

Abberger, Klaus

Working Paper

Nichtparametrische Quantilsprognose und ihre Anwendung auf Aktienrenditen

Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 279

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Abberger, Klaus (1995) : Nichtparametrische Quantilsprognose und ihre Anwendung auf Aktienrenditen, Diskussionsbeiträge - Serie II, No. 279, Universität Konstanz, Sonderforschungsbereich 178 - Internationalisierung der Wirtschaft, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/101460>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

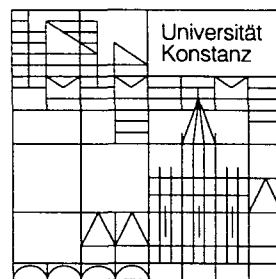
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



Sonderforschungsbereich 178
„Internationalisierung der Wirtschaft“

Diskussionsbeiträge

Juristische
Fakultät

Fakultät für Wirtschafts-
wissenschaften und Statistik

Klaus Abberger

**Nichtparametrische Quantilsprognose
und ihre Anwendung auf Aktienrenditen**

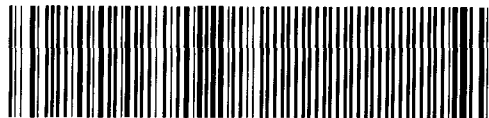
31. OKT. 1995 Weltwirtschaft
W 113 (279) *mir br sig gla*

Nichtparametrische Quantilsprognose und ihre Anwendung auf Aktienrenditen

Klaus Abberger

637592

W 113 (279)



Serie II - Nr. 279

September 1995

Nichtparametrische Quantilsprognose und ihre Anwendung auf Aktienrenditen

Klaus Abberger

SFB 178, Universität Konstanz

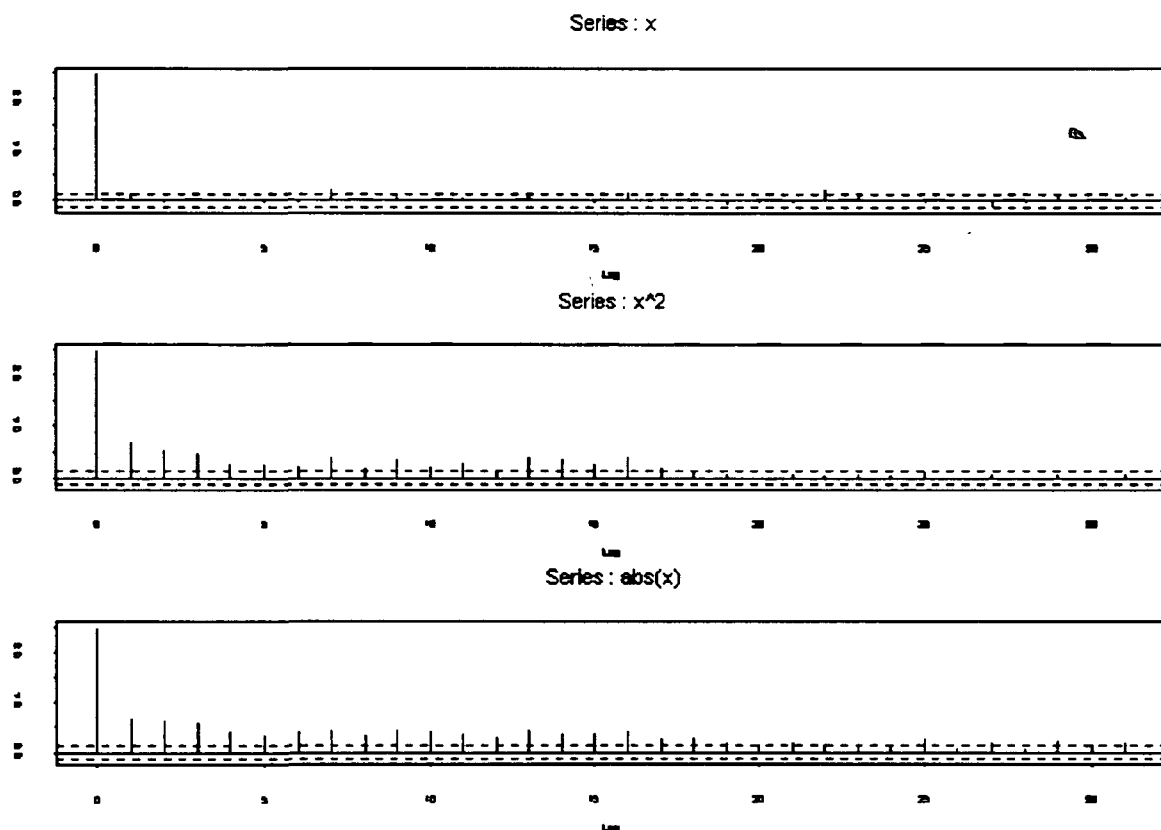
Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird die nichtparametrische Autoregression auf die Prognose von Quantilen angewendet. Verfahren der Kernregression werden benutzt, um zu autoregressiven Quantilsschätzern zu gelangen. Da die üblichen Maße zur Beurteilung der Prognose, wie etwa der mittlere quadratische Prognosefehler oder der Theilsche Ungleichheitskoeffizient, in diesem Fall ungeeignet sind, wird ein anderes Prognosemaß definiert. Der nichtparametrische Schätzer wird dann verwendet, um tägliche Renditen der Daimler-Benz Aktie zu prognostizieren. Die Prognosen werden mit Hilfe des definierten Prognosemaßes beurteilt und die Prognosen für verschiedene Quantile werden miteinander verglichen.

1 Einleitung

Sind Aktienkursänderungen prognostizierbar? - ist eine Frage die immer wieder gestellt und in Aufsätzen behandelt wird. Auch die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesem Problem. Gegenstand der Untersuchung sind die täglichen Renditen der Daimler-Benz Aktie ¹, wobei Renditen als $(Kurs_i - Kurs_{i-1})/Kurs_{i-1}$ definiert sind. Der betrachtete Zeitraum reicht vom 5.1.87 bis zum 30.4.93, mit insgesamt 1579 Beobachtungen. Abbildung 1 zeigt die Autokorrelationen für die Renditen, die quadrierten Renditen und

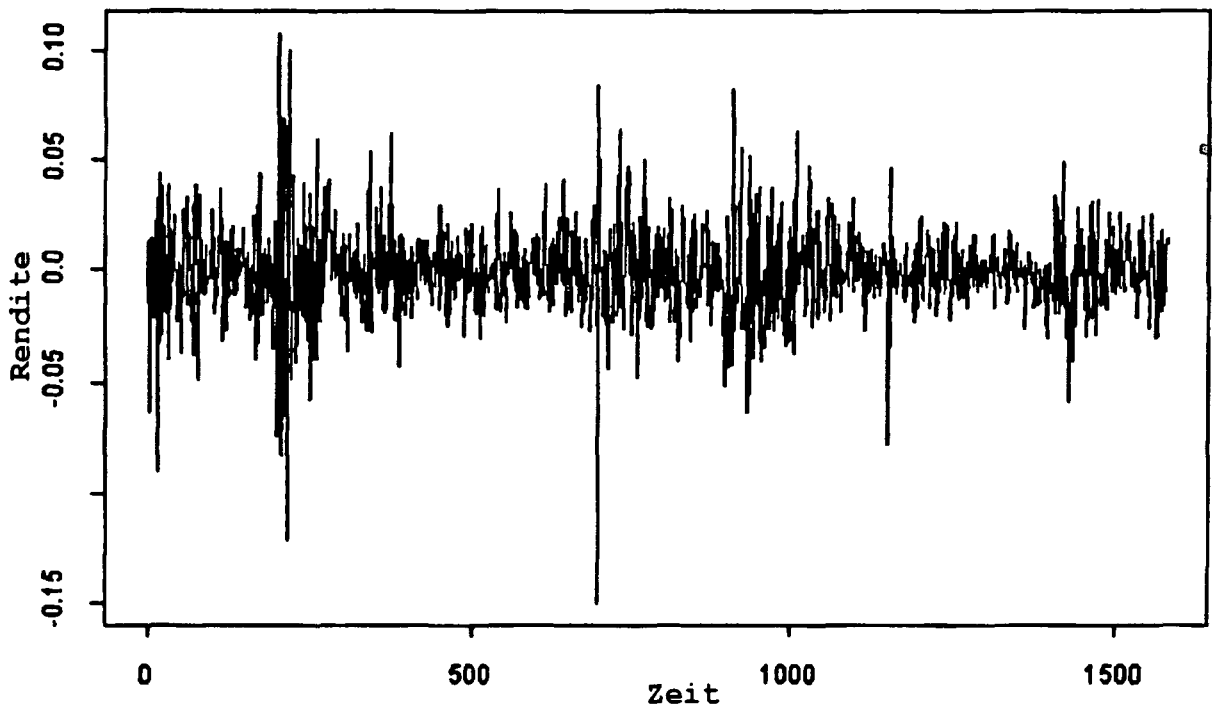
Abbildung 1: Autokorrelationen der Renditen (oberes Bild), der quadrierten Renditen (mittleres Bild) und der absoluten Renditen (unteres Bild) der Daimler-Benz Aktie.



¹Die Daten wurden von der Deutschen Finanzdatenbank Karlsruhe zur Verfügung gestellt.

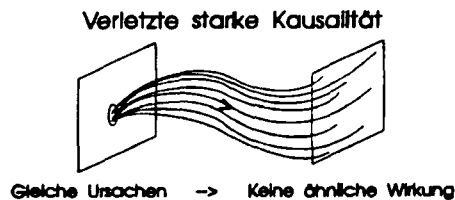
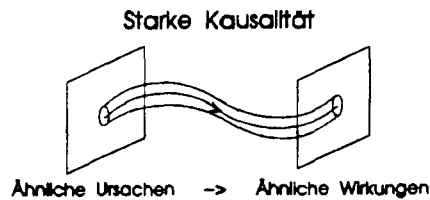
die absoluten Renditen. Zum Vorschein kommt ein in Finanzmarktdaten bekannter Effekt: die Renditen weisen keine nennenswerten Autokorrelationen auf, im Gegensatz zu den quadrierten Renditen und den absoluten Renditen, in denen Autokorrelationen vorhanden sind. Das bedeutet, daß eine hohe absolute Rendite eher auf eine hohe absolute Rendite als auf eine niedrige absolute Rendite folgt. Die Volatilität der Renditen verhält sich daher im Zeitablauf träge und es lassen sich Volatilitätscluster in der Zeitreihe beobachten. Abbildung 2 enthält die Zeitreihe der täglichen Daimler-Benz Renditen. Die

Abbildung 2: Zeitreihe der täglichen Daimler-Benz Renditen vom 5.07.87 bis zum 30.04.93



Graphik zeigt verschieden volatile Phasen und bestätigt die Hypothese der Existenz von Volatilitätscluster. Diese Eigenschaft kann aber auch implizieren, daß die heutige Verteilung der Rendite von vergangenen Renditen abhängt. Eine Möglichkeit, die im Rahmen dieses Aufsatzes näher betrachtet werden soll. Eine Stoßrichtung ist die Modellierung

Abbildung 3: Starke Kausalität versus verletzte starke Kausalität



der heutigen Varianz der Rendite durch vergangene quadrierte Renditen. Dies führt zu ARCH- und GARCH-Ansätzen (für einen Überblick über diese Modelle siehe z.B. Bollerslev et al. (1992)). In diesem Aufsatz wird nicht die Prognostizierbarkeit der Varianz der Renditen, sondern die Möglichkeit Quantile der Aktienrenditen zu prognostizieren untersucht. Zur Anwendung kommen nichtparametrische Regressionsverfahren, mit denen bedingte Quantile geschätzt werden. Intuitiv läßt sich die nichtparametrische Vorgehensweise wie folgt veranschaulichen: ausgehend von der heutigen Realisation X_t wird nach vergangenen Verläufen X_s gesucht, die dem Verlauf X_t ähnlich sind. Zur Prognose werden die auf X_s folgenden Werte Y_{s+1} verwendet.

Abbildung 3 versinnbildlicht den Begriff "starke Kausalität". Das starke Kausalitätsprinzip besagt: "ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen." Ist dieses Prinzip verletzt, können kleine Abweichungen in den Ursachen große Unterschiede in den Wirkungen erzeugen. Das ist der Ansatzpunkt der Chaostheorie [vgl. z.B. Loistl, Betz (1993)], die ebenfalls in der Analyse von Finanzmarktzeitreihen angewendet wird. Sie unterstellt das Wirken von deterministischen, nichtlinearen Funktionen. Aufgrund der verletzten starken Kausalität sind in diesem deterministischen System Prognosen nicht möglich. Im Gegen-

satz zur deterministischen Chaostheorie basiert die nichtparametrische Statistik auf der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die nichtparametrische Methode ist in der Lage, nichtlineare Zusammenhänge zu analysieren. Sie setzt dabei statt deterministischer Kausalität glatte bedingte Verteilungsfunktionen und streng stationäre Prozesse voraus.

Das nichtparametrische Verfahren, das im weiteren zur Anwendung kommt, ist die Kernschätzung bedingter Quantile. Sie soll zeigen, ob es in den Rändern der bedingten Verteilung der Daimler-Benz Renditen Abhängigkeiten gibt. Enthalten vergangene Renditen Informationen über die Schwänze der Verteilung der folgenden Rendite?

Die Strukturierung dieses Aufsatzes ist wie folgt: im nächsten Abschnitt wird ein Kernschätzer für bedingte Quantile definiert. Es werden einige Eigenschaften des Schätzers herausgearbeitet und ein Maß zur Beurteilung der Prognose vorgestellt. Der darauffolgende Abschnitt enthält die empirische Untersuchung der Daimler-Benz Renditen. Es werden Quantile bedingt auf vergangene Renditen, aber auch bedingt auf das vergangene Volumen der Aktie geschätzt. Das Volumen ist die Stückzahl der an einem Tag gehandelten Aktien. Ein Schlußabschnitt wird die gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen.

2 Nichtparametrische Analyse bedingter Quantile

In der Literatur werden verschiedene Verfahren zur nichtparametrischen Schätzung von Quantilsregressionen diskutiert. Koenker, Portnoy und Ng (1992) behandeln die Spline-Anpassung. Horváth und Yandell (1988) verwenden Kernschätzer und Stute (1986) schlägt einen Nächste-Nachbarn-Schätzer vor.

In dieser Arbeit wird auf Kernschätzer zurückgegriffen. Mit einer geeigneten Kernfunktion $K(\cdot)$ und Bandweiten h_n wird der Kernschätzer für die bedingte Verteilungsfunktion

$F(y | x) = F_x(y)$ definiert durch

$$F_{n,x}(y) = \frac{\frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}. \quad (1)$$

Das bedingte α -Quantil $q_\alpha(x)$ ist eine Funktion von x , mit $q_\alpha(x) = \inf \{y \in \mathbb{R} \mid F_x(y) \geq \alpha\}$, $0 < \alpha < 1$. Durch Einsetzen von $F_{n,x}(y)$ in die Definition der bedingten Quantile resultiert der Schätzer

$$q_{n,\alpha}(x) = \inf \{y \in \mathbb{R} \mid F_{n,x}(y) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

Im folgenden soll dieser Regressionschätzer zur Prognose von Zeitreihen verwendet werden. Es sei $\{Y_i\}_{i=1}^m$ eine Zeitreihe mit Werten in \mathbb{R} . Dann erhält man eine Ein-Schritt-Prognose der bedingten Quantile $q_{n,\alpha}(X_{m+1})$, durch die Verwendung von $X_i = Y_{i-1}$ in den Definitionen (1) und (2). Für diesen Fall soll nun der Mittlere Quadratische Fehler des Schätzers untersucht werden. Anschließend wird gezeigt, wie sich der Schätzer auf den Fall $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ erweitern läßt. Diese Erweiterung ermöglicht einerseits die Prognose von Quantilen mit $\mathbf{X}_i = (Y_{i-1}, Y_{i-2}, \dots, Y_{i-p})^T$, aber auch die Verwendung von verschiedenen Kovariablen zur Prognose. In einem ersten Schritt wird der Mittlere Quadratische Fehler von $F_{n,x}(y)$ für den Fall $X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}$ und $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analysiert. Es sind dafür verschiedene Annahmen an die Bandweiten, die Kernfunktion und die zugrundeliegenden Verteilungen notwendig. Es sei

$$h_n \rightarrow 0 \quad , \text{für } n \rightarrow \infty; \quad (\text{H. 1})$$

$$nh_n \rightarrow \infty \quad , \text{für } n \rightarrow \infty; \quad (\text{H. 2})$$

$$\int K(u) du = 1; \quad (\text{K. 1})$$

$$K(u) \leq \bar{K} < \infty, \forall u \in \mathbb{R}; \quad (\text{K. 2})$$

$$K \text{ symmetrisch}; \quad (\text{K. 3})$$

$$K(u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}; \quad (\text{K. 4})$$

es existieren die Dichten

$$f(x), f_x(y), f(y, x); \quad (\text{S. 1})$$

$$f(x) > 0; \quad (\text{S. 2})$$

es existieren die Ableitungen

$$F_x''(y) = \frac{\delta^2 F_x(y)}{\delta x^2} \text{ und } F_x'''(y); \quad (\text{S. 3})$$

$$f'(x) = \frac{\delta f(x)}{\delta x}; \quad (\text{S. 4})$$

$$f''(x) \text{ und } f'''(x); \quad (\text{S. 5})$$

für feste y in einer Umgebung von x .

Ferner wird angenommen, der Prozeß $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ sei streng stationär, so daß $\{X_1, Y_1\}$ und $\{X_{1+s}, Y_{1+s}\}$, $s = 1, \dots, n-1$, die gleichen Verteilungen besitzen.

Für $F_{n,x}(y)$ wird die Bezeichnung

$$F_{n,x}(y) = \frac{\frac{1}{nh_n} \sum_i \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\frac{1}{nh_n} \sum_i K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)} = \frac{r_{n,x}(y)}{f_n(x)} \quad (3)$$

eingeführt. Mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung um $r_x(y)/f(x)$ wird (3) linearisiert zu

$$F_{n,x}(y) \approx F_x(y) + \frac{r_{n,x}(y) - F_x(y)f_n(x)}{f(x)}. \quad (4)$$

Diese Linearisierung erweist sich für die Betrachtung des Mittleren Quadratischen Fehlers als hilfreich. Weiterhin wird folgendes Lemma verwendet.

Lemma 1: Es sei (K.4), (K.3), (S.1), (S.3), (S.4), (S.5) erfüllt. Dann gilt

$$E \left[K^s \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \right] = h_n f(x) \int K^s(u) du + O(h_n^3) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E \left[K^s \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} \right] &= h_n F(y | x) f(x) \int K^s(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2} h_n^3 F''(y | x) f(x) \int u^2 K^s(u) du \\ &\quad + h_n^3 F'(y | x) f'(x) \int u^2 K^s(u) du + O(h_n^3) \end{aligned} \quad (6)$$

Beweis:

(a)

$$E \left[K^s \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \right] = \int K^s \left(\frac{x - z}{h_n} \right) f(z) dz;$$

mit der Substitution $u = (x - z)/h_n$ folgt

$$\int K^s \left(\frac{x - z}{h_n} \right) f(z) dz = h_n \int K^s(u) f(x - h_n u) du.$$

Mit Taylorreihenentwicklung von $f(x - h_n u)$ um $f(x)$ folgt

$$\begin{aligned}
 E \left[K^s \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \right] &= h_n \int K^s(u) \left[f(x) - h_n u f'(x) + \frac{1}{2} h_n^2 u^2 f''(x) + O(h_n^3) \right] du \\
 &= h_n f(x) \int K^s(u) du + \frac{1}{2} h_n^3 f''(x) \int u^2 K^s(u) du + o(h_n^3) \\
 &= h_n f(x) \int K^s(u) du + O(h_n^3)
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 E \left[K^s \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} \right] &= \int \int K^s \left(\frac{x - z}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{v \leq y\}} f(z, v) dz dv \\
 &= \int K^s \left(\frac{x - z}{h_n} \right) F(y | z) f(z) dz \\
 &= h_n \int K^s(u) F(y | x - h_n u) f(x - h_n u) du.
 \end{aligned}$$

Mit Taylorreihenentwicklung von $f(x - h_n u)$ um $f(x)$ und von $F(y | x - h_n u)$ um $F(y | x)$ folgt

$$\begin{aligned}
 E \left[K^s \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} \right] &= h_n \int K^s(u) \left[F(y | x) - h_n u F'(y | x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} h_n^2 u^2 F''(y | x) + O(h_n^3) \right] \\
 &\quad \cdot \left[f(x) - h_n u f'(x) + O(h_n^3) \right] \\
 &= h_n F(y | x) f(x) \int K^s(u) du \\
 &\quad + \frac{1}{2} h_n^3 F''(y | x) f(x) \int u^2 K^s(u) du \\
 &\quad + h_n^3 F'(y | x) f'(x) \int u^2 K^s(u) du + O(h_n^3).
 \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Lemma 1 und der Linearisierung (4) lassen sich Bias und Varianz des Schätzers $F_{n,X}(y)$ approximativ bestimmen. Es resultiert der folgende Satz über den approximativen Mittleren Quadratischen Fehler (MSE) des Schätzers.

Satz 1:

Es seien die Bedingungen aus Lemma 1 und die Bedingungen (K.1), (S.2) erfüllt. Es seien $\{Y_i, X_i\}$ streng stationär und unabhängig. Dann gilt

$$\begin{aligned} MSE[F_{n,x}(y)] &\approx \left[\left\{ \frac{1}{2}F_x''(y) + \frac{f'(x)F_x'(y)}{f(x)} \right\} h_n^2 \int u^2 K(u) du \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{nh_n} \left\{ \frac{F_x(y) - F_x^2(y)}{f(x)} \right\} \int K^2(u) du. \end{aligned} \quad (7)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E[F_{n,x}(y)] &\approx F_x(y) + \frac{E[r_{n,x}(y)] - F_x(y)E[f_n(x)]}{f(x)} \\ &\approx F_x(y) + \frac{\frac{1}{nh_n} \sum_i E \left[K \left(\frac{x-X_i}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} \right] - F_x(y) \frac{1}{nh_n} E \left[K \left(\frac{x-X_i}{h_n} \right) \right]}{f(x)} \\ &\approx F_x(y) + h_n^2 \left[\frac{1}{2}F_x''(y|x) + \frac{f'(x)F_x'(y|x)}{f(x)} \right] \cdot \int u^2 K(u) du. \end{aligned}$$

Die Betrachtung der Varianz benötigt umfangreichere Berechnungen.

$$Var[F_{n,x}(y)] \approx \frac{1}{f^2(x)} \{ Var[r_{n,x}(y)] + F_x^2(y) Var[f_n(x)] - 2F_x(y) Cov[r_{n,x}(y), f_n(x)] \}.$$

Die einzelnen Terme werden gesondert betrachtet.

$$\begin{aligned} Var[r_{n,x}(y)] &= \frac{1}{n^2 h_n^2} Var \left[\sum_i K \left(\frac{x-X_i}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} \right] \\ &= \frac{1}{n^2 h_n^2} \left\{ \sum_i Var \left[K \left(\frac{x-X_i}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} Cov \left[K \left(\frac{x-X_i}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}}, K \left(\frac{x-X_j}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_j \leq y\}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{nh_n^2} Var \left[K \left(\frac{x-X_1}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_1 \leq y\}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) Cov \left[K \left(\frac{x-X_1}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_1 \leq y\}}, K \left(\frac{x-X_{1+i}}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_{1+i} \leq y\}} \right] \\ &= A_n(x) + B_n(x) \end{aligned}$$

Für $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$ unabhängig ist $B_n(x) = 0$. Für $A_n(x)$ gilt mit Lemma 1:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \frac{1}{nh_n^2} \left\{ E \left[K^2 \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_1 \leq y\}} \right] - E^2 \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_1 \leq y\}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{nh_n^2} \left\{ h_n F(y | x) f(x) \int K^2(u) du + O(h_n^3) - [h_n F(y | x) f(x) + O(h_n^3)]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{nh_n} F(y | x) f(x) \int K^2(u) du + o \left(\frac{1}{nh_n} \right). \end{aligned}$$

Für die Varianz von $f_n(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}[f_n(x)] &= \frac{1}{n^2 h_n^2} \text{Var} \left[\sum_i K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{n^2 h_n^2} \left\{ \sum_i \text{Var} \left[K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \right] + \sum_{i \neq j} \text{Cov} \left[K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right), K \left(\frac{x - X_j}{h_n} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{nh_n^2} \text{Var} \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) \text{Cov} \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right), K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \right] \\ &= C_n(x) + D_n(x). \end{aligned}$$

Für $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$ unabhängig ist $D_n(x) = 0$.

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{1}{nh_n^2} \left\{ E \left[K^2 \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \right] - E^2 \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{nh_n^2} \left\{ h_n f(x) \int K^2(u) du + O(h_n^3) - [h_n f(x) + O(h_n^3)]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{nh_n} f(x) \int K^2(u) du + o \left(\frac{1}{nh_n} \right). \end{aligned}$$

Bleibt noch die Berechnung der Kovarianz:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[r_{n,x}(y), f_n(x)] &= \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_i \text{Cov} \left[K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}}, K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_{i \neq j} \text{Cov} \left[K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}}, K \left(\frac{x - X_j}{h_n} \right) \right] \\ &= G_n(x) + H_n(x). \end{aligned}$$

Für $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$ unabhängig ist $H_n(x) = 0$. Es gilt für $G_n(x)$:

$$\begin{aligned}
 G_n(x) &= \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_i \left\{ E \left[K^2 \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} \right] - E \left[K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} \right] \right. \\
 &\quad \left. \cdot E \left[K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{n h_n} F(y | x) f(x) \int K^2(u) du + o \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} F(y | x) f^2(x) + o \left(\frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n h_n} F(y | x) f(x) \int K^2(u) du + o \left(\frac{1}{n h_n} \right).
 \end{aligned}$$

Die Varianz des Schätzers $F_{n,x}(y)$ läßt sich nun für $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$ unabhängig berechnen:

$$\begin{aligned}
 \text{Var} [F_{n,x}(y)] &\approx \frac{1}{f^2(x)} \{ A_n(x) + F_x^2(y) \cdot C_n(x) - 2F_x(y) \cdot G_n(x) \} \\
 &\approx \frac{1}{f^2(x)} \left\{ \frac{1}{n h_n} F_x(y) f(x) \int K^2(u) du \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n h_n} F_x^2(y) f(x) \int K^2(u) du \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n h_n} 2F_x^2(y) f(x) \int K^2(u) du \right\} \\
 &\approx \frac{1}{n h_n} \left\{ \frac{F_x(y) - F_x^2(y)}{f(x)} \right\} \int K^2(u) du.
 \end{aligned}$$

□

Satz 1 zeigt die wesentlichen Einflußgrößen im Mittleren Quadratischen Fehler. Der Bias wird durch die Glattheit von $F_x(y)$ beeinflusst. Diese Glattheit findet Eingang durch die Ableitungen $F'_x(y)$ und $F''_x(y)$. Daneben beeinflussen auch die Dichte $f(x)$ und deren Steigung $f'(x)$ den Bias. Eine geringe Dichte $f(x)$ induziert eine größere Verzerrung als eine hohe Dichte. Steigt die Dichte $f(x)$ in x , ist $f'(x)$ im zweiten Term des Bias positiv, fällt die Dichte, ist der Ausdruck negativ. Ist $f'(x) = 0$, dann ist der zweite Term gleich Null. Beispielsweise ist der Bias für eine lineare Funktion $F_x(y)$ gleich $ch_n^2 \cdot f'(x)/f(x) \cdot \int u^2 K(u) du$. In diesem Fall tendiert $F_{n,x}(y)$ bei abnehmender Dichte $f(x)$ zur Überschätzung (Unterschätzung) von $F_x(y)$, wenn $F_x(y)$ monoton fallend (wachsend) ist. Die Varianz des Schätzers $F_{n,x}(y)$ hängt zum einen ebenfalls von der Dichte

$f(x)$ ab, zum anderen auch von der Differenz $F_x(y) - F_x^2(y)$. Diese Differenz ist minimal für $F_x(y) = 0,5$ und steigt in den Rändern der Verteilung an.

Der Satz 1 impliziert die Konsistenz des Schätzers $F_{n,x}(y)$. Doch ist die Annahme der Unabhängigkeit für die vorliegende Anwendung auf die Zeitreihenprognose zu restriktiv. Es sei daher angenommen, daß $\{Y_i, X_i\}$ stark mischend (α -mischend) ist.

Es sei A_k ein Element der durch $[\{Y_i, X_i\}, i = 1, \dots, k]$ generierten σ -Algebra \mathcal{A}_k und B_{k+s} ein Element der von $[\{Y_i, X_i\}, i = k + s, \dots]$ erzeugten σ -Algebra \mathcal{B}_{k+s} . Ein Prozeß $\{Y_i, X_i\}$ heißt stark mischend, wenn für die Mischungskoeffizienten

$$\alpha_s = \sup_k \sup_{\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_{k+s}} |P(A_k \cap B_{k+s}) - P(A_k)P(B_{k+s})|$$

gilt:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_s = 0.$$

Ist $\{Y_i, X_i\}$ nicht unabhängig verschwinden die Kovarianzterme $B_n(x)$, $D_n(x)$ und $H_n(x)$ im Beweis zum Satz 1 nicht notwendigerweise. Für die Abschätzung dieser Ausdrücke benötigt man die folgende Kovarianzgleichung, die für streng mischende Prozesse gilt:

Für zwei Zufallsvariablen U , \mathcal{A}_k -meßbar und V , \mathcal{B}_{k+s} -meßbar, gilt

$$|Cov(U, V)| \leq 4\alpha_s (ess - sup |U|)(ess - sup |V|),$$

mit $ess - sup |U| := \inf \{a \in \mathbb{R} \mid P(U > a) = 0\}$.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses läßt sich zeigen, daß gilt:

$$|B_n(x)| = \left| \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) Cov \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_1 \leq y\}}, K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_{1+i} \leq y\}} \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left| Cov \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_1 \leq y\}}, K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_{1+i} \leq y\}} \right] \right| \\
&\leq \frac{2}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} 4\alpha_i \left(ess - \sup \left| K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_1 \leq y\}} \right| \right) \left(ess - \sup \right. \\
&\quad \left. \left| K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_{1+i} \leq y\}} \right| \right) \\
&\leq \frac{8}{nh_n^2} \bar{K}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i. \\
|D_n(x)| &= \left| \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) Cov \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right), K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \right] \right| \\
&\leq \frac{2}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left| Cov \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right), K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \right] \right| \\
&\leq \frac{8}{nh_n^2} \bar{K}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i. \\
|H_n(x)| &= \left| \frac{1}{n^2 h_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) Cov \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_1 \leq y\}}, K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \right] \right| \\
&\leq \frac{2}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left| Cov \left[K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_1 \leq y\}}, K \left(\frac{x - X_{1+i}}{h_n} \right) \right] \right| \\
&\leq \frac{8}{nh_n^2} \bar{K}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i.
\end{aligned}$$

Die Kovarianzterme $B_n(x)$, $D_n(x)$ und $H_n(x)$ verschwinden für $n \rightarrow \infty$, wenn die Bedingung

$$\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \rightarrow 0, \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (\text{U. 1})$$

erfüllt ist. Ist (U.1) gegeben, dann ist der Schätzer $F_{n,x}(y)$ schwach konsistent.

Es wurde gezeigt, daß der Schätzer $F_{n,x}(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, unter verschiedenen Voraussetzungen an die Kernfunktion, die Bandweiten und die Glattheit der zugrundeliegenden Funktionen, konsistent ist. Ist die Bedingung (U.1) erfüllt, gilt die Konsistenz auch für $\{Y_i, X_i\}$ stark mischend.

Soll in der Prognose von Y_i mehr als nur eine Kovariable berücksichtigt werden, muß der Kernschätzer für den Fall $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ erweitert werden. Dann benötigt man eine Kernfunktion $K : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Möglichkeit ist die Verwendung von Produktkernen, bei denen man K als Produkt von univariaten Kernen k bildet:

$$K(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^p k_i(u_i) \quad , \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)^T . \quad (9)$$

Eine Alternative zu Produktkernen bilden Normkerne der Gestalt

$$K(\mathbf{u}) = k(\|\mathbf{u}\|) . \quad (10)$$

Als geeignete Norm bieten sich beispielsweise die Euklidische Norm an.

Mit Hilfe der multivariaten Kerne läßt sich die bedingte Verteilungsfunktion schätzen durch

$$F_{n,\mathbf{x}}(y) = \frac{\frac{1}{nh_n^p} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_i}{h_n}\right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}}}{\frac{1}{nh_n^p} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_i}{h_n}\right)} = \frac{r_{n,\mathbf{x}}(y)}{f_n(\mathbf{x})} \quad , \mathbf{X} \in \mathbb{R}^p , y \in \mathbb{R} . \quad (11)$$

Für die Berechnung des Mittleren Quadratischen Fehlers dieses Schätzers müssen die Annahmen (K.1) - (K.4) für die Kernfunktion und die Annahmen (S.1) - (S.5) über die Existenz der Dichten und deren Ableitungen für den Fall $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ modifiziert werden. Es sei

$$\int_{\mathbb{R}^p} K(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1 ; \quad (K. 5)$$

$$K(\mathbf{u}) \leq \bar{K} < \infty , \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p ; \quad (K. 6)$$

$$K \text{ symmetrisch ;} \quad (K. 7)$$

$$K(\mathbf{u}) \geq 0, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p, \quad (\text{K. 8})$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \mathbf{u}K(\mathbf{u})d\mathbf{u} = 0; \quad (\text{K. 9})$$

Es existieren die Dichten

$$f(\mathbf{x}), f_{\mathbf{x}}(y), f(y, \mathbf{x}); \quad (\text{S. 6})$$

$$f(\mathbf{x}) > 0; \quad (\text{S. 7})$$

es existieren die Ableitungen

$$F_{\mathbf{x}}''(y) = \frac{\delta^2 F_{\mathbf{x}}(y)}{\delta \mathbf{x}^2} = \mathbf{H}_{F_{\mathbf{x}}}(y) \text{ und } F_{\mathbf{x}}'''(y), \quad (\text{S. 8})$$

$$f'(\mathbf{x}) = \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}); \quad (\text{S. 9})$$

$$f''(\mathbf{x}) = \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \text{ und } f'''(\mathbf{x}); \quad (\text{S. 10})$$

für feste y in einer Umgebung von \mathbf{x} .

Die Bedingung (K.9) ist für Produktkerne per Definition erfüllt. Der Prozeß $\{\mathbf{X}_i, Y_i\}_{i=1}^n$ sei wiederum streng stationär. Dann läßt sich Lemma 1 verallgemeinern zu:

Lemma 2 : Es sei $X \in \mathbb{R}^p$ und $Y \in \mathbb{R}$. Ferner sei $K : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ und es seien die Bedingungen (K.7), (K.8), (K.9), (S.6), (S.8), (S.9) und (S.10) erfüllt. Dann gilt

$$E \left[K^s \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \right] = h_n^p f(\mathbf{x}) \int K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + O(h_n^{p+2}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E \left[K^s \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \right] &= h_n^p \left\{ F_{\mathbf{x}}(y) f(\mathbf{x}) \int K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \frac{1}{2} h_n F_{\mathbf{x}}(y) \int \mathbf{u}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \mathbf{u} K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right. \\ &\quad + h_n^2 \nabla F_{\mathbf{x}}(y) \int \mathbf{u}^T \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{u} K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} h_n^2 f(\mathbf{x}) \int \mathbf{u}^T \mathbf{H}_{F_{\mathbf{x}}}(y) \mathbf{u} K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right\} + O(h_n^{p+3}). \end{aligned} \quad (13)$$

Beweis:

(a)

$$\begin{aligned} E \left[K^s \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \right] &= \int K^s \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{h_n} \right) f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= h_n^p \int K(\mathbf{u}) f(\mathbf{x} - h_n \mathbf{u}) d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Mit Taylorreihenentwicklung von $f(\mathbf{x} - h_n \mathbf{u})$ um $f(\mathbf{x})$ folgt:

$$\begin{aligned} E \left[K^s \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \right] &= h_n^p \int K^s(\mathbf{u}) \left[f(\mathbf{x}) - h_n \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} h_n^2 \mathbf{u}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \mathbf{u} + O(h_n^3) \right] d\mathbf{u} \\ &= h_n^p \left\{ f(\mathbf{x}) \int K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \frac{1}{2} h_n^2 \int \mathbf{u}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \mathbf{u} K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + O(h_n^3) \right\} \\ &= h_n^p f(\mathbf{x}) \int K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + O(h_n^{p+2}). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E \left[K^s \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} \right] &= \int K \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{h_n} \right) F_{\mathbf{z}}(y) f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= h_n^p \int K(\mathbf{u}) F(y | \mathbf{x} - h_n \mathbf{u}) f(\mathbf{x} - h_n \mathbf{u}) d\mathbf{u} \end{aligned}$$

Mit Taylorreihenentwicklung von $f(\mathbf{x} - h_n \mathbf{u})$ um $f(\mathbf{x})$ und von $F(y | \mathbf{x} - h_n \mathbf{u})$ um $F(y | \mathbf{x})$ folgt

$$\begin{aligned}
E \left[K^s \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} \right] &= h_n^p \left\{ \int K^s(\mathbf{u}) \left[F_{\mathbf{x}}(y) - h_n \nabla F_{\mathbf{x}}(y)^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} h_n^2 \mathbf{u}^T H_{F_{\mathbf{x}}}(y) \mathbf{u} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + O(h_n^3) \right] \cdot \left[f(\mathbf{x}) - h_n \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} h_n^2 \mathbf{u}^T H_f(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. O(h_n^3) \right] d\mathbf{u} \right\} \\
&= h_n^p \left\{ F_{\mathbf{x}}(y) f(\mathbf{x}) \int K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \frac{1}{2} h_n^2 F_{\mathbf{x}}(y) \right. \\
&\quad \int \mathbf{u}^T H_f(\mathbf{x}) \mathbf{u} K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\
&\quad \left. + h_n^2 \nabla F_{\mathbf{x}}(y)^T \int \mathbf{u} \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{u} K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} h_n^2 f(\mathbf{x}) \int \mathbf{u}^T H_{F_{\mathbf{x}}}(y) \mathbf{u} K^s(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right\} + O(h_n^{p+3})
\end{aligned}$$

□

Analog zur Vorgehensweise in Satz 1 kann nun über Korollar 2 der approximative Mittlere Quadratische Fehler von (11) für $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ bestimmt werden.

Satz 2 Es seien die Bedingungen aus Korollar 2 und die Bedingungen (K.5), (S.7) erfüllt. Es seien $\{Y_i, \mathbf{X}_i\}$ streng stationär und unabhängig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
MSE[F_{n,\mathbf{x}}(y)] &\approx \left[h_n^2 \nabla F_{\mathbf{x}}(y)^T \int \mathbf{u} \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{u} K(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} h_n^2 f(\mathbf{x}) \int \mathbf{u}^T H_{F_{\mathbf{x}}}(y) \mathbf{u} K(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{nh_n^p} \left\{ \frac{F_{\mathbf{x}}(y) - F_{\mathbf{x}}^2(y)}{f(\mathbf{x})} \right\} \int K^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (14)
\end{aligned}$$

Beweis

Der Beweis folgt mit Korollar 2 über die gleiche Vorgehensweise wie im Beweis zu Satz 1.

□

Der Schätzer $F_{n,\mathbf{x}}(y)$ ist auch für multivariate \mathbf{X} ein konsistenter Schätzer der bedingten Verteilungsfunktion. Wird die Annahme der Unabhängigkeit aufgegeben und $\{Y_i, \mathbf{X}_i\}$

stark mischend zugelassen, müssen analog zum univariaten Fall die Bedingungen (K.6) und

$$\frac{1}{nh_n^{2p}} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \rightarrow 0, \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (\text{U. 2})$$

erfüllt sein, damit der Schätzer konsistent ist.

Die bedingte Verteilungsfunktion läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen konsistent schätzen. Dieser Schätzer wird verwendet, um für Zeitreihen bedingte Quantile zu prognostizieren. Wie kann aber die Güte dieser Prognose beurteilt werden? Prognosemaße wie der Mittlere Quadratische Prognosefehler, der Relative Mittlere Quadratische Prognosefehler oder der Theilsche Ungleichheitskoeffizient lassen sich zur Beurteilung von Quantilsprognosen nicht anwenden, da die tatsächlichen Quantile nicht beobachtbar sind. Es soll daher ein neues Gütemaß definiert werden. Grundlage dieses Maßes ist die Verlustfunktion

$$\begin{aligned} l_\alpha(\Theta) &= \frac{1}{n} \sum_i \{ \alpha \mathbb{I}_{\{Y_i - \Theta \geq 0\}} (Y_i - \Theta) - (1 - \alpha) \mathbb{I}_{\{Y_i - \Theta < 0\}} (Y_i - \Theta) \} \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \varphi(Y_i - \Theta), \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned} \quad (15)$$

die von Koenker und Bassett (1978) im Zusammenhang mit der linearen Quantilsregression diskutiert wird. Die Verlustfunktion besitzt den Erwartungswert

$$E[l_\alpha(\Theta)] = \alpha E[Y] - \alpha\Theta + \int_{-\infty}^{\Theta} F(y) dy. \quad (16)$$

Durch Ableiten erkennt man, daß der Erwartungswert minimal ist, wenn Θ dem α -Quantil entspricht:

$$\frac{\delta E[l_\alpha(\Theta)]}{\delta \Theta} = F(\Theta) - \alpha \stackrel{!}{=} 0,$$

$$F(\Theta) = \alpha. \quad (17)$$

Unter Verwendung dieser Verlustfunktion läßt sich ein Maß für die Güte der Prognose wie folgt definieren:

$$\xi_\alpha = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(Y_i - q_{n,\alpha}(X_i))}{\sum_{i=1}^n \varphi(Y_i - q_{i-1,\alpha})}. \quad (18)$$

Es steht $q_{n,\alpha}(X_i)$ für die Prognose des Quantils durch den Kernschätzer und $q_{i-1,\alpha}$ ist das aus den vergangenen $i - 1$ Daten errechnete empirische α -Quantil. Das Prognosemaß ξ_α vergleicht die Kernprognose $q_{n,\alpha}(X_i)$ mit einer naiven Prognose $q_{i-1,\alpha}$. ξ_α hängt von der in der Kernschätzung verwendeten Bandweite h ab. Es wird die Bandweite ausgewählt, die die beste Prognose liefert, d.h. die ξ_α maximiert.

Ist das definierte Gütemaß sinnvoll? Zur Beantwortung der Frage, wird der Wertbereich von ξ_α betrachtet. ξ_α liegt zwischen 0 und 1. $\xi_\alpha = 0$ gilt, wenn $q_{n,\alpha}(X_i) = q_{i-1,\alpha} \forall i$ gilt. In diesem Fall liefert X keine zusätzliche Information für die Prognose. \ominus

Gelte beispielsweise für den datengenerierenden Prozeß $q_\alpha(x) = a + bx$ und es sei

$$\bar{\xi}_\alpha = 1 - \frac{E[\varphi(y - a - bx) | x]}{E[\varphi(y - c) | x]}. \quad (19)$$

Gilt für den datengenerierenden Prozeß $b = 0$, dann ist $a = c$ und $\bar{\xi}_\alpha = 0$. Gilt aber $b \neq 0$, dann ist wegen der Minimumeigenschaft des α -Quantils

$$E[\varphi(y - a - bx) | x] < E[\varphi(y - c) | x], \quad (20)$$

unter der Annahme, daß die Verteilung von x nicht in einem linearen Unterraum konzentriert ist, d.h. falls kein $b \neq 0$ existiert, so daß $xb = c$ mit Wahrscheinlichkeit eins gilt.

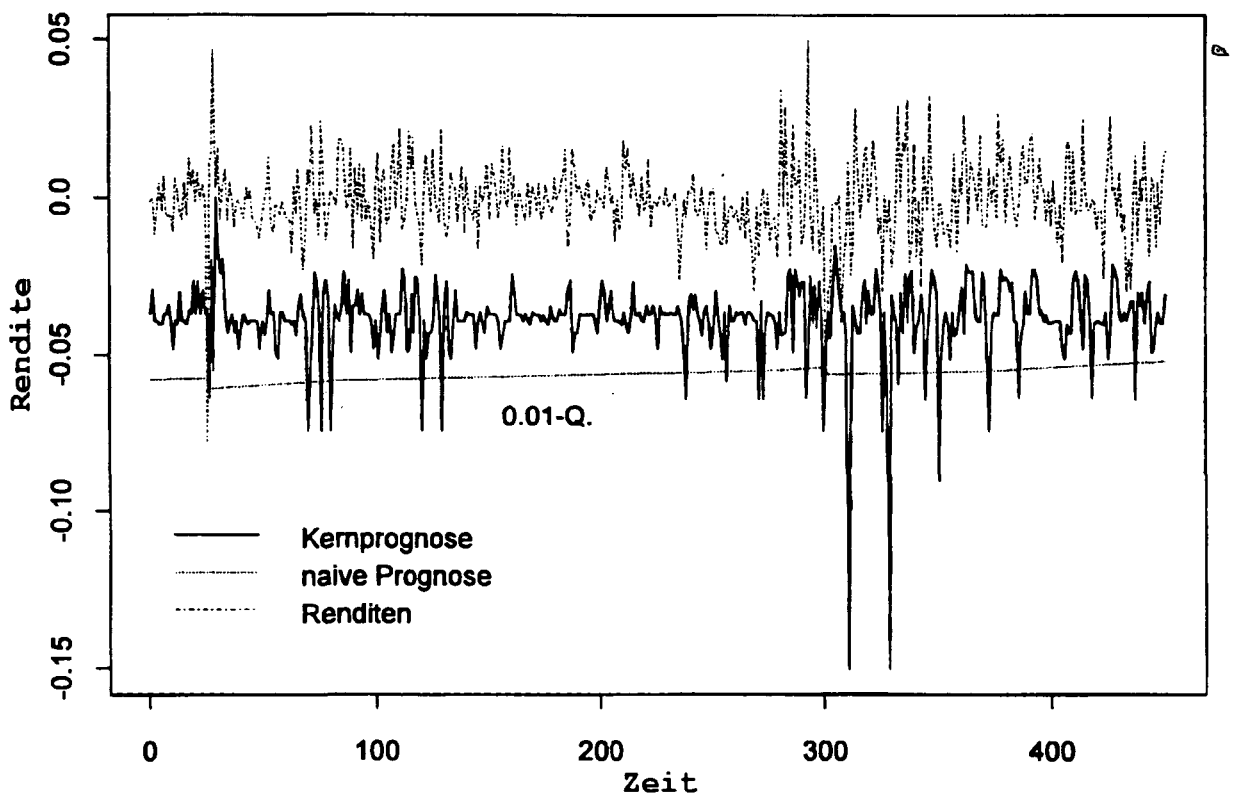
Dagegen ist $\xi_\alpha = 1$, wenn $y_i = q_\alpha(x_i)$, für alle i und alle α . D.h. Y besitzt eine Ein-Punkt-Verteilung und kann exakt prognostiziert werden.

Das Maß ξ_α zeigt an, ob X Information für die Prognose enthält. Berechnet man ξ_α für verschiedene α , zeigt das Gütemaß an, wie diese Information in verschiedenen Bereichen der bedingten Verteilung wirkt.

3 Nichtparametrische Quantilprognose von Daimler-Benz Aktienrenditen

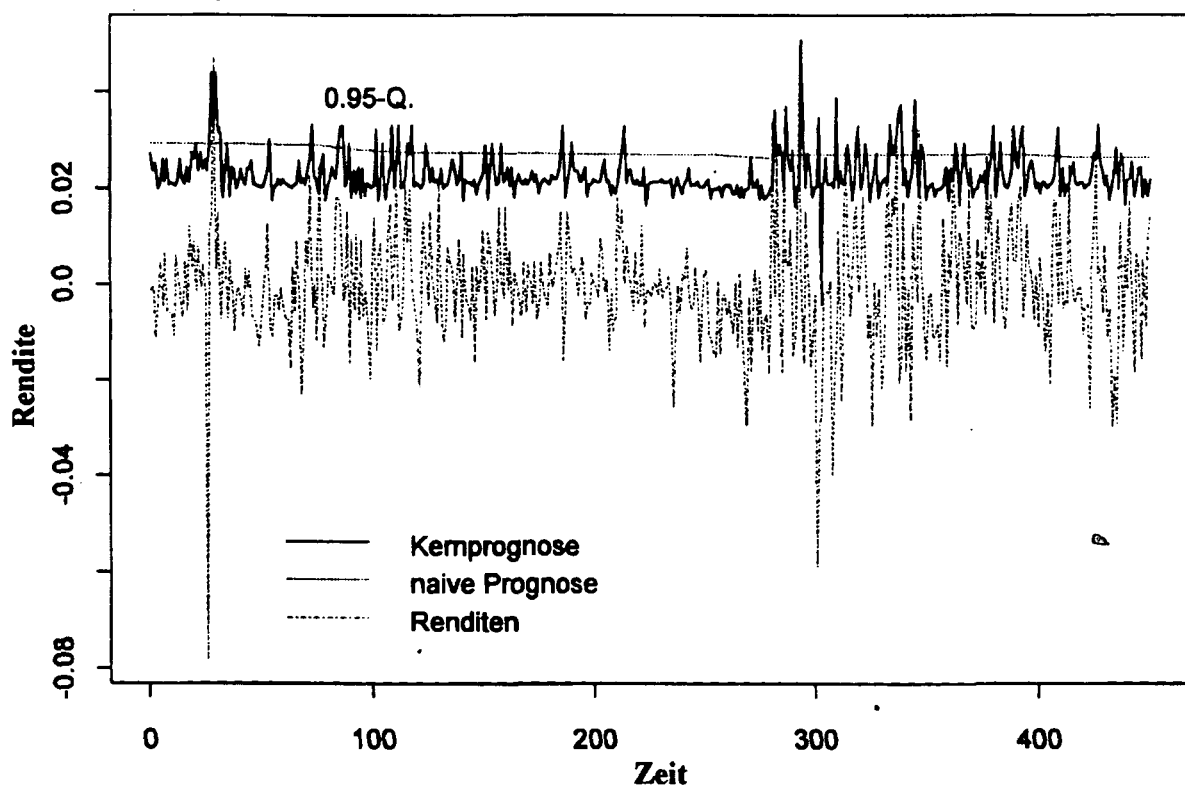
Das in Abschnitt 2 dargestellte Instrumentarium wird nun zur Prognose von Quantilen der Aktienrenditen eingesetzt. Es wird ein Produktkern mit identischen Bandweiten für jede Komponente von X verwendet. Die Prediktoren sind standardisiert, d.h. die Daten werden mit den zugehörigen arithmetrischen Mittelwerten subtrahiert und durch

Abbildung 4: Einschrittprognosen der 0,01-Quantile von 450 Daimler-Benz Renditen



die Standardabweichungen dividiert. Für die univariaten Kerne werden Bisquare-Kerne der Gestalt $k(u) = \frac{15}{16}(1-u^2)^2 \mathbb{I}_{[-1,1]}(u)$ benutzt. Die Bisquare-Kerne sind stetig, differen-

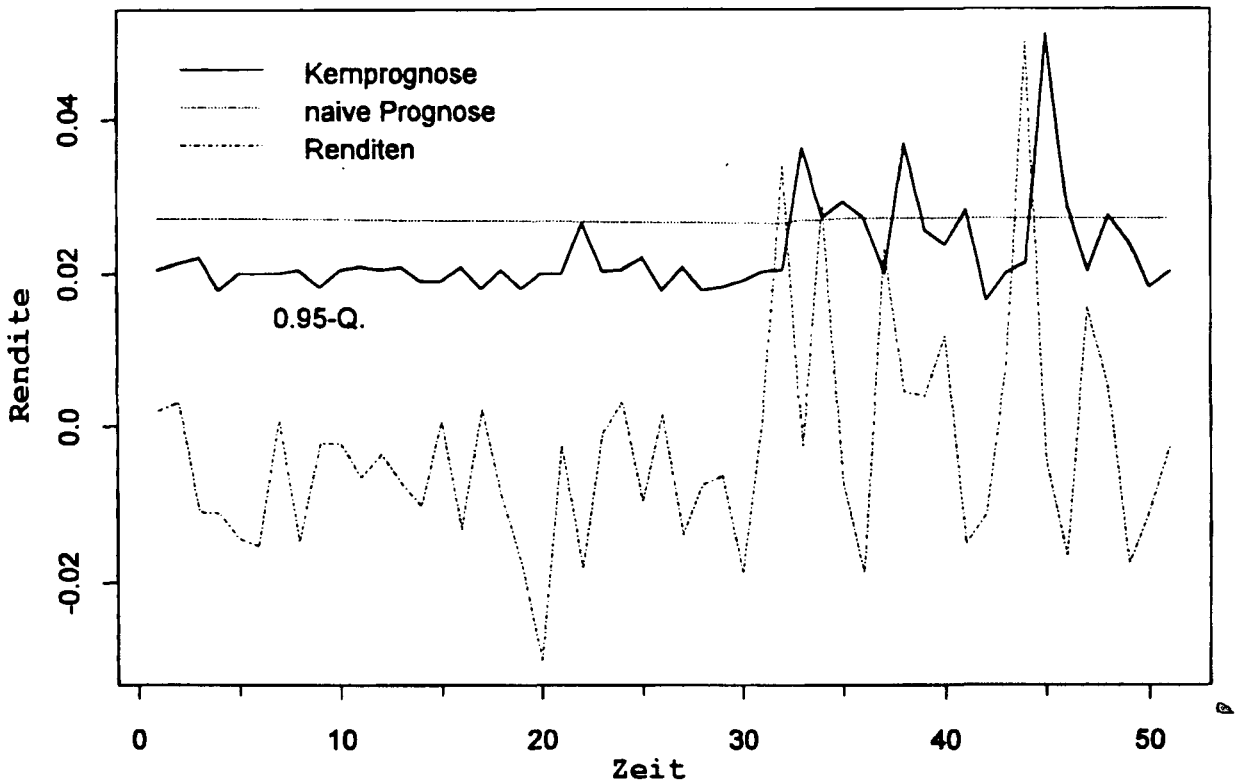
Abbildung 5: Einschrittprognosen der 0,95-Quantile von 450 Daimler-Benz Renditen



zierbar und besitzen einen kompakten Träger. Die Werte der Daimler-Benz Aktienrenditen sind in Abbildung 2 dargestellt. Für die letzten 450 Renditen werden Ein-Schritt Prognosen berechnet. Als Prediktoren dienen vergangene Renditen. Im einfachsten Fall ist $X_i = Y_{i-1}$. Die Hinzunahme weiterer Lags von Y als Prediktoren kann die Prognose verbessern. Die Dimension von X_i kann jedoch nicht beliebig aufgebläht werden, da der Kernschätzer sonst nicht genügend ähnlicher Verläufe in der Vergangenheit der Reihe findet. Ein Problem, das als "Fluch der Dimension" bezeichnet wird.

Zusätzlich zu den vergangenen Renditen wird untersucht, ob die Variable Volumen (V) die

Abbildung 6: Einschrittprognosen der Nr.250 bis Nr.300 der 0,95-Quantile der Daimler-Benz Renditen



Prognose verbessern kann. Volumen steht für den täglichen Börsenumsatz der Daimler-Benz Aktie in Stück. Wobei in die Prognose nur vergangene Werte des Volumens eingehen. Die Volumendaten weisen einen Trend und eine im Zeitablauf steigende Volatilität auf. Sie können daher nicht ohne eine Vorbehandlung in die Berechnungen der Vorhersagen einbezogen werden. Im Anhang wird die Behandlung der Volumendaten beschrieben. In Tabelle 1 sind die aus den 450 Prognosen berechneten ξ_α -Werte aufgeführt. Es handelt sich um Ex-post-Prognosen in dem Sinn, daß im Nachhinein die Bandweite ausgesucht wird, aus der für alle 450 Prognosen der höchste ξ_α -Wert resultiert. Die Ergebnisse in Tabelle 1 lassen folgende Interpretationen zu:

- 1.) Über die Mitte der Verteilung wird im Vergleich zur naiven Prognose keine zusätzliche Information gewonnen. Die ξ -Werte für den Median sind durchgängig

Tabelle 1: ξ_α -Werte für die Prognose von 450 Daimler-Benz Renditen mit optimaler Bandweite (in Klammern die optimale Bandweite)

Lags Y	Lags V	0.01 - Q	0.05 - Q	0.10 - Q	0.25 - Q	0.50 - Q	0.75 - Q	0.90 - Q	0.95 - Q	0.99 - Q
1	-	0.044 (2.0)	0.036 (1.3)	0.036 (1.0)	0.01 (2.5)	0.0047 (2.3)	0.010 (1.8)	0.016 (4.0)	0.035 (3.0)	0.129 (1.3)
2	-	0.098 (1.5)	0.05 (2.0)	0.05 (1.5)	0.016 (2.5)	0.007 (2.5)	0.023 (1.0)	0.04 (1.0)	0.073 (1.0)	0.187 (0.8)
3	-	0.147 (1.2)	0.056 (1.8)	0.054 (1.5)	0.020 (2.5)	0.004 (3.0)	0.025 (2.0)	0.04 (1.8)	0.060 (1.8)	0.142 (3.5)
4	-	0.181 (1.3)	0.061 (2.5)	0.059 (2.5)	0.021 (3.0)	0.006 (3.5)	0.025 (2.8)	0.039 (2.8)	0.063 (1.8)	0.149 (4.0)
1	1	0.038 (3.5)	0.039 (1.0)	0.056 (1.0)	0.019 (1.5)	0.006 (2.0)	0.013 (2.0)	0.03 (2.0)	0.066 (1.5)	0.138 (1.5)
2	2	0.106 (1.3)	0.053 (1.8)	0.068 (1.3)	0.021 (2.0)	0.004 (2.5)	0.025 (1.8)	0.037 (2.3)	0.08 (2.5)	0.182 (1.5)
2	1	0.043 (2.0)	0.048 (1.5)	0.060 (1.8)	0.021 (2.3)	0.004 (2.5)	0.016 (2.5)	0.053 (2.0)	0.092 (1.8)	0.206 (1.5)
2	2	0.156 (1.3)	0.07 (1.3)	0.070 (2.0)	0.027 (1.8)	0.006 (2.5)	0.022 (2.5)	0.047 (2.3)	0.10 (1.8)	0.207 (1.8)

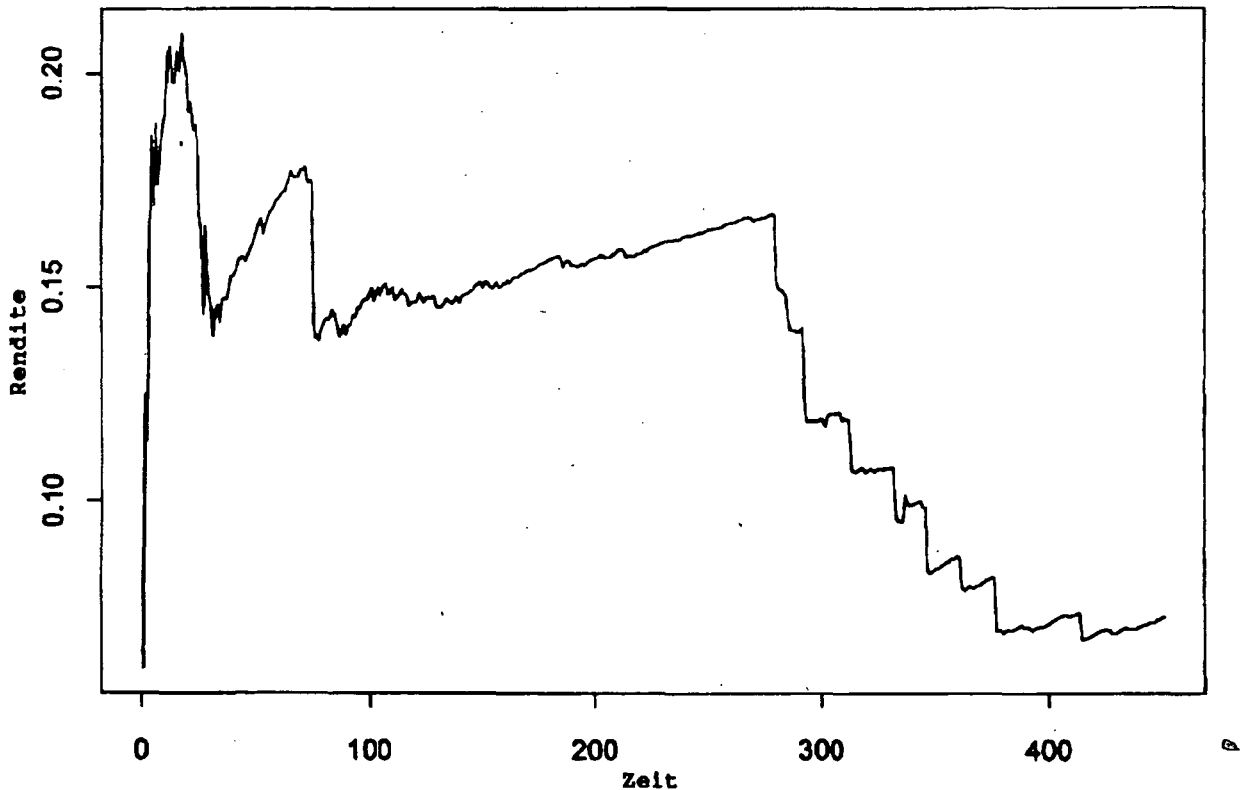
kaum größer als Null.

2.) An den Rändern der Verteilung steigt die Prognosekraft. So ist etwa für $\mathbf{X}_i = (Y_{i-1}, Y_{i-2})^T$ und optimaler Bandweite $\xi_{0.99} = 0.187$, $\xi_{0.95} = 0.073$, $\xi_{0.90} = 0.04$ und für $\mathbf{X}_i = (Y_{i-1}, \dots, Y_{i-4})^T$ ist $\xi_{0.01} = 0.181$, $\xi_{0.05} = 0.061$, $\xi_{0.10} = 0.059$.

3.) Die Hinzunahme der Variablen "Volumen" kann für einige α die Prognose verbessern, der Informationsgewinn ist jedoch überwiegend gering.

In den Abbildungen 4 und 5 sind exemplarisch Prognosen für die 0.01- und 0.95-Quantile dargestellt. Die Prognosen der 0.01-Quantile wurden mit $\mathbf{X}_i = (Y_{i-1}, \dots, Y_{i-4})^T$ und die Prognosen der 0.95-Quantile mit $\mathbf{X}_i = (Y_{i-1}, Y_{i-2})^T$ durchgeführt. Man erkennt, daß die Kernprognose in weiten Teilen näher an den Daten liegt als die naive Prognose. In Abbildung 6 ist ein Teil des Prognoseverlaufs für die 0.95-Quantile gezoomt worden. Es zeigt sich, daß in der "ruhigen" Phase die Kernprognose deutlich näher an den Daten liegt als die naive Prognose. Problematisch sind die hohen Ausschläge der Renditen: die Kern-

Abbildung 7: $X_i(0, 95)$ im Zeitablauf, $X_i = (Y_{i-1}, Y_{i-2})^T$



prognose reagiert erst mit Verzögerung. Ein Indiz dafür, daß eine hohe Rendite eher von einer hohen Rendite als von einer niedrigen Rendite gefolgt wird. Schwierig ist es jedoch, diesen ersten Ausschlag vorherzusagen. Weitere Einsichten in das Prognoseverhalten gewinnt man, wenn die Entwicklung von ξ im Zeitverlauf betrachtet wird. Dies geschieht in den Abbildungen 7 und 8. Für die Prognose der 0.01- und 0.95-Quantile wird die Entwicklung von ξ beschrieben. In jedem bestimmten Zeitpunkt gehen in die Berechnungen der zugehörigen ξ -Werte die Prognosen bis zu diesen Zeitpunkten ein. Das starke Abfallen des $\xi_{0,95}$ -Wertes in Abbildung 7 nach der Prognose Nr. 280 zeigt einen Strukturbruch an. In Abbildung 8 wird der $\xi_{0,01}$ -Verlauf dominiert durch einen Ausreißer an der Stelle 26. Abbildung 9 zeigt den um die Prognose Nr. 26 bereinigten Verlauf des $\xi_{0,01}$ -Wertes. Nach dieser Bereinigung zeigt auch der $\xi_{0,01}$ -Verlauf deutlich einen Strukturbruch an. Teilt man die zu prognostizierenden Renditen an der Stelle 280 in zwei Teile und bestimmt, wie in Abbildung 10, die Box-Plots dieser Blöcke, findet man für die Renditen im zweiten Block

Abbildung 8: $X_i(0,01)$ im Zeitablauf, $X_i = (Y_{i-1}, \dots, Y_{i-4})^T$

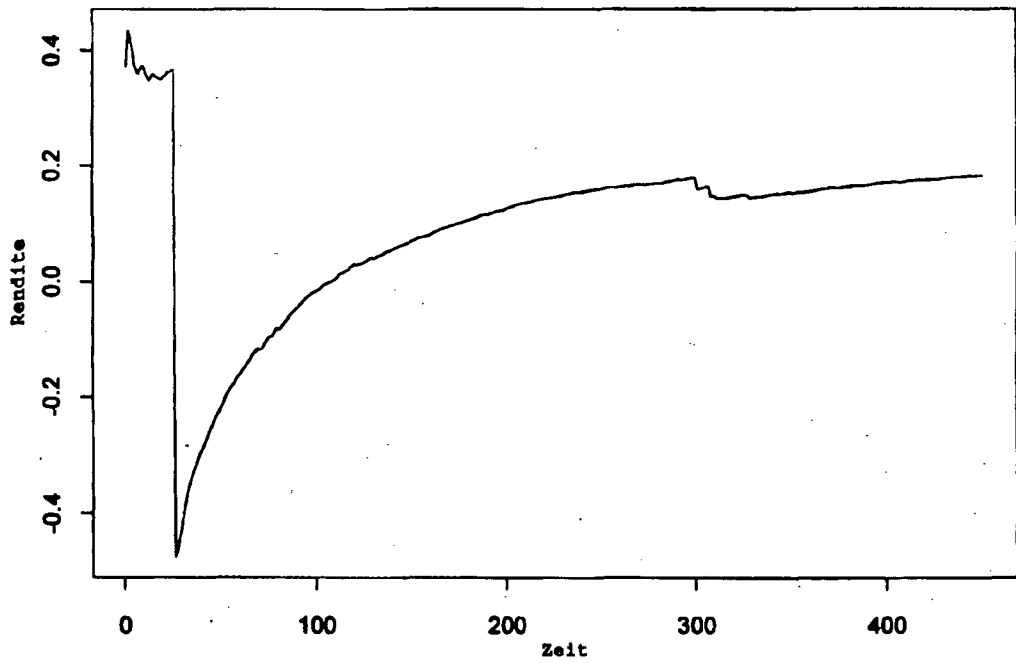


Abbildung 9: $X_i(0,01)$ im Zeitablauf, um Ausreißer bereinigt

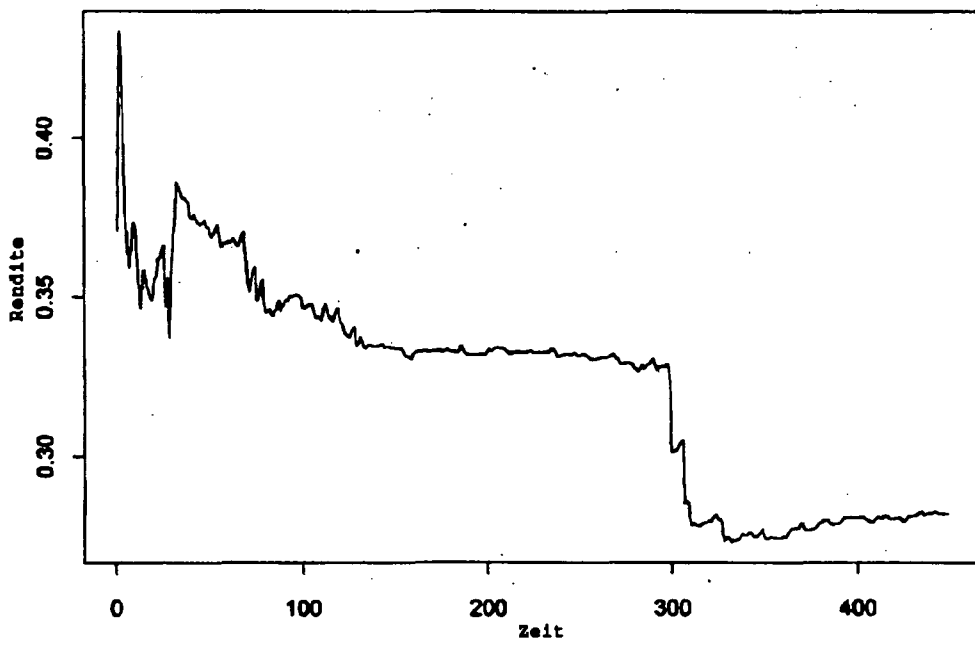


Tabelle 2: ξ_α -Werte für die Prognosen von Nr.1 bis Nr.280 mit optimaler Bandweite (in Klammern die optimale Bandweite).

Lags Y	Lags V	0.01 - Q	0.05 - Q	0.10 - Q	0.25 - Q	0.50 - Q	0.75 - Q	0.90 - Q	0.95 - Q	0.99 - Q
1	-	0.059 (0.5)	0.071 (0.3)	0.058 (0.3)	0.009 (3.0)	0.009 (1.8)	0.026 (1.0)	0.052 (1.0)	0.121 (0.8)	0.196 (0.5)
2	-	0.134 (0.8)	0.093 (0.3)	0.071 (0.8)	0.015 (3.0)	0.012 (2.3)	0.053 (1.3)	0.086 (0.8)	0.169 (0.8)	0.217 (0.8)
3	-	0.135 (1.3)	0.093 (1.0)	0.086 (1.0)	0.044 (1.0)	0.007 (3.0)	0.048 (2.8)	0.089 (1.8)	0.144 (1.8)	0.182 (4.0)
4	-	0.168 (1.3)	0.108 (1.3)	0.119 (1.0)	0.036 (1.0)	0.01 (3.5)	0.053 (2.0)	0.111 (2.0)	0.167 (1.8)	0.200 (4.0)
1	1	0.048 (2.0)	0.069 (0.8)	0.075 (1.0)	0.019 (2.5)	0.006 (2.3)	0.030 (1.5)	0.077 (1.0)	0.135 (1.0)	0.243 (0.8)
1	2	0.068 (2.0)	0.086 (1.3)	0.084 (1.3)	0.024 (2.3)	0.005 (2.5)	0.039 (1.8)	0.096 (1.9)	0.177 (1.3)	0.240 (1.3)
2	1	0.090 (1.0)	0.087 (0.8)	0.095 (0.8)	0.022 (3.0)	0.003 (2.5)	0.056 (1.8)	0.087 (1.5)	0.161 (1.5)	0.232 (1.5)
2	2	0.116 (1.3)	0.100 (1.3)	0.104 (1.3)	0.040 (1.3)	0.01 (1.8)	0.054 (1.5)	0.085 (2.3)	0.184 (1.8)	0.240 (1.8)

9

Abbildung 10: Box-Plots für die Daimler-Benz Renditen

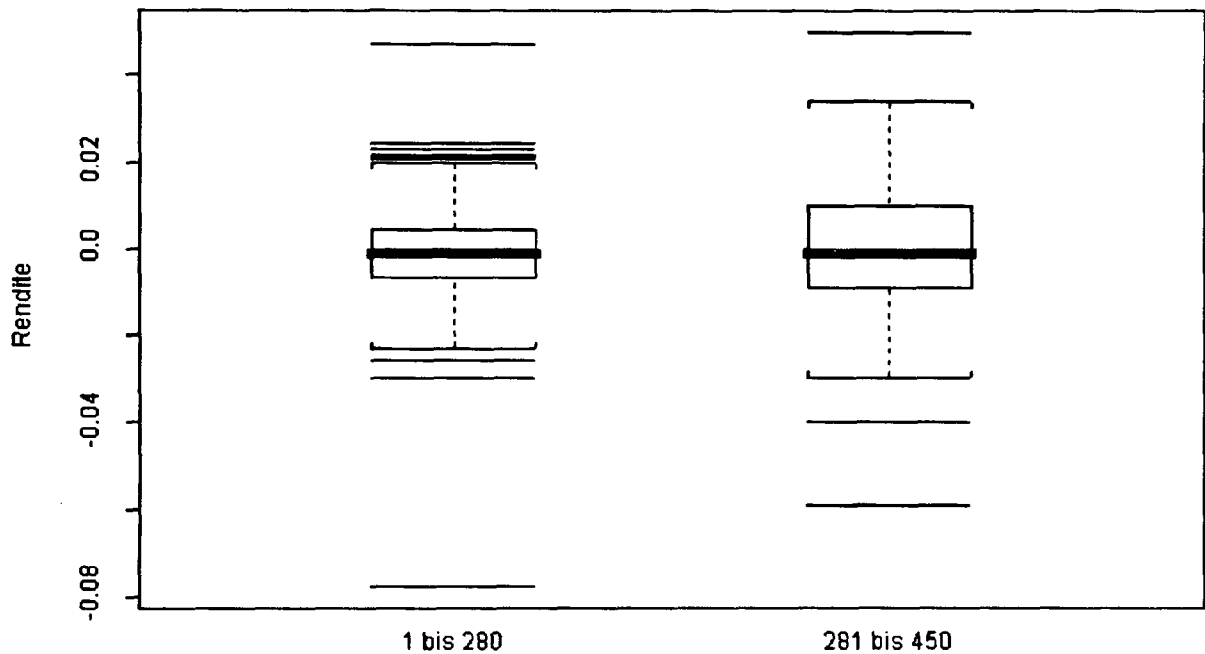


Tabelle 3: ξ_α -Werte für die Prognosen von Nr.281 bis Nr.450 mit optimaler Bandweite (in Klammern die optimale Bandweite).

Lags Y	Lags V	0.01 - Q	0.05 - Q	0.10 - Q	0.25 - Q	0.50 - Q	0.75 - Q	0.90 - Q	0.95 - Q	0.99 - Q
1	-	0.035 (4.0)	0.024 (2.8)	0.031 (2.5)	0.015 (1.5)	0.001 (2.8)	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.064 (1.5)
2	-	0.103 (1.8)	0.042 (3.0)	0.045 (2.3)	0.031 (1.8)	0.004 (2.3)	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.136 (1.0)
3	-	0.170 (1.3)	0.036 (4.5)	0.045 (3.0)	0.029 (2.3)	0.001 (2.8)	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.097 (1.5)
4	-	0.205 (1.3)	0.037 (4.0)	0.038 (2.8)	0.008 (2.8)	0.002 (4.0)	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.06 (4.5)
1	1	0.025 (4.5)	0.025 (4.5)	0.049 (1.5)	0.025 (2.0)	0.007 (2.3)	0.0 -	0.002 (4.0)	0.002 (3.5)	0.075 (1.8)
1	2	0.029 (4.5)	0.030 (2.5)	0.049 (1.8)	0.022 (1.8)	0.005 (2.5)	0.0 -	0.003 (4.5)	0.009 (3.5)	0.097 (1.8)
2	1	0.143 (1.3)	0.045 (2.8)	0.064 (2.5)	0.034 (2.0)	0.007 (2.3)	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.097 (1.5)
2	2	0.21 (1.5)	0.047 (3.5)	0.068 (2.5)	0.027 (1.8)	0.004 (2.5)	0.0 -	0.001 (4.5)	0.004 (4.5)	0.202 (1.3)

eine höhere Volatilität als für die Renditen im ersten Block: der erste Abschnitt ist eine Phase geringerer Volatilität, der zweite Abschnitt eine Phase höherer Volatilität.

Der Strukturbruch in den ξ_α -Werten motiviert, für die beiden Prognoseabschnitte getrennt, die Vorhersagen und Bandweiten zu bestimmen. Die ξ_α -Werte für den Abschnitt bis Prognose Nr.280 sind in Tabelle 2 zusammengefaßt. Sie liegen deutlich höher als die ξ_α -Werte aus Tabelle 1 für die Prognose des gesamten Zeitraums. Die relativ geringen Werte für $\xi_{0,01}$ resultieren aus dem in Abbildung 8 erkennbaren Ausreißer, der bei der Prognose dieses Quantils auf $\xi_{0,01}$ durchschlägt. der beste So ist etwa für $\mathbf{X}_i = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-4})$ der um den Ausreißer bereinigte Wert für $\xi_{0,01}$ gleich 0,329. Das ist für die verschiedenen α ξ_α -Wert. Auf die ξ_α -Werte für andere α als 0,01 ist der Einfluß des Ausreißers unwesentlich. Tabelle 3 enthält die ξ_α -Werte für die Prognosen Nr.281 bis 450. Die ξ_α -Werte für diesen zweiten Abschnitt sind für alle α kleiner als die ξ_α -Werte des ersten Abschnitts. Bemerkenswert ist, daß für die 0,75-, 0,90- und 0,95-Quantile die naive Prognose nicht zu

schlagen ist. Dem steht ein deutlicher Informationsgewinn durch die Kernprognose bei der Vorhersage der 0,01- und 0,99-Quantile, also den extremen Quantilen gegenüber.

Die gesonderte Betrachtung der beiden Abschnitte kann das Abfallen der ξ_α -Werte in der zweiten, der volatileren Phase nicht verhindern. Die ξ_α -Werte sind in der ersten, der ruhigeren Phase deutlich höher als in der zweiten Phase. In der volatileren Phase ist es für einige α nicht möglich, die naive Prognose zu überbieten. Der Strukturbruch in der Zeitreihe kann ein Hinweis darauf sein, daß die strenge Stationarität des Prozesses nur innerhalb einer Volatilitätsklasse vorliegt. Das führt zu einem Ansatz mit zwei Regimen.

Tabelle 4: ξ_α -Werte für Prognosen im Regime geringer Volatilität
(in Klammern die optimalen Bandweiten)

Lags Y	0.01 - Q	0.05 - Q	0.10 - Q	0.25 - Q	0.50 - Q	0.75 - Q	0.90 - Q	0.95 - Q	0.99 - Q
1	0.14 (1.8)	0.138 (1.3)	0.104 (1.3)	0.041 (1.5)	0.007 (2.5)	0.04 (1.0)	0.079 (0.8)	0.149 (2.8)	0.219 (0.8)
2	0.165 (2.8)	0.144 (1.5)	0.11 (1.5)	0.046 (1.8)	0.007 (3.0)	0.044 (2.8)	0.079 (2.8)	0.155 (2.5)	0.198 (2.3)
3	0.226 (1.5)	0.142 (1.5)	0.119 (1.8)	0.045 (2.5)	0.007 (3.5)	0.045 (2.8)	0.079 (2.8)	0.153 (2.5)	0.205 (2.3)
4	0.21 (2.5)	0.132 (2.3)	0.116 (2.0)	0.042 (2.5)	0.0062 (6.5)	0.043 (3.8)	0.076 (3.3)	0.15 (4.3)	0.187 (3.3)

Das zugrundeliegende Modell ist

$$Y_i = \begin{cases} q_\alpha^I(X_i) + U_i & , \text{ falls } Z_i \leq z \quad , \\ q_\alpha^{II}(X_i) + U_i & , \text{ sonst } \quad , \end{cases}$$

mit $P(U_i \leq 0) = \alpha$. $Z_i \leq z$ ist ein Indikator dafür, ob man sich im Zeitpunkt i im Zustand hoher Volatilität oder im Zustand geringer Volatilität befindet. Zur nichtparametrischen Prognose wird nach vergangenen Verläufen X_s gesucht, die den Verlauf X_i ähnlich sind und sich im gleichen Volatilitätsregime wie X_i befinden. Die Schätzer der bedingten Verteilungsfunktionen haben die Form

Tabelle 5: ξ_α -Werte für Prognosen im Regime hoher Volatilität
(in Klammern die optimalen Bandweiten)

Lags Y	0.01 - Q	0.05 - Q	0.10 - Q	0.25 - Q	0.50 - Q	0.75 - Q	0.90 - Q	0.95 - Q	0.99 - Q
1	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.002 (2.3)	0.01 (5.8)	0.0 -	0.0 -	0.041 (1.5)
2	0.127 (1.0)	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.016 (2.0)	0.012 (4.3)	0.0 -	0.0 -	0.085 (1.0)
3	0.212 1.3	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.0 -	0.024 (3.3)	0.0 -	0.0 -	0.067 (3.8)
4	0.261 (1.3)	0.0 -	0.0 -	0.001 (4.8)	0.0 -	0.027 (2.8)	0.0 -	0.0 -	0.085 (3.8)

$$F_{n,X_i}^I(y) = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} K\left(\frac{X_i - X_j}{h_n}\right) \cdot \mathbb{I}_{\{Y_j \leq y\}} \cdot [\mathbb{I}_{\{Z_i \leq z\}} \cdot \mathbb{I}_{\{Z_j \leq z\}}]}{\sum_{j=1}^{i-1} K\left(\frac{X_i - X_j}{h_n}\right) \cdot [\mathbb{I}_{\{Z_i \leq z\}} \cdot \mathbb{I}_{\{Z_j \leq z\}}]} \quad (21)$$

und

$$F_{n,X_i}^{II}(y) = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} K\left(\frac{X_i - X_j}{h_n}\right) \cdot \mathbb{I}_{\{Y_j \leq y\}} \cdot [\mathbb{I}_{\{Z_i > z\}} \cdot \mathbb{I}_{\{Z_j > z\}}]}{\sum_{j=1}^{i-1} K\left(\frac{X_i - X_j}{h_n}\right) \cdot [\mathbb{I}_{\{Z_i > z\}} \cdot \mathbb{I}_{\{Z_j > z\}}]} \quad (22)$$

Zur Bestimmung der Z_i wird im folgenden einfaches exponentielles Glätten der absoluten Renditen verwendet. Die Z_i werden berechnet durch

$$Z_i = 0,09 |Y_{i-1}| + (1 - 0,09)Z_{i-2}, \quad Z_0 = 0 \quad .$$

Das Gewicht $\beta = 0,09$ ist der Wert, der $\sum_i ||Y_i| - Z_i|$ minimiert. Es seien $q_{0,80}$ und $q_{0,20}$ die empirischen 0,80- und 0,20-Quantile der Renditen Y . Dann wird als Grenze z der Wert $\frac{1}{2} (|q_{0,80}| + |q_{0,20}|)$ gewählt. Man befindet sich nach dieser Definition im Zeitpunkt i in einem Regime geringerer Volatilität, wenn $Z_i \leq \frac{1}{2} (|q_{0,80}| + |q_{0,20}|)$ ist. Tabelle 4 zeigt die ξ_α -Werte für Prognosen im Zustand geringer Volatilität und Tabelle 5 enthält die ξ_α -Werte für Prognosen im Zustand hoher Volatilität. Die Ergebnisse bestätigen die bisher

gewonnenen Erkenntnisse. In den Phasen geringer Volatilität liefert die Kernprognose im Vergleich zur naiven Prognose für alle Quantile bis auf den Median einen deutlichen Informationsgewinn. In Phasen hoher Volatilität erfolgt ein deutlicher Informationsgewinn durch die Kernprognose nur in den extremen 0.01- und 0.99-Quantilen. Bemerkenswert ist weiterhin, daß dieser Informationsgewinn sehr asymmetrisch ist. Der maximale $\xi_{0.01}$ -Wert in der volatilen Phase ist 0.261. Dagegen erreicht $\xi_{0.99}$ maximal den Wert 0.085.

4 Schlußbetrachtung

Die eingangs gestellte Frage lautete: enthalten vergangene Renditen Informationen über die Schwänze der Verteilungen der folgenden Renditen? Zur Beantwortung dieser Frage wurde ein Kernschätzer für die bedingte Verteilungsfunktion und daraus abgeleitet ein Kernschätzer für bedingte Quantile definiert. Der Kernschätzer der bedingten Verteilungsfunktion erwies sich für univariate und multivariate Prediktoren als konsistent und zwar sowohl für unabhängige Prozesse als auch für stark mischende Prozesse. Zur Beurteilung der Quantilsprognosen wurde ein auf die Quantilsfunktion von Koenker und Basset (1978) aufbauendes Maß $\xi_\alpha = 1 - \left[\sum_i \varphi(Y_i - q_{n,\alpha}(X_i)) \right] / \left[\sum_i \varphi(Y_i - q_{i-1,\alpha}) \right]$, $\varphi = \alpha \mathbb{I}_{\{u \geq 0\}} \cdot u - (1 - \alpha) \mathbb{I}_{\{u < 0\}} \cdot u$, eingeführt. Dieses Instrumentarium wurde zur Prognose von Quantilen für Daimler-Benz Renditen eingesetzt, als Prediktoren dienten vergangene Renditen. Es ergab sich durch die Kernprognose ein Informationsgewinn in den Rändern der bedingten Verteilungen. Am stärksten war die Prognosekraft für die 0,01- und 0,99-Quantile. In Richtung zur Mitte der Verteilungen nahm die Prognosegüte ab. Für den Median ergab sich durch die Kernprognose kein Informationsgewinn. Damit ist die eingangs gestellte Frage zu bejaen. Die vergangenen Renditen enthalten Informationen über die Schwänze der Verteilungen der folgenden Renditen. Die vergangenen Renditen enthalten jedoch keine Information über die Mitte dieser Verteilungen. Weiterhin wurde untersucht, ob die Hinzunahme der Variable "Volumen" als Prediktor die Kernprognose verbessern kann: der Informationsgewinn war gering.

Eine nähere Betrachtung der Vorhersageergebnisse förderte einen Strukturbruch in den Prognosen zutage. Es können zwei Phasen unterschieden werden. Ein volatiler Abschnitt und ein ruhiger Abschnitt. Die Prognosen in der volatilen Phase sind für die meisten Quantile deutlich schlechter als die Prognosen in der ruhigen Phase. Dieser Unterschied läßt sich auch nicht dadurch beheben, daß man für beide Abschnitte getrennt optimale Bandweiten bestimmt. Einzig die extremen 0,01- und 0,99-Quantile lassen sich in der volatilen Phase mit einem ähnlich großen Informationsgewinn wie in der ruhigen Phase vorhersagen. Dieser Strukturbruch kann darauf deuten, daß die vorausgesetzte strenge Stationarität nur jeweils innerhalb der Volatilitätsklassen gilt. Es wurde daher ein Modell mit 2 verschiedenen Regimen eingeführt. Die Prognosen im Rahmen dieses Modells bestätigen die obigen Erfahrungen hinsichtlich der unterschiedlichen Prognostizierbarkeit von Quantilen in volatilen und ruhigen Phasen.

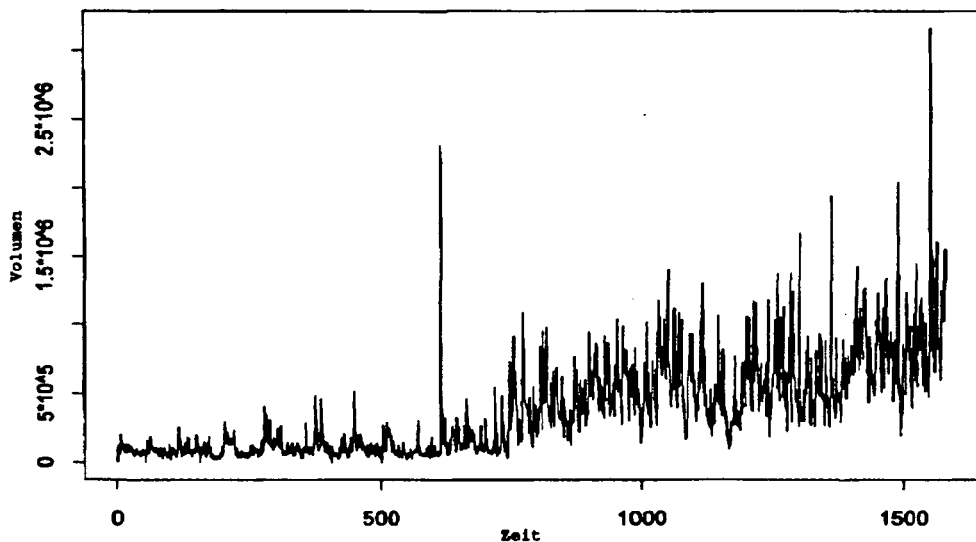
In der obigen Analyse wurden zur Vorhersage mit multivariaten Prediktoren Produktkerne verwendet. Hier bieten sich Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen. So liegt etwa die Verwendung von Normkernen nahe. Normkerne haben jedoch den Nachteil, erheblich rechenintensiver als Produktkerne zu sein. Weiterhin könnten andere Arten der Kernschätzung verwendet werden. Zum Beispiel der Gasser & Müller Schätzer der Form $\frac{1}{h_n} \sum_i \int_{[s_{i-1}, s_i)} K\left(\frac{x-Z}{h_n}\right) \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} dz$, der andere Eigenschaften bezüglich des Mittleren Quadratischen Fehler als der in diesem Aufsatz verwendete Kernschätzer besitzt.

5 Anhang

Behandlung des Volumens der Daimler-Benz Aktie

Bei den Volumendaten handelt es sich um den täglichen Börsenumsatz in Stück. Dabei wird eine Doppelzählung vorgenommen, d.h. es wird sowohl die Käufer- wie auch die Verkäuferseite gezählt. Seit dem 1.12.89 gehen in die Zählung auch die über den Bildschirmhandel IBIS abgeschlossenen Geschäfte in die Umsatzdaten ein. Abbildung 11 enthält die Zeitreihe des täglichen Volumens. Es ist eine im Zeitablauf steigende Varianz und ein Trend erkennbar. In dieser Form sind die Volumendaten als Kovariable für

Abbildung 11: Zeitreihen des Volumens der Daimler-Benz Aktie



die Quantilsprognose von Renditen nicht verwendbar. Zunächst wird eine varianzstabilisierende Potenztransformation durchgeführt (zum Verfahren der Varianzstabilisierung vergleiche etwa Heiler, Michels (1994)). Über den Streuungs-Niveau-Plot erhält man die Potenztransformation $V = V_{\alpha}^{1-0,788}$. Die transformierte Zeitreihe ist in Abbildung 12 dargestellt.

Abbildung 12: Zeitreihe des varianzstabilisierten Volumens

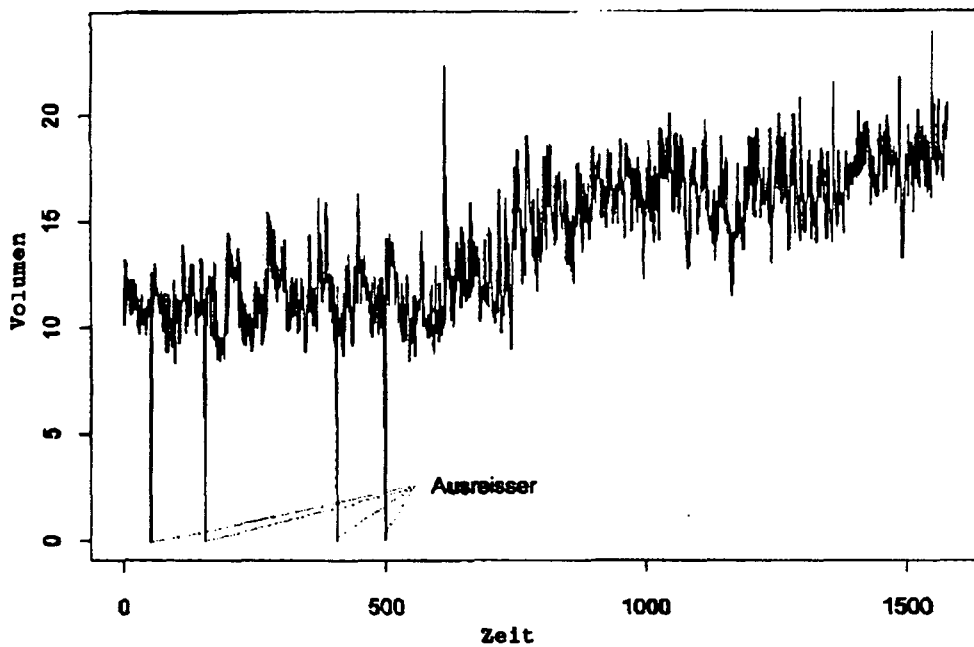


Abbildung 13: Trendanpassung für den 1. Teil des Volumens

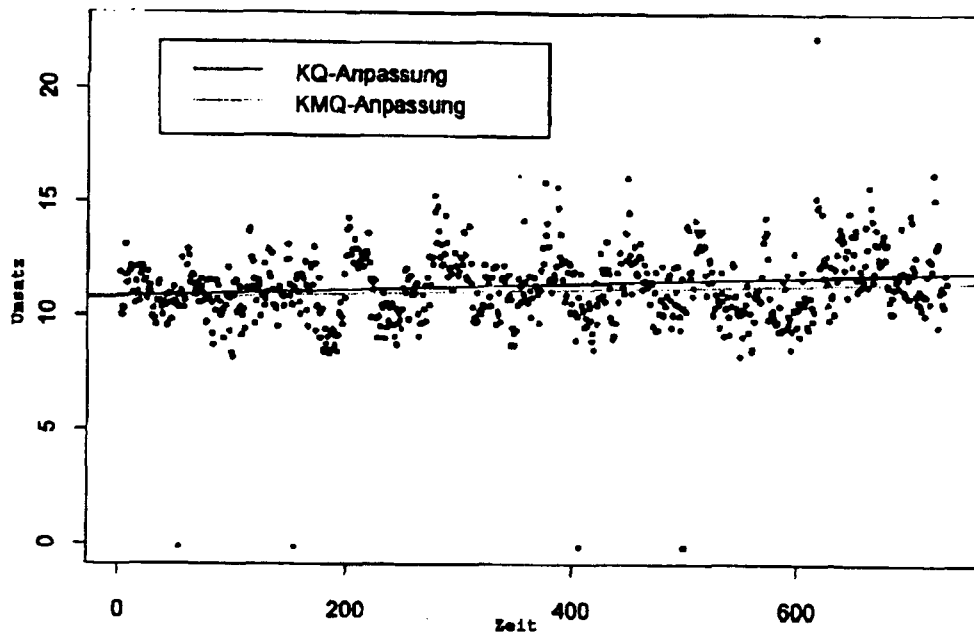


Abbildung 14: Trendanpassung für den 2. Teil des Volumens

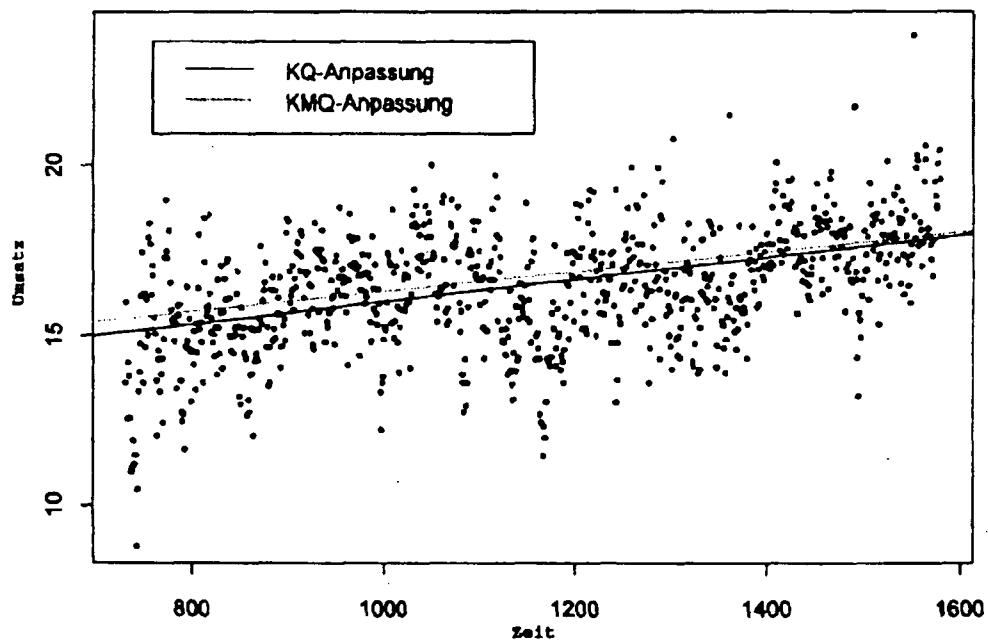


Abbildung 15: Bereinigtes Volumen der Daimler-Benz Aktie

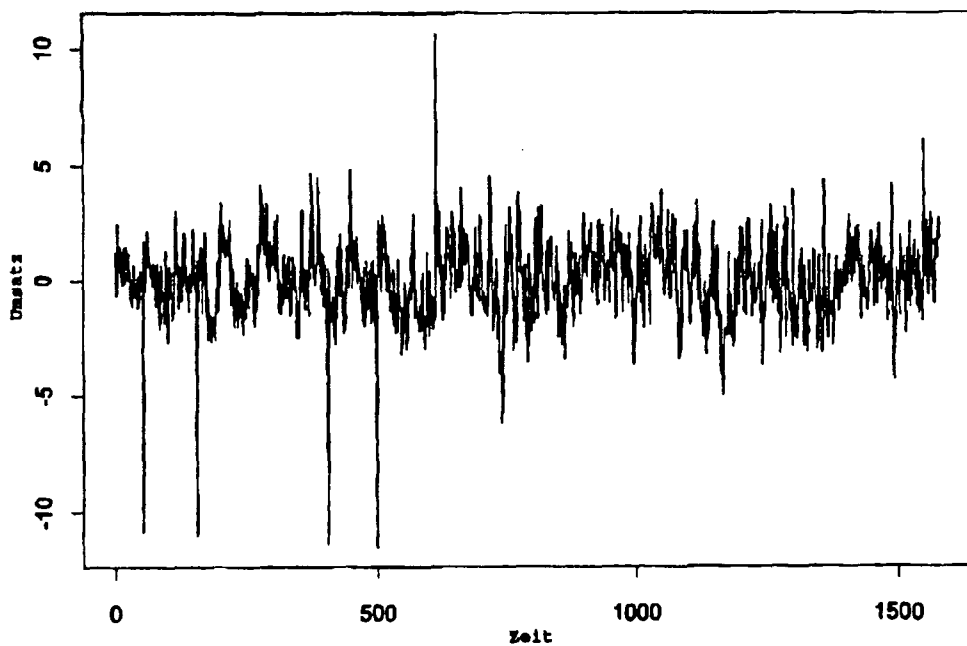
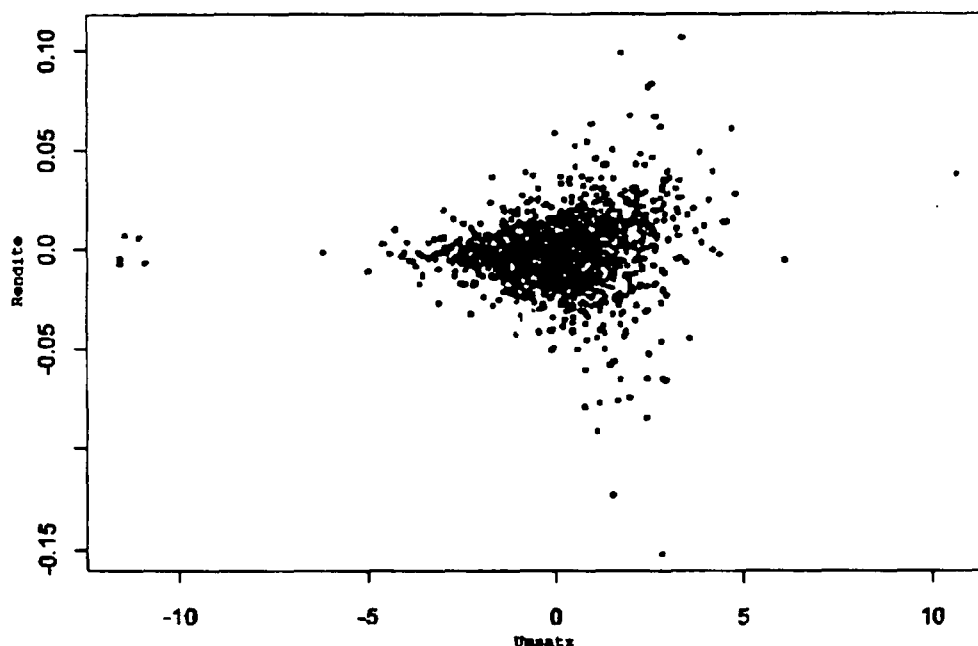


Abbildung 16: Bereinigtes Volumen versus Rendite



Nach der Varianzstabilisierung sind nun vier Ausreißer erkennbar, an diesen vier Tagen wird ein Umsatz von Null angegeben. Im nächsten Schritt müssen die Daten um den Trend bereinigt werden. Die Zeitreihe wird an der Einführung des IBIS-Handels am 1.12.89 in zwei Teile getrennt und für jeden Block separat ein linearer Trend angepaßt. Da die Daten mit Ausreißern behaftet sind, wurde neben einer Kleinst-Quadrate Anpassung (KQ) auch eine Kleinst Median der Quadrate Anpassung (KMQ) durchgeführt. Die letztere Methode wurde von Rousseeuw (1984) vorgeschlagen. Sie besitzt einen asymptotischen Bruchpunkt von 50 % und ist daher sehr robust gegen Ausreißer. Die verschiedenen Anpassungen zeigten Abbildungen 13 und 14. Die linearen Trends scheinen angemessen und der Einfluß der Ausreißer ist gering. Die Zeitreihe wird um die beiden Kleinst-Quadrate Trends bereinigt und findet in der in Abbildung 15 dargestellten Form Eingang in die Prognose von bedingten Quantilen der Daimler-Benz Renditen. Werden diese Volumendaten wie in Abbildung 16 gegen die Renditen abgetragen, erkennt man einen Trichtereffekt. Mit zunehmendem Volumen steigt die Streuung der Renditen.

6 Literaturverzeichnis

- Bollerslev T., Chou R.Y., Kroner K.F. (1992):** ARCH modelling in Finance, Journal of Econometrics 52, 5-59.
- Heiler S., Michels P. (1994):** Deskriptive und explorative Datenanalyse, Oldenburg Verlag, München.
- Horváth L., Yandell B.S. (1988):** Asymptotics of Conditional Empirical Processes, Journal of Multivariate Analysis 26, 184-206.
- Koenker R., Basset G. (1978):** Regression Quantiles, Econometrica 46, 33-50.
- Koenker R., Portnoy S., Ng P. (1992):** Nonparametric Estimation of Conditional Quantile Functions, in: L_1 -Statistical Analysis and Related Methods (Ed.: Y. Dodge), North-Holland, New York.
- Loistl O., Betz I. (1993):** Chaostheorie, Oldenburg Verlag, München. e
- Michels P. (1992):** Nichtparametrische Analyse und Prognose von Zeitreihen, Physica-Verlag, Heidelberg.
- Rousseeuw, P.J. (1984):** Least Median of Squares Regression, Journal of the American Statistical Association, 79, 871-880.
- Stute W. (1986):** Conditional Empirical Processes, Annals of Statistics 14, 638-647.