter bei der Saisonbereinigung ökonomischer Zeitreihen. In: K.-A. Schäffer (Hrsg.): Beiträge zur Zeitreihenanalyse, Sonderheft 9 zum Allgemeinen Statistischen Archiv, 105-128.

Schlicht, E. (1981): A seasonal adjustment principle and a seasonal adjustment method derived from this principle. JASA 76, 374-378.

Schlittgen, R. (1989): Robuste Glättung und Zerlegung von Zeitreihen. Diskussionsbeiträge aus dem Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität-Gesamthochschule Essen, Nr. 70.

Schlittgen, R. (1990): Robuste Glättung ökonomischer Zeitreihen. Allg. Statist. Archiv 74, 223-250.

Schlittgen, R. (1991): Ein moderner Zugang zur Analyse von Zeitreihen mit Ausreißern. Allg. Statist. Archiv 75, 75-102.

Schmidt, J. (1991): Anwendung der Zeitreihenanalyse zur Konjunkturdiagnose. Allg. Statist. Archiv 75, 9-23.

Spree, R. (1991): Lange Wellen wirtschaftlicher Entwicklung in der Neuzeit. In: H. Best et al. (Hrsg.): Historical Social Research, Supplement 4.

Stier, W. (1978): Zur Verknüpfung von "Zeitreihenanalyse" und "Frequenzbereichsanalyse" bei Saisonbereinigungsverfahren – ein Beitrag zur Zeitreihenanalyse. Math. Operationsforsch. Statist., Sec. Statistics, vol. 9, 369-381.

Stier, W. (1991): Methoden der Zeitreihenanalyse. Springer, Heidelberg, Berlin.

Strohm, W. (1986): Zur Frage der Kalenderbereinigung von Zeitreihen. Wirtschaft und Statistik 6/1986, 421-428.

Tukey, J. (1977): Exploratory data analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Velleman, P.F., Hoaglin, D.C. (1981): Applications, basics and computing of exploratory data analysis. Duxbury Press, Boston, Mass.

Wetzel, W. (Hrsg.) (1970): Neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der Zeitreihenanalyse. Sonderheft 1 zum Allg. Statist. Archiv.