

Dannenberg, Henry

## Working Paper

Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bei der Kreditrisikobewertung: Vergleich des Value at Risk der Verlustverteilung des Kreditrisikos bei Verwendung von Bootstrapping und einem asymptotischen Ansatz

IWH Discussion Papers, No. 3/2009

## Provided in Cooperation with:

Halle Institute for Economic Research (IWH) – Member of the Leibniz Association

*Suggested Citation:* Dannenberg, Henry (2009) : Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bei der Kreditrisikobewertung: Vergleich des Value at Risk der Verlustverteilung des Kreditrisikos bei Verwendung von Bootstrapping und einem asymptotischen Ansatz, IWH Discussion Papers, No. 3/2009, Leibniz-Institut für Wirtschaftsforschung Halle (IWH), Halle (Saale), <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:3:2-8699>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/29982>

### Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

### Terms of use:

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

**Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bei der  
Kreditrisikobewertung**

**Vergleich des Value at Risk der Verlustverteilung des  
Kreditrisikos bei Verwendung von Bootstrapping und  
einem asymptotischen Ansatz**

*Henry Dannenberg*

Januar 2009

Nr. 3

**Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bei der  
Kreditrisikobewertung**

**Vergleich des Value at Risk der Verlustverteilung des  
Kreditrisikos bei Verwendung von Bootstrapping und  
einem asymptotischen Ansatz**

*Henry Dannenberg*

Januar 2009

Nr. 3

Autor: *Henry Dannenberg*

Email: [Henry.Dannenberg@iwh-halle.de](mailto:Henry.Dannenberg@iwh-halle.de)

Tel.: (0345) 77 53-871

The responsibility for discussion papers lies solely with the individual authors. The views expressed herein do not necessarily represent those of the IWH. The papers represent preliminary work and are circulated to encourage discussion with the author. Citation of the discussion papers should account for their provisional character; a revised version may be available directly from the author.

Comments and suggestions on the methods and results presented are welcome.

IWH-Discussion-Papers are indexed in RePEc-Econpapers.

Herausgeber:

INSTITUT FÜR WIRTSCHAFTSFORSCHUNG HALLE – IWH

Prof. Dr. Ulrich Blum (Präsident), Dr. Hubert Gabrisch (Forschungsdirektor)

Das IWH ist Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Hausanschrift: Kleine Märkerstraße 8, 06108 Halle (Saale)

Postanschrift: Postfach 11 03 61, 06017 Halle (Saale)

Telefon: (0345) 77 53-60

Telefax: (0345) 77 53-8 20

Internetadresse: <http://www.iwh-halle.de>

# **Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bei der Kreditrisikobewertung**

## **Vergleich des Value at Risk der Verlustverteilung des Kreditrisikos bei Verwendung von Bootstrapping und einem asymptotischen Ansatz**

### **Zusammenfassung**

Bei der Kreditrisikobewertung müssen die Parameter Ausfallwahrscheinlichkeit und -korrelation geschätzt werden. Diese Schätzung erfolgt unter Unsicherheit. In der Literatur werden asymptotische Konfidenzregionen diskutiert, um diese Unsicherheit bei der simultanen Schätzung beider Parameter zu bewerten. Diese Regionen setzen allerdings eine sehr lange Datenhistorie für eine genaue Bewertung voraus. Als Alternative bietet sich bei kurzen Datenhistorien Bootstrapping an. Diese Methode ist allerdings deutlich rechenintensiver. Im vorliegenden Beitrag wird untersucht, ab welcher Anzahl historisch verfügbarer Perioden Bootstrapping und eine Wald-Konfidenzregion zu einer vergleichbaren Bewertung des Kreditrisikos gelangen. Die hier genutzten Methoden führen zu ähnlichen Ergebnissen, wenn über 100 historische Perioden zur Verfügung stehen.

Schlagwörter: Kreditrisikobewertung, Konfidenzregion, Schätzunsicherheit, Bootstrapping

# **Estimation Uncertainty in Credit Risk Assessment**

## **Comparison of Credit Risk Using Bootstrapping and an Asymptotic Approach**

### **Abstract**

For credit risk assessment, probability of default and correlation have to be estimated simultaneously. However, these estimates are uncertain. To assess this uncertainty the literature has discussed the use of asymptotic confidence regions. This kind of region though needs a long credit history for exact assessment. An alternative method to generate a confidence region for a short credit history is bootstrapping. Hence, it could be more appropriate to assess estimation uncertainty with bootstrapping than with asymptotic methods if only a short credit history is available. Based on a simulation study, it is analyzed how many periods should be available for assessing credit risk – taking account of estimation uncertainty – if bootstrapping and a Wald confidence region shall achieve similar results. This article shows that more than 100 cycles have to be available for similar results.

Keywords: confidence region, credit portfolio risk, estimation uncertainty, bootstrapping

JEL: C15, D81, G11

# **Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bei der Kreditrisikobewertung**

## **Vergleich des Value at Risk der Verlustverteilung des Kreditrisikos bei Verwendung von Bootstrapping und einem asymptotischen Ansatz**

### **1 Einleitung**

In vielen Risikomodellen bleiben Schätzfehler bei der Bestimmung von Risikoparametern unberücksichtigt. Hierdurch wird vernachlässigt, dass diese Parameter häufig nur geschätzt werden, also selber einen Unsicherheitsfaktor und damit auch ein Risiko darstellen.<sup>1</sup> So sind historisch beobachtbare Ausprägungen, auf denen eine Schätzung beruht, auch nur zufällige Realisationen der zu schätzenden Risikoverteilung. Erfolgt in der Vergangenheit zufällig nur wenige Ausfälle, besteht die Gefahr, ein Ausfallrisiko zu unterschätzen. Umgekehrt besteht natürlich auch die Möglichkeit, auf Grundlage von historischen Beobachtungen, das Risiko zu überschätzen. Beide Fälle stellen für das Risikomanagement ein Problem dar. Im ersten Fall wird gegebenenfalls eine zu geringe Risikovorsorge betrieben, also zum Beispiel zu wenig Eigenkapital vorgehalten. Im zweiten Fall wird hingegen zu restriktiv gehandelt. Das heißt, es wird zu viel Eigenkapital für die Risikodeckung eingeplant, wodurch Renditeziele schwieriger zu erreichen sind. Die Schätzunsicherheit stellt damit einen separaten Risikofaktor dar. Die Vernachlässigung dieses „Meta-Risikos“ bei der Risikobewertung führt daher zu einer ineffizienten Kapitalallokation. Der folgende Beitrag befasst sich mit der Frage, wie Schätzunsicherheit bei der Kreditrisikobewertung berücksichtigt werden kann. Hierbei erfolgt eine Fokussierung auf die Risikoparameter Ausfallwahrscheinlichkeit und Ausfallkorrelation zwischen Unternehmen in einer Periode (im Folgenden auch als Korrelation bezeichnet).

Die mit der Schätzung von Modellparametern verbundenen Probleme sind in der Literatur bekannt. So fordert der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht, dass im Bankensektor für die mit der Schätzung der Modellparameter verbundenen Fehler Sicherheitszuschläge zu berücksichtigen sind, die in Beziehung zur möglichen Fehlerspannweite

---

<sup>1</sup> Vgl. *Gleißner, Romeike* (2008), S. 8.

stehen.<sup>2</sup> Der Ausschuss sagt jedoch wenig darüber aus, wie diese Sicherheitszuschläge zu bestimmen sind. In der Literatur wird die Verwendung von Konfidenzintervallen beziehungsweise von Konfidenzregionen zur Beschreibung von Schätzunsicherheit diskutiert. Dieser Ansatz findet auch verstärkt bei der Kreditrisikobewertung Berücksichtigung. So wird beispielsweise hinsichtlich der Ausfallwahrscheinlichkeit diskutiert, die mit ihrer Schätzung verbundene Unsicherheit beispielsweise durch Wald-, Agresti-Coull-oder Jeffrey-Intervalle aber auch auf Bootstrapping basierende Intervalle zu beschreiben.<sup>3</sup>

Gegen die Verwendung dieser für die Ausfallwahrscheinlichkeit diskutierten Intervalle spricht jedoch, dass sie die Unabhängigkeit der Ausfallereignisse voraussetzen. Modifikationen wie von *Miao und Gastwirth* (2004) vorgeschlagen, berücksichtigen zwar Abhängigkeiten, aber nur, wenn sie zwischen im Datensatz direkt aufeinanderfolgenden Beobachtungen vorliegen.<sup>4</sup> Beide Annahmen sind für die Kreditportfoliorisikomodellierung nicht besonders geeignet, da von Abhängigkeiten zwischen allen Kreditnehmern eines Portfolios auszugehen ist. Unsicherheit bei der Bewertung der Abhängigkeitsstruktur untersuchen beispielsweise *Cassart et al.* (2007).

Konfidenzregionen, bei denen die oben beschriebenen Annahmen zur Unabhängigkeit nicht erforderlich sind, beschreiben beispielsweise *Höse* (2007) und *Hamerle et al.* (2005). Diese Autoren entwickeln Modelle, die es ermöglichen, bei der simultanen Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten und Ausfallkorrelationen asymptotische Konfidenzregionen für beide Parameter abzuleiten. Auch befassen sie sich mit der Frage, welchen Einfluss die Schätzunsicherheit auf den Value at Risk (VaR) der Verlustverteilung eines Kreditportfolios und damit auf den Eigenkapitalbedarf eines Unternehmens hat. Die verwendeten asymptotischen Konfidenzintervalle basieren jedoch auf der Annahme, dass die auf Basis einer Maximum-Likelihood-Schätzung geschätzten Parameter asymptotisch normalverteilt sind.<sup>5</sup> So wird unter anderem vorausgesetzt, dass Daten für einen historisch sehr langen Zeitraum zur Verfügung stehen.<sup>6</sup> Diese Annahme ist für die Praxis möglicherweise wenig realistisch. Alternativen zu asymptotischen Konfidenzintervallen könnten auf Bootstrapping basierende Intervalle darstellen. Ein wesentlicher Vorteil des Bootstrappings ist darin zu sehen, dass es frei von restriktiven Annahmen hinsichtlich der Parameter ist.<sup>7</sup> Das heißt, die Verletzung der Annahme der

---

2 Vgl. *Basel Committee on Banking Supervision* (2005), RN 451.

3 Vgl. *Christensen et al.* (2004); *Dannenberg* (2008); *Hanson, Schuermann* (2006); *Lawrenz* (2008); *Pluto, Tasche* (2005); *Stein* (2003); *Trück, Rachev* (2005)

4 Vgl. *Miao, Gastwirth* (2004), S. 124 ff.

5 Vgl. *Hamerle et al.* (2005), S. 11.

6 Vgl. *Höse* (2007), S. 136.

7 Vgl. *Chernick* (2008), S. 8 ff.



asymptotischen Normalverteilung der Maximum-Likelihood-Schätzer wäre für das Bootstrapping unproblematisch. Der Nachteil des Bootstrappings besteht jedoch darin, dass eine analytische Berechnung nicht möglich ist. Damit ist diese Methode deutlich rechen- und damit zeitintensiver als die asymptotische Lösung. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, ab welcher Anzahl historisch verfügbarer Perioden beide Methoden zu einer ähnlichen Einschätzung des Kreditausfallrisikos bei Berücksichtigung von Schätzunsicherheit führen und damit die Verwendung eines asymptotischen Ansatzes unbedenklich ist. Im Folgenden soll dieser Frage anhand einer Simulationsstudie nachgegangen werden. Als Kriterium der Vergleichbarkeit beider Methoden dienen hier die Mittelwerte der VaR-Verteilungen. Die asymptotische Konfidenzregion wird durch eine Wald-Konfidenzregion beschrieben.

Der folgenden Untersuchung liegt ein Beta-Binomial-Modell zugrunde. Der Einfachheit halber wird ein Ein-Ratingklassenfall betrachtet. Bei dem Beta-Binomial-Modell handelt es sich um ein Kreditportfoliomodell, welches den Bernoulli-Mischungsmodellen zuzuordnen ist.<sup>8</sup> Die Bernoulli-Mischungsmodelle zählen zu den bekanntesten Ansätzen für die Modellierung von abhängigem Kreditausfallverhalten. Im folgenden Abschnitt wird dieses Modell zunächst beschrieben. In Abschnitt 3 wird dargestellt, wie asymptotische beziehungsweise auf dem Bootstrapping beruhende Konfidenzregionen hergeleitet werden. Abschnitt 4 erläutert, wie basierend auf den Konfidenzregionen die Verteilungen der Values at Risk abgeleitet werden. In Abschnitt 5 wird anhand einer Simulationsstudie untersucht, ob durch die Verwendung asymptotischer Konfidenzregionen die Values at Risk und damit indirekt auch der Eigenkapitalbedarf in Abhängigkeit von der verfügbaren Kredithistorie signifikant über- oder unterschätzt wird. Abschließend werden in Abschnitt 6 die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und weiterer Forschungsbedarf formuliert.

---

<sup>8</sup> Das Beta-Binomial-Modell entspricht weitgehend der Ein-Faktor-Version von CreditRisk+ (Vgl. *Frey, McNeil* (2003): S. 69).

## 2 Das verwendete Beta-Binomial-Modell

Zur Modellierung des Kreditportfoliorisikos wird zur vereinfachten Veranschaulichung im Folgenden ein Bernoulli-Mischungsmodell mit einer Bonitäts- beziehungsweise Ratingklasse unterstellt. Die Bernoulli verteilte Ausfallvariable  $H_m$  eines Kreditnehmers  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N_t$ ) nehme in der Periode  $t$  den Wert Eins an, wenn dieser ausfällt. Sonst sei  $H_m$  Null. Alle Forderungen gegen einen Kreditnehmer  $n$  innerhalb einer Periode  $t$  werden zu einer Forderung zusammengefasst. Die durchschnittliche Bonität aller Kreditnehmer der Ratingklasse in Periode  $t$  wird durch die Zufallsvariable  $\tilde{\pi}_t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) (stochastische Ausfallwahrscheinlichkeit der Ratingklasse) beschrieben. Beliebige Realisationen des Vektors aller stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $\vec{\tilde{\pi}} := (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_T)$  seien durch  $\vec{\pi} := (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_T)$  ( $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_T) \in (0;1)^T$ ) bezeichnet. Im Beta-Binomial-Modell wird für  $\tilde{\pi}_t$  eine Betaverteilung unterstellt. Diese hängt unter anderem auch von einer Korrelation  $\rho$  zwischen verschiedenen Ausfällen in einer Periode ab. Ist allerdings ein bestimmter Wert  $\pi_t$  (und damit zum Beispiel eine gute oder schlechte Konjunktur) gegeben, wird (bedingte) Unabhängigkeit zwischen den Ausfallvariablen  $H_m$  angenommen. Die auf eine zufällige Realisation bedingten Verteilungen der Ausfallvariablen  $H_m$  sind somit stochastisch unabhängige (bedingt unabhängige) Bernoulli-Verteilungen und es gilt:

$$H_m \Big|_{\vec{\tilde{\pi}} = \vec{\pi}} \stackrel{\text{unabhängig}}{\sim} \text{Bin}(1; \pi_t), \quad n = 1, 2, \dots, N_t. \quad (1)$$

Die Anzahl der Ausfälle  $H_t$  am Ende einer Periode  $t$  ergibt sich aus der Summe der Ausfallvariablen  $H_m$ :

$$H_t := \sum_{n=1}^{N_t} H_m, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (2)$$

wobei  $N_t$  die Portfoliogröße bezeichnet. Damit ergeben sich als bedingte Verteilungen der Ausfallvariablen Binomialverteilungen:

$$H_t \Big|_{\vec{\tilde{\pi}} = \vec{\pi}} \sim \text{Bin}(N_t; \pi_t). \quad (3)$$

Da es sich bei den Realisationen  $\pi_t$  um zufällige Ausprägungen von  $\tilde{\pi}_t$  handelt, wird im Bernoulli-Mischungsmodell eine Annahme hinsichtlich der  $\tilde{\pi}_t$  zugrundeliegenden Verteilung  $F_{\tilde{\pi}_t}(\pi_t)$  getroffen. Die Mischung dieser Verteilung mit den sich aus (3) ergebenden Binomialwahrscheinlichkeiten führt zur unbedingten Wahrscheinlichkeitsfunktion der Anzahl der Ausfälle  $H_t$ :

$$P(H_t = h_t) = \binom{N_t}{h_t} \pi_t^{h_t} (1 - \pi_t)^{N_t - h_t} dF_{\tilde{\pi}_t}(\pi_t). \quad (4)$$

Im hier verwendeten Beta-Binomial-Modell werden die stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten durch Betaverteilungen modelliert. Damit ergibt sich als unbedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion der Anzahl der Ausfälle  $H_t$ :

$$P(H_t = h_t) = \binom{N_t}{h_t} \pi_t^{h_t} (1 - \pi_t)^{N_t - h_t} \frac{\pi_t^{\alpha-1} (1 - \pi_t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad (5)$$

wobei  $B(\alpha, \beta)$  die Betafunktion:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (6)$$

mit  $\alpha \in (0; \infty)$  und  $\beta \in (0; \infty)$  bezeichnet.<sup>9</sup> Zwischen der Ausfallkorrelation  $\rho$  beziehungsweise der erwarteten Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  und den Parametern der Betafunktion  $\alpha, \beta$  besteht folgender funktionaler Zusammenhang:

$$\alpha = \frac{p(1-\rho)}{\rho} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{(1-p)(1-\rho)}{\rho}. \quad (7)$$

Damit sind  $0 < \rho < 1$  und  $0 < p < 1$ . Es wird weiter angenommen, dass im Falle eines Ausfalls gegen den ausgefallenen Kreditnehmer  $n$  eine Forderung (Exposure at Default) in Höhe von Eins besteht. Wenn es zu einem Ausfall kommt, sei unterstellt, dass der gesamte Forderungsbetrag dieses Kreditnehmers ausfällt (Loss given Default = Eins). Damit reduziert sich die Verlustverteilung des Kreditportfolios auf die Verteilung der Anzahl der innerhalb einer Periode  $t$  auftretenden Kreditausfälle  $H_t$ .

Zur Parametrisierung dieses Modells ist die Schätzung der beiden Parameter  $\rho$  und  $p$  erforderlich. Die simultane Schätzung dieser beiden Größen erfolgt mittels Maximum-Likelihood-Methode. Hierfür wird unterstellt, dass die zugrundeliegende unbekannte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  und Ausfallkorrelation  $\rho$  im Periodenvergleich konstant sind. Es liegen keine periodenübergreifenden Abhängigkeiten vor. Folgende auf Gleichung (5) basierende Log-Likelihood-Funktion wird maximiert:<sup>11</sup>

<sup>9</sup> Vgl. zum Bernoulli-Mischungsmodell und zur Beta-Binomialverteilung Höse (2007), S. 34 ff.; Frey, McNeil (2003), S. 67 f.; Embrechts, Frey, McNeil (2005), S. 352 ff.

<sup>10</sup> Vgl. Höse (2007), S. 48.

<sup>11</sup> Vgl. Höse (2007), S. 149.

$$\begin{aligned}
l(p, \rho, \vec{h}) = & c + \sum_{t=1}^T \ln \Gamma\left(h_t - p + \frac{p}{\rho}\right) + \ln \Gamma\left(N - h_t - 1 + p + \frac{1-p}{\rho}\right) \\
& - T \left[ \ln \Gamma\left(\frac{p(1-\rho)}{\rho}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{(1-p)(1-\rho)}{\rho}\right) + \ln \Gamma\left(N - 1 + \frac{1}{\rho}\right) \right] \\
& + T \ln \Gamma\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Hierbei beschreibt  $\vec{h}$  den Vektor historisch beobachteter Ausfallzahlen. Es wird unterstellt, dass sich die Portfoliogröße  $N = N_t$  mit  $t = 1, 2, \dots, T$  im Zeitverlauf nicht ändert, wobei  $T$  die Anzahl der historisch beobachtbaren Perioden darstellt.  $\Gamma$  bezeichnet die Gammafunktion:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} s^{a-1} e^{-s} ds. \tag{9}$$

Die Konstante  $c$  ist unabhängig von den Modellparametern und kann daher bei der Maximierung vernachlässigt werden. Die beiden Schätzer  $\tilde{p}_T^{ML}$  und  $\tilde{\rho}_T^{ML}$ , die diese Funktion maximieren, werden numerisch bestimmt. Die Parameter der Betafunktion können auf Grundlage dieser beiden Schätzer ermittelt werden:

$$\tilde{\alpha}_T^{ML} = \frac{\tilde{p}_T^{ML}(1-\tilde{\rho}_T^{ML})}{\tilde{\rho}_T^{ML}} \quad \text{und} \quad \tilde{\beta}_T^{ML} = \frac{(1-\tilde{p}_T^{ML})(1-\tilde{\rho}_T^{ML})}{\tilde{\rho}_T^{ML}}. \tag{10}$$

Durch Einsetzen dieser beiden Parameter sowie  $\pi_t = \tilde{p}_T^{ML}$  und  $N$  in Gleichung (5) kann die Verteilung der Anzahl der Ausfälle  $P(H_t = h_t)$  innerhalb einer Periode abgeleitet werden. Diese berücksichtigt jedoch noch nicht die mit der Schätzung verbundene Schätzunsicherheit. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie diese durch Konfidenzregionen beschrieben werden kann.

### 3 Herleitung der Konfidenzregion

Höse (2007) konstruiert eine asymptotische Wald-Konfidenzregion für die beiden Parameter Ausfallkorrelation und Ausfallwahrscheinlichkeit.<sup>12</sup> Diese wird für einen Parametervektor  $(p, \rho)$  berechnet mit:

$$T\left(\left(\tilde{p}_T^{ML}, \tilde{\rho}_T^{ML}\right) - (p, \rho)\right) \widehat{I(p, \rho)}_T \left(\left(\tilde{p}_T^{ML}, \tilde{\rho}_T^{ML}\right) - (p, \rho)\right)' \leq \chi_{2,1-q}^2, \quad (11)$$

wobei  $\chi_{2,1-q}^2$  für  $0 < q < 1$  das  $q$ -Quantil einer Chi-Quadratverteilung mit zwei Freiheitsgraden bezeichnet.  $\widehat{I(p, \rho)}_T$  bezeichnet eine zu schätzende Informationsmatrix. Die Elemente dieser Informationsmatrix können dabei wie folgt bestimmt werden:<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} I(p, \rho)_{11} &= (1-\rho)^2 \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{P(H_t \geq i+1)}{(p(1-\rho) + i\rho)^2} + \frac{P(H_t \leq N-i-1)}{((1-p)(1-\rho) + i\rho)^2} \right], \\ I(p, \rho)_{12} = I(p, \rho)_{21} &= \frac{\rho-1}{\rho} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{pP(H_t \geq i+1)}{(p(1-\rho) + i\rho)^2} + \frac{(1-p)P(H_t \leq N-i-1)}{((1-p)(1-\rho) + i\rho)^2} \right], \\ I(p, \rho)_{22} &= \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{p^2 P(H_t \geq i+1)}{(p(1-\rho) + i\rho)^2} + \frac{(1-p)^2 P(H_t \leq N-i-1)}{((1-p)(1-\rho) + i\rho)^2} - \frac{1}{(1+\rho(i-1))^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Durch Einsetzen der Parameter  $p = \tilde{p}_T^{ML}$  und  $\rho = \tilde{\rho}_T^{ML}$  in (12) kann die Informationsmatrix geschätzt werden.

Die von Höse (2007) vorgeschlagene Konfidenzregion kann jedoch nur für  $T \rightarrow \infty$  das vorgegebene Vertrauensniveau gewährleisten.<sup>15</sup> Diese Einschränkung kann aus zwei

<sup>12</sup> Höse (2007) konstruiert darüber hinaus auch weitere Konfidenzregionen. Insbesondere eine auf dem Likelihood-Verhältnis basierende Konfidenzregion (LV-Region) könnte für kurze Datenhistorien möglicherweise besser geeignet sein als das hier verwendete Wald-Intervall. Allerdings ist die LV-Region so konstruiert, dass ein gegebenes Vertrauensniveau hinsichtlich der beiden Parameter mindestens eingehalten wird. Dieses Vorgehen ist möglicherweise problematisch. *Brown, Cai, DasGupta* (2001, S. 113) lehnen beispielsweise das für Anteilswerte im Unabhängigkeitsfall konstruierte Clopper-Pearson-Intervall, welches ebenfalls ein gegebenes Vertrauensniveau mindestens einhält, ab, weil sie es für „wastefully conservative“ halten. Für die LV-Region spricht eine von Höse durchgeführte Simulationsstudie, welche der LV-Region eine hohe Abdeckwahrscheinlichkeit attestiert (Höse (2007), S. 167). Diese Studie erfolgt jedoch nur für ein Portfolio ( $N = 5000$ ,  $p = \rho = 0,05$ ). *Brown, Cai, DasGupta* (2001, S. 102) weisen allerdings darauf hin, dass die Abdeckwahrscheinlichkeit eines Konfidenzintervalls sehr sensibel auf den Stichprobenumfang reagieren kann. Daher wird das für die LV-Region sprechende Argument hier geringer gewichtet als das gegen sie sprechende Argument und daher im Folgenden das vorgeschlagene Wald-Intervall betrachtet.

<sup>13</sup> Vgl. Höse (2007), S. 87.

<sup>14</sup> Vgl. Höse (2007), S. 151.

<sup>15</sup> Vgl. Höse (2007), S. 136.

Gründen problematisch sein. Zum einen stehen häufig nur kurze Zeiträume zur Schätzung der Parameter zur Verfügung. Zum anderen werden Ausfallwahrscheinlichkeiten von Bonitätsklassen häufig nur auf Jahresbasis bewertet. Ein auf Jahresbasis geschätztes Modell erfordert also Beobachtungen, die viele Jahre in die Vergangenheit reichen, um asymptotische Konfidenzregionen zu schätzen. Es stellt sich damit zum einen die Frage nach der Datenverfügbarkeit und zum anderen nach der Aktualität von weit in die Vergangenheit reichender Daten. Höse (2007) testet die Güte der von ihr dargestellten asymptotischen Konfidenzregion für Kredithistorien von  $T = 16$  und  $T = 256$ . Sie stellt fest, dass vor allem für die Korrelation in kurzen Kredithistorien dieses Intervall wenig geeignet ist. Für  $T = 256$  erzielt sie jedoch bereits für beide Parameter eine gute Abdeckung.<sup>16</sup>

Wie eingangs beschrieben, kann das Bootstrapping für kleine Stichproben die geeignetere Methode zur Herleitung von Konfidenzintervallen beziehungsweise –regionen sein, da auf restriktive Annahmen hinsichtlich der Verteilung der Maximum-Likelihood-Schätzer verzichtet werden kann. Es wird zwischen nichtparametrischen und parametrischen Bootstrapping unterschieden.<sup>17</sup> Hier soll die parametrische Version zur Anwendung kommen.<sup>18</sup> Diese setzt voraus, dass eine Vorstellung hinsichtlich der den historischen Beobachtungen zugrundeliegenden Verteilung existiert. Für diese Arbeit entspricht diese der in Gleichung (5) beschriebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Kreditausfälle, welche, wie oben dargestellt, auf Grundlage historischer Beobachtungen parametrisiert werden kann. Aus dieser Verteilung werden beim parametrischen Bootstrapping entsprechend der Anzahl der historisch verfügbaren Perioden  $T$  zufällige Ausfallzahlen mit Zurücklegen gezogen. Diese  $T$  Ausfallzahlen repräsentieren eine Bootstrap-Stichprobe, für welche die Ausfallwahrscheinlichkeit und Ausfallkorrelation entsprechend Gleichung (8) geschätzt werden können. Durch das wiederholte Erzeugen von Bootstrap-Stichproben kann eine Vielzahl an Paaren der beiden zu schätzenden Parameter erzeugt und ausgewertet werden. Zusammenfassend seien hier die einzelnen Schritte zur Ermittlung der Bootstrap-Intervalle dargestellt:

(S1) Parametrisierung der Verteilung aus Gleichung (5) unter Verwendung der Gleichungen (8) und (7) auf Grundlage der historisch verfügbaren Daten.

(S2) Ziehen (mit Zurücklegen) von  $T$  zufälligen Ausfallzahlen auf Basis der in S1 parametrisierten Verteilung (erzeugen einer Bootstrap-Stichprobe).

(S3) Schätzen der Parameter  $\tilde{p}_T^{ML}$  und  $\tilde{\rho}_T^{ML}$  auf Grundlage der in S2 erzeugten Bootstrap-Stichprobe unter Verwendung von Gleichung (8).

---

<sup>16</sup> Vgl. Höse (2007), S. 160 ff.

<sup>17</sup> Vgl. Vose (2005), S. 181 ff.; Chernick (2008), S. 120 ff.

<sup>18</sup> Hier wird als zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kreditausfälle die Beta-Binomial-Verteilung aus Gleichung (5) unterstellt. Da damit die den historischen Daten zugrundeliegende Verteilung im Modell als bekannt angenommen wird, ist die parametrische Bootstrap-Methode angemessen.

(S4) Speichern des in S3 ermittelten Parameterpaares.

(S5)  $x$ -maliges Wiederholen der Schritte S2-S4.

Im Folgenden soll zur Veranschaulichung ein Beispiel dienen. Für dieses sei angenommen, dass ein  $N = 500$  Kreditnehmer umfassendes Portfolio betrachtet wird. Es können Beobachtungen zu Kreditausfallereignissen für  $T = 5$  historische Perioden zur Verfügung gestellt werden. In den historischen Perioden hatte das Portfolio ebenfalls eine Größe von  $N_t = 500$  mit  $t = 1, \dots, 5$ . Es wurden in den einzelnen Jahren  $\vec{h}' = (23; 24; 2; 2; 24)$  Kreditausfälle beobachtet. Damit schwankt die Ausfallquote  $AQ_t$ , also das Verhältnis von Ausfallzahl und Portfoliogröße zwischen 0,4% und 4,8%. Im Durchschnitt der fünf Jahre fielen 3% der Kreditnehmer aus. In Tabelle 1 werden die Rahmenbedingungen des Beispiels zusammenfassend dargestellt.

Tabelle 1:  
Rahmenbedingungen des Beispiels

t	$h_t$	$N_t$	$AQ_t = \frac{h_t}{N_t}$
1	23	500	4,6%
2	24	500	4,8%
3	2	500	0,4%
4	2	500	0,4%
5	24	500	4,8%

Quelle: Fiktives Beispiel

Im Anhang 1 erfolgt für dieses Beispiel ein Vergleich von mit Bootstrapping erzeugten Parameterpaaren und der Wald-Konfidenzregion. Dieser Vergleich deutet darauf hin, dass je nach gewähltem Vertrauensniveau eine größere beziehungsweise geringere Anzahl der mit Bootstrapping erzeugten Wertepaare außerhalb der asymptotischen Konfidenzregion liegen kann als es zu erwarten gewesen wäre. Es ist zu vermuten, dass dies zu unterschiedlichen Kreditrisikobewertungen führen kann, wenn zur Beschreibung der Schätzunsicherheit eine dieser beiden Methoden gewählt wird. Im Folgenden wird daher für eine Vielzahl von möglichen Beobachtungen in Abhängigkeit von einem gegebenen Vertrauensniveau untersucht, ob durch die Verwendung von asymptotischen Konfidenzregionen das Kreditrisiko im Vergleich zur Verwendung von auf Bootstrapping basierenden Konfidenzregionen signifikant über- oder unterschätzt wird. Da Höse (2007) für  $T = 256$  eine Abweichung der Schätzer von der Normalverteilungsannahme als unproblematisch für den Einsatz der Wald-Konfidenzregion ermittelt, ist zu vermuten, dass Bootstrapping und asymptotische Methode für  $T < 256$  zu einer vergleichbaren Risikoeinschätzung führen.

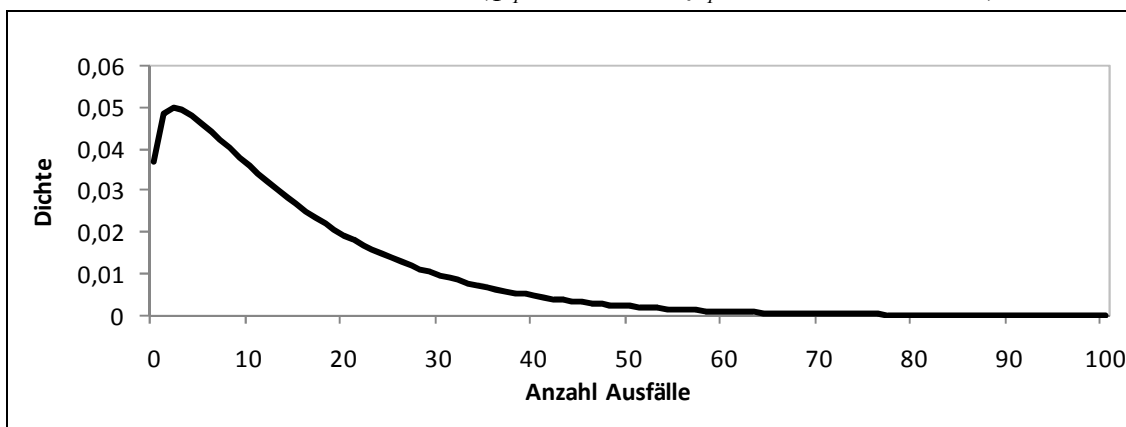
## 4 Herleitung der Verteilung des Value at Risk

Eine etablierte Kennzahl zur Bewertung von Risiken stellt der Value at Risk ( $Var_\alpha$ ) dar. Dieser ist als eine maximale Abweichung von einem Referenzwert beschrieben, die für ein gegebenes Konfidenzniveau  $\alpha$  innerhalb einer Periode eintreten kann.<sup>19</sup> Wird die Abweichung zur Gewinnschwelle betrachtet, kann aus dem Value at Risk auch der Eigenkapitalbedarf eines Unternehmens abgeleitet werden. Der Value at Risk stellt damit eine entscheidende Größe bei der Risikobewertung dar.

Da hier angenommen wird, dass der Exposure at Default und der Loss given Default jeweils den Wert Eins annehmen, reduziert sich das Kreditausfallrisiko auf die in Gleichung (5) beschriebene Verteilung. Für ein gegebenes Wertepaar  $(\tilde{p}_T^{ML}, \tilde{\rho}_T^{ML})$  kann diese parametrisiert und hinsichtlich ihrer Quantile ausgewertet werden. Für das oben beschriebene Beispiel ergibt sich die in Abbildung 1 dargestellte Verteilung. Diese weist einen  $Var_{99\%}$  von rund 63 Ausfällen auf, was einer Ausfallquote von 12,6% entspricht.

Abbildung 1:

Dichtefunktion der Portfolioverluste ( $\tilde{p}_T^{ML} = 2,98\%$ ,  $\tilde{\rho}_T^{ML} = 0,0245$ ,  $N = 500$ )



Quelle: Eigene Berechnungen

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, besteht hinsichtlich der Parameterschätzung Unsicherheit. Das heißt, dass das dem Risiko zugrundeliegende tatsächliche aber unbekanntes Parameterpaar durchaus auch andere Werte als den Maximum-Likelihood-Schätzer annehmen kann. Dabei umfasst eine Konfidenzregion alle jene Parameterpaare, von denen mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1-q$  eines das tatsächliche aber unbekanntes Wertepaar beschreibt. Im obigen Fall liegt beispielsweise das Wertepaar ( $p = 5\%$ ,  $\rho = 0,04$ ) auch in der Konfidenzregion zum Vertrauensniveau von 95%. Würde also ein solches Vertrauensniveau angestrebt werden, könnte auch dieses Parameterpaar das unbekanntes aber tatsächliche Paar sein. In diesem Fall würde der  $Var_{99\%}$

<sup>19</sup> Vgl. *Kapalanski* (2002), S. 3; *Albrecht, Maurer* (2005), S. 123 und dort zitierte Literatur.



auf 20,2% steigen. Andererseits ist bei diesem Vertrauensniveau auch das Wertepaar ( $p = 1\%$ ,  $\rho = 0,01$ ) ein Element der Konfidenzregion. Sollte es sich hierbei um das tatsächlich zugrundeliegende Wertepaar handeln, dann entspräche der  $VaR_{99\%}$  der Ausfallquote nur 5%.

Basierend auf einer der asymptotischen Konfidenzregion zugrundeliegenden Verteilung beziehungsweise basierend auf Bootstrapping ist es möglich, mittels Monte-Carlo-Simulation eine Verteilung des VaR des Kreditrisikos abzuleiten.<sup>20</sup> Die Monte-Carlo-Simulation wird gewählt, da sie sowohl für eine Ableitung aus der asymptotischen Konfidenzregion als auch bei Verwendung von Bootstrapping genutzt werden kann. Mit beiden Methoden wird jeweils zufällig eine große Anzahl Parameterpaare erzeugt. Bei Verwendung der asymptotischen Methode werden diese aus der der Konfidenzregion zugrundeliegenden Verteilung gezogen. Diese Wertepaare werden in Gleichung (5) eingesetzt und aus den so parametrisierten Verteilungen die jeweiligen VaR abgeleitet. Eine ausführliche Beschreibung der Vorgehensweise erfolgt im Anhang 2. Für die im folgenden Abschnitt dargestellten Ergebnisse werden jeweils 1.000 VaR für jede Methode und Datenhistorie erzeugt und aus diesen die VaR-Verteilungen abgeleitet.

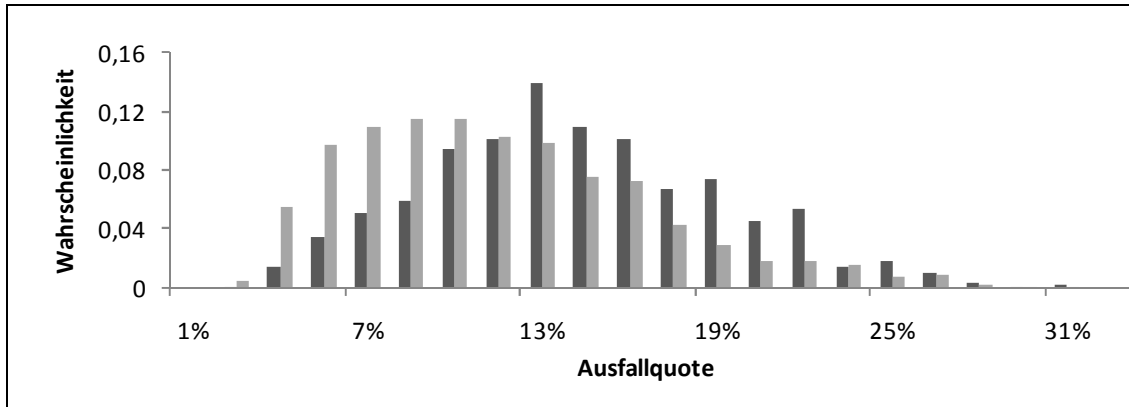
Für das oben beschriebene Beispiel ergeben sich die in Abbildung 2 dargestellten Verteilungen des  $VaR_{99\%}$ . Es wird deutlich, dass bei Anwendung der asymptotischen Methode (schwarze Balken) hier im Beispiel die Verteilung des  $VaR_{99\%}$  nach rechts verschoben ist. Die Verteilung des  $VaR_{99\%}$  bei Anwendung der asymptotischen Methode weist einen Mittelwert von 13,6% auf, was in etwa 68 Ausfällen entspricht. Dieser ist deutlich größer als der Mittelwert der mit Bootstrapping ermittelten Verteilung in Höhe von 10,9% (etwa 55 Ausfälle). Bei der Interpretation dieser Werte ist zu berücksichtigen, dass der Mittelwert einer VaR-Verteilung keinen direkten Rückschluss auf den Eigenkapitalbedarf eines Unternehmens zulässt. Hierfür ist es erforderlich, die Verlustverteilung unter Berücksichtigung von Schätzunsicherheit herzuleiten. Auf Grundlage dieser Verteilung kann der tatsächliche  $VaR_{\alpha}$  bestimmt werden. Die Herleitung dieser Verlustverteilung ist allerdings mit einer zusätzlichen Simulation verbunden, wodurch die gesamte Simulationsdauer erheblich erhöht wird.

Um hier die Simulationszeit in einem vertretbaren Rahmen zu halten, werden im Folgenden nicht die tatsächlichen  $VaR_{\alpha}$  verglichen. Vielmehr dient ein Vergleich der Mittelwerte der VaR-Verteilungen als Indikator dafür, ab welcher Anzahl historisch verfügbarer Perioden der asymptotische Ansatz ähnliche Ergebnisse erzeugt wie Bootstrapping. Signifikant verschiedene Lageparameter dieser Verteilungen sind ein Hinweis dafür, dass beide Methoden zu unterschiedlichen Risikoeinschätzungen führen.

---

<sup>20</sup> Vgl. *Dannenberg* (2007), S. 632 f.

Abbildung 2:  
Verteilung des  $\text{VaR}_{99\%}$  bei Anwendung der asymptotischen Methode (schwarze Balken) und Bootstrapping (graue Balken) zur Modellierung der Schätzunsicherheit



Quelle: Eigene Berechnungen

## 5 Vergleich der Verteilungen des VaR mittels Simulationsstudie

Eingangs wurde die Vermutung formuliert, dass asymptotische Konfidenzregionen zur Bewertung von Schätzunsicherheit bei der Kreditrisikobewertung wenig geeignet sein könnten, wenn nur eine geringe Anzahl historischer Perioden zur Verfügung steht, auf deren Grundlage die Parameterschätzung erfolgt. Hier soll anhand eines Vergleichs von Lageparametern der Verteilungen der VaR untersucht werden, ob sich diese signifikant voneinander unterscheiden. Es ist zu vermuten, dass mit zunehmender Anzahl historisch verfügbarer Perioden die Wahrscheinlichkeit abnimmt, dass die mit den beiden Verfahren ermittelten Lageparameter der VaR-Verteilungen signifikant voneinander abweichen. Als Lageparameter wird der Mittelwert der jeweiligen Verteilung betrachtet. Der Vergleich erfolgt auf Grundlage parametrischer Zweistichproben tests. Kann Varianzheterogenität angenommen werden, erfolgt der Test unter Verwendung eines approximativen Gaußtests. Wird hingegen Varianzhomogenität angenommen, erfolgt der Test auf Grundlage eines t-Tests. Varianzhomogenität wird unter Verwendung eines F-Tests überprüft.<sup>21</sup> Im in Tabelle 1 dargestellten Fall ist beispielsweise der Mittelwert der auf der asymptotischen Konfidenzregion beruhenden  $VaR_{99\%}$ -Verteilung zum 1%-Niveau signifikant größer als der auf Bootstrapping beruhenden Verteilung.

Da mit einem Zweistichproben test nur verglichen werden kann, ob die beiden Methoden bei einer gegebenen Kreditrisikohistorie zu ähnlichen Ergebnissen führen, besteht die Möglichkeit, dass ein beobachtetes Ergebnis von der gewählten Kreditrisikohistorie abhängt. Würden beispielsweise in Tabelle 1 in den einzelnen Jahren andere Ausfallzahlen beobachtet werden, wäre es möglich, dass der Zweistichproben test zu einem anderen Ergebnis geführt hätte. Um dies zu überprüfen ist es erforderlich, für einen gegebenen historisch verfügbaren Zeitraum verschiedene Kredithistorien zu testen. Im Folgenden werden daher jeweils zufällig 200 Kredithistorien erzeugt. Für diese werden die Verteilungen der VaR abgeleitet und auf Unterschiede der Lageparameter untersucht. Auf diese Weise stehen für jede untersuchte Periodenlänge 200 Auswertungen zur Verfügung. Die einzelnen Kredithistorien werden erzeugt, indem für jede betrachtete historische Periode zufällig eine Anzahl Ausfälle aus dem Intervall  $[0;25]$  gleichverteilt gezogen wird.

In Tabelle 2 werden die Ergebnisse der Simulationsstudie dargestellt. Untersuchungen erfolgen für die Periodenlängen  $T = 5$ ,  $T = 25$ ,  $T = 50$ ,  $T = 75$  und  $T = 100$ ,  $T = 150$ . Die Ratingklassengröße wird über alle Perioden mit  $N_t = 500$  als konstant angenommen. Es wird jeweils der Anteil der untersuchten Stichproben angegeben, bei dem die asymptotische Methode zu einem signifikant höheren oder geringeren beziehungsweise nicht sig-

---

<sup>21</sup> Vgl. *Bleymüller, Gehlert, Gülicher* (1998), S. 109 ff.

nifikant verschiedenen mittleren VaR im Vergleich zur Bootstrap-Methode führt. Die Untersuchung erfolgt für verschiedene Vertrauensniveaus des  $VaR_\alpha$ , mit  $\alpha = 90\%$ ,  $95\%$ ,  $99\%$  und  $99,9\%$ . Der Zweistichprobentest erfolgt zum 5%-Niveau.

Tabelle 2:

Mittelwertvergleich der VaR-Verteilungen ( $N_t = 500$ , Signifikanzniveau: 5% )

	Die asymptotische Methode führt im Vergleich zum Bootstrapping zu...	Anteil der Beobachtungen			
		VaR <sub>90%</sub>	VaR <sub>95%</sub>	VaR <sub>99%</sub>	VaR <sub>99,9%</sub>
T=5	signifikant größeren mittleren VaR	100%	100%	100%	100%
	signifikant kleineren mittleren VaR	0%	0%	0%	0%
	keinen signifikanten Unterschieden	0%	0%	0%	0%
T=25	signifikant größeren mittleren VaR	100%	100%	100%	100%
	signifikant kleineren mittleren VaR	0%	0%	0%	0%
	keinen signifikanten Unterschieden	0%	0%	0%	0%
T=50	signifikant größeren mittleren VaR	45,5%	61%	73,%	78%
	signifikant kleineren mittleren VaR	0%	0%	0%	0%
	keinen signifikanten Unterschieden	54,5%	39%	26,5%	22%
T=75	signifikant größeren mittleren VaR	22%	25,5%	34,5%	47,5%
	signifikant kleineren mittleren VaR	4,5%	2,5%	0,5%	0%
	keinen signifikanten Unterschieden	73,5%	72%	65%	52,5%
T=100	signifikant größeren mittleren VaR	4%	4,5%	13%	23,5%
	signifikant kleineren mittleren VaR	10%	5,5%	3%	1,5%
	keinen signifikanten Unterschieden	87%	87,5%	80,5%	76,5%
T=150	signifikant größeren mittleren VaR	2%	3%	4%	6%
	signifikant kleineren mittleren VaR	10%	10%	5%	4%
	keinen signifikanten Unterschieden	88%	87%	91%	90%

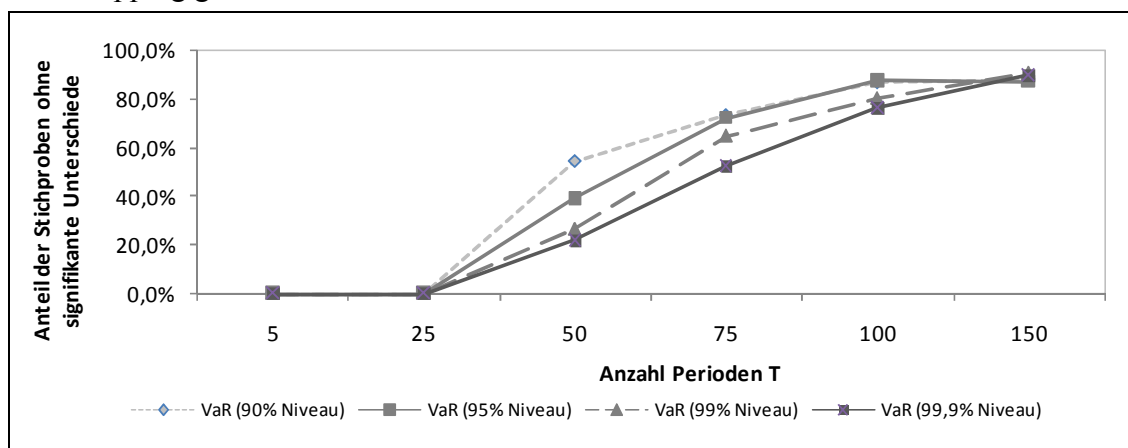
Quelle: Eigene Berechnungen

Es wird deutlich, dass der Anteil der Stichproben, bei denen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Mittelwerten der VaR-Verteilungen gemessen werden, wie erwartet, mit der Periodenlänge zunimmt (vgl. Abbildung 3). Bei den hier untersuchten Periodenlängen führen erstmals für  $T = 50$  die beiden Methoden nicht bei allen Stichproben zu signifikanten Unterschieden. Wenn signifikante Unterschiede gemessen wurden, waren die Mittelwerte der mit der asymptotischen Methode hergeleiteten Verteilung für  $T = 5$ ,  $T = 25$  und  $T = 50$  stets größer als die mit Bootstrapping generierten Mittelwerte. Ab  $T = 75$  werden auch signifikant kleinere Mittelwerte bei Verwendung der asymptotischen Methode beobachtet. Der Anteil dieser Stichproben nimmt dabei mit der Periodenlänge zu. Bis zu einer Periodenlänge von  $T = 100$  kann festgestellt werden, dass bei einem geringen Vertrauensniveau des VaR ein größerer Anteil der untersuchten Stichproben keine signifikanten Unterschiede im Vergleich zu den VaR mit hohem

Vertrauensniveau aufweist. Dieser Unterschied ist jedoch bei  $T = 150$  nicht mehr zu beobachten. Es ist daher zu vermuten, dass im hier dargestellten Fall ab dieser Periodenlänge die Ungleichheit zwischen den Verteilungen der VaR weniger durch die Periodenlänge sondern vielmehr durch die Ratingklassengröße verursacht wird. Das legt den Schluss nahe, dass je nachdem welches Vertrauensniveau des VaR betrachtet wird, zwischen 100 und 150 historische Perioden zur Verfügung stehen müssen, um mit der asymptotischen Methode ähnliche Ergebnisse zu erzielen wie mit dem Bootstrapping.

Abbildung 3:

Anteil der Stichproben, bei denen keine signifikanten Unterschiede der Mittelwerte der VaR-Verteilungen bei Verwendung der asymptotischen Methode beziehungsweise Bootstrapping gemessen werden



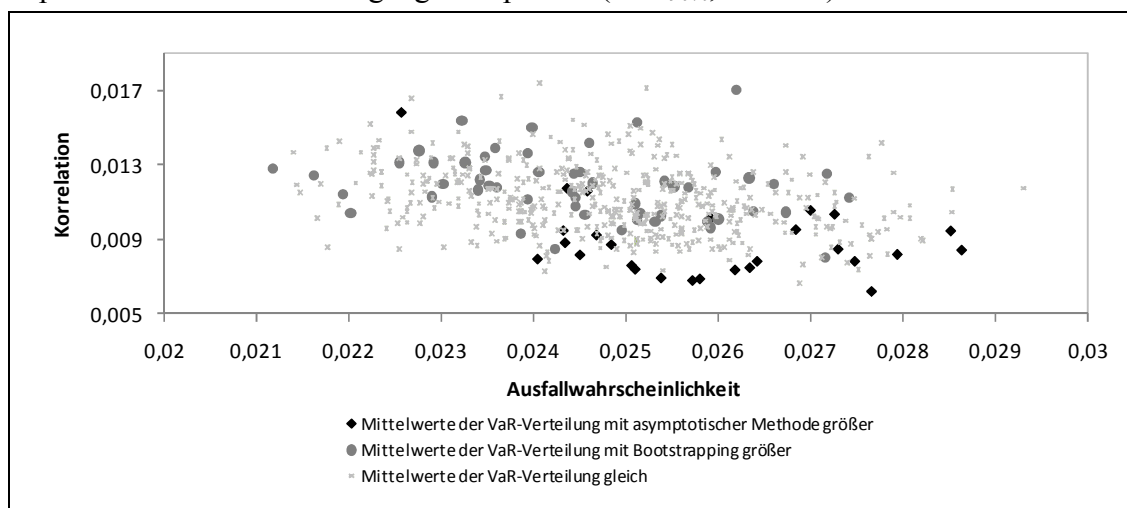
Quelle: Eigene Berechnungen

Es stellt sich die Frage, ob ein Zusammenhang zwischen der gewählten Kredithistorie und der Wahrscheinlichkeit besteht, dass mit der asymptotischen Methode ein größerer beziehungsweise kleinerer Mittelwert der VaR-Verteilung beobachtet wird als bei Verwendung von Bootstrapping. Abbildung 4 zeigt für  $T = 100$  und  $\text{VaR}_{90\%}$  die Maximum-Likelihood-Schätzer der zugrundeliegenden Ausgangsstichproben und die Ergebnisse der Zweistichprobentests.<sup>22</sup> Die Periodenlänge  $T = 100$  sowie das Niveau des  $\text{VaR}_{90\%}$  wird gewählt, da hier für die drei Fälle, dass mit der asymptotischen Methode größere, kleinere beziehungsweise gleiche Mittelwerte gemessen werden, Beobachtungen vorliegen. Die Abbildung deutet darauf hin, dass in den Fällen, in denen mit der asymptotischen Methode signifikant größere Mittelwerte der VaR-Verteilung gemessen werden, in der Ausgangstichprobe tendenziell eher geringe Korrelationen vorliegen. Werden mit Bootstrapping hingegen größere Mittelwerte der VaR-Verteilung beobachtet, liegen in der Ausgangstichprobe tendenziell Beobachtungen mit hoher Korrelation vor.

<sup>22</sup> Für die Abbildung wurden zu den 200 Stichproben von Tabelle 2 zusätzlich 350 Stichproben ausgewertet.

Abbildung 4:

Ergebnisse der Zweistichprobentests in Abhängigkeit von zugrundeliegenden Parameterpaaren verschiedener Ausgangsstichproben ( $\text{VaR}_{90\%}$ ,  $T = 100$ )



Quelle: Eigene Berechnungen

Das Merkmal Korrelation könnte damit geeignet sein, um eine Abgrenzung zwischen den beiden Gruppen vorzunehmen, bei denen signifikant unterschiedliche Mittelwerte der VaR-Verteilungen beobachtet werden. Mit einer multivariaten Diskriminanzanalyse wird im Folgenden kurz untersucht, inwiefern eine Abgrenzung beider Gruppen, basierend auf den beiden Merkmalen Ausfallwahrscheinlichkeit und Korrelation, möglich ist. Abbildung 5 zeigt die beiden Gruppen. Die eingezeichnete Trennlinie beschreibt die Merkmalspaare, für welche die Diskriminanzfunktion den Wert Null annimmt. Die mittleren Werte der Diskriminanzfunktionen (Wilks-Lambda) sind für beide Parameter zwischen beiden Gruppen hochsignifikant verschieden (Signifikanzniveau  $< 1\%$ ). Dabei weist die Ausfallkorrelation mit  $D_{\text{Korrel}} = 0,67$  eine deutlich höhere isolierte Diskriminanz auf als die Ausfallwahrscheinlichkeit mit  $D_{\text{PD}} = 0,22$ . Beide Merkmale weisen zusammen eine Diskriminanz in Höhe von  $D_{\text{ges}} = 0,72$  auf.

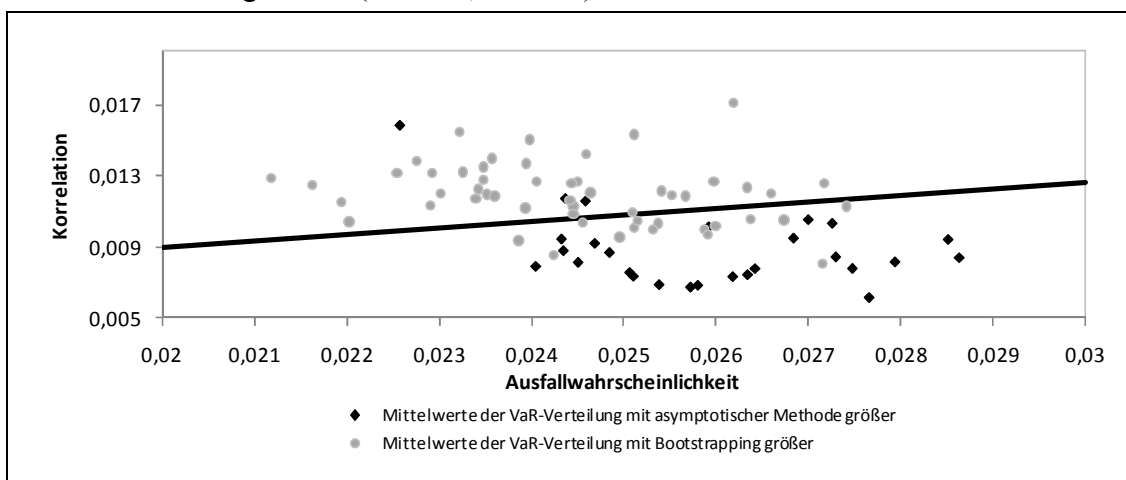
Eine Auswertung für  $T = 75$  und  $\text{VaR}_{90\%}$  führt zu ähnlichen Ergebnissen. Auch hier weisen die mittleren Werte der Diskriminanzfunktionen beider Gruppen für beide Merkmale hochsignifikante Unterschiede auf. Die gemeinsame als auch die isolierten Diskriminanz(en) sind mit  $D_{\text{Korrel}} = 0,49$ ,  $D_{\text{PD}} = 0,05$  und  $D_{\text{ges}} = 0,49$  allerdings geringer als für  $T = 100$ . Es wird jedoch deutlich, dass eine Abgrenzung vorrangig anhand der Ausfallkorrelation in der Ausgangsstichprobe erfolgen kann. Dieses Ergebnis überrascht nicht, da Höse (2007) darauf hinweist, dass vor allem hinsichtlich der Korrelation die asymptotische Konfidenzregion bei kurzen Datenhistorien ungeeignet ist.<sup>23</sup> Es ist daher zu vermuten, dass bei hinreichend langen historischen Zeiträumen mögliche signifikante

<sup>23</sup> Vgl. Höse (2007), S. 160 ff.

Unterschiede zwischen beiden Methoden zunehmend zufälliger Natur sind und durch die Ratingklassengröße verursacht werden. Für die Bewertung von Kreditrisiken ist festzuhalten, dass verschiedene Risikoeinschätzungen der beiden hier untersuchten Methoden vermutlich insbesondere auf die Korrelation zurückzuführen sind.

Abbildung 5:

Abgrenzung der Ausgangsstichproben, die zu signifikant verschiedenen Mittelwerten der VaR-Verteilung führen ( $T = 100$ ,  $VaR_{90\%}$ )



Quelle: Eigene Berechnungen

## 6 Fazit

Die Berücksichtigung von Schätzunsicherheit stellt ein wichtiges Element bei der Risikobewertung dar. Bleibt diese Risikoquelle unberücksichtigt, werden Risiken und damit Eigenkapitalanforderungen falsch eingeschätzt. Zur Bewertung dieses Metarisikos werden in der Literatur asymptotische Konfidenzregionen diskutiert. Der Vorteil dieser Intervalle ist darin zu sehen, dass sie verhältnismäßig einfach berechnet werden können. Gegen die Verwendung dieser Intervalle könnte jedoch sprechen, dass sie Annahmen hinsichtlich der Verteilung der Maximum-Likelihood-Schätzer treffen, die nur asymptotisch erfüllt werden. Besonders hinsichtlich der Anzahl historisch verfügbarer Perioden stellt sich aber die Frage, ob in der Praxis genügend Beobachtungen für die Schätzung zur Verfügung gestellt werden können.

Hier wurde festgestellt, dass in Abhängigkeit vom gewählten Vertrauensniveau des VaR die Vergleichbarkeit für unterschiedliche Periodenlängen erreicht wird. Als Fazit kann jedoch festgehalten werden, dass für die hier untersuchte Wald-Konfidenzregion mindestens 100 bis 150 historische Perioden zur Verfügung stehen müssen, damit beide Verfahren zu vergleichbaren Ergebnissen führen. In der Praxis könnte die Bereitstellung einer solchen Datenhistorie allerdings problematisch sein. Selbst wenn die Daten monatsweise ausgewertet werden würden, müssten die Ausfallzahlen der vergangenen zehn Jahre in die Schätzung einfließen. Erfolgen Schätzungen auf Jahresbasis, müsste die Kredithistorie eines Jahrhunderts zur Verfügung stehen. Weiter wurde festgestellt, dass bei kurzen Kredithistorien mit der asymptotischen Methode eher höhere Mittelwerte der VaR-Verteilungen ermittelt werden als mit Bootstrapping. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass mit der asymptotischen Methode das Kreditrisiko tendenziell eher überschätzt wird. Hier besteht jedoch noch Forschungsbedarf, da bei der Bewertung eines VaR und damit des Eigenkapitalbedarfs nicht der Mittelwert, sondern ein Quantilwert der VaR-Verteilung ausschlaggebend ist.

Die Ergebnisse der Untersuchung deuten weiter darauf hin, dass die unterschiedlichen Risikoeinschätzungen im hier verwendeten Modellrahmen vor allem aus der Bewertung der Korrelation resultieren. Ob dieser Zusammenhang auch bei anderen asymptotischen Konfidenzregionen beobachtet werden kann, wurde hier nicht untersucht. Insbesondere wäre für das hier zugrundeliegende Modell zu untersuchen, wie ein Vergleich der von Höse vorgeschlagenen, auf dem Likelihood-Verhältnis beruhenden, Konfidenzregion und Bootstrapping ausfällt. Möglicherweise führen diese Methoden schon bei kürzeren Kredithistorien zu vergleichbaren Ergebnissen. Da die LV-Region die Konfidenzintervalle der beiden Parameter jedoch sehr konservativ schätzt, ist zu vermuten, dass die Vergleichbarkeit hiervon beeinträchtigt wird. Auf Grundlage der hier erzielten Ergebnisse ist daher zu erwarten, dass unterschiedliche Risikoeinschätzungen verstärkt auf



das Merkmal zurückzuführen sind, für welches die asymptotische Konfidenzregion eine schlechtere Abdeckwahrscheinlichkeit erreicht.

Die Untersuchung erfolgte hier für eine Ratingklasse auf Grundlage eines Beta-Binomial-Modells. Es ist zu vermuten, dass ähnliche Ergebnisse auch bei anderen Kreditrisikomodellen beobachtet werden können. Es wäre jedoch noch zu überprüfen, ob und, wenn ja, wie stark die Vergleichbarkeit von der Anzahl der Debitoren in den historischen Perioden abhängt.

### Anhang 1: Veranschaulichung der Bewertung von Schätzunsicherheit

Auf Grundlage der in Tabelle 1 beschriebenen Beobachtungen werden die Parameter  $\tilde{p}_T^{ML} = 2,98\%$  und  $\tilde{\rho}_T^{ML} = 0,0245$  unter Verwendung von Gleichung (8) geschätzt. Die Informationsmatrix wird entsprechend den Gleichungen (12) unter Verwendung von  $\tilde{p}_T^{ML}$  und  $\tilde{\rho}_T^{ML}$  bestimmt:

$$\widehat{I(p, \rho)_T} = \begin{pmatrix} 1798,47 & -633,90 \\ -633,90 & 811,92 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

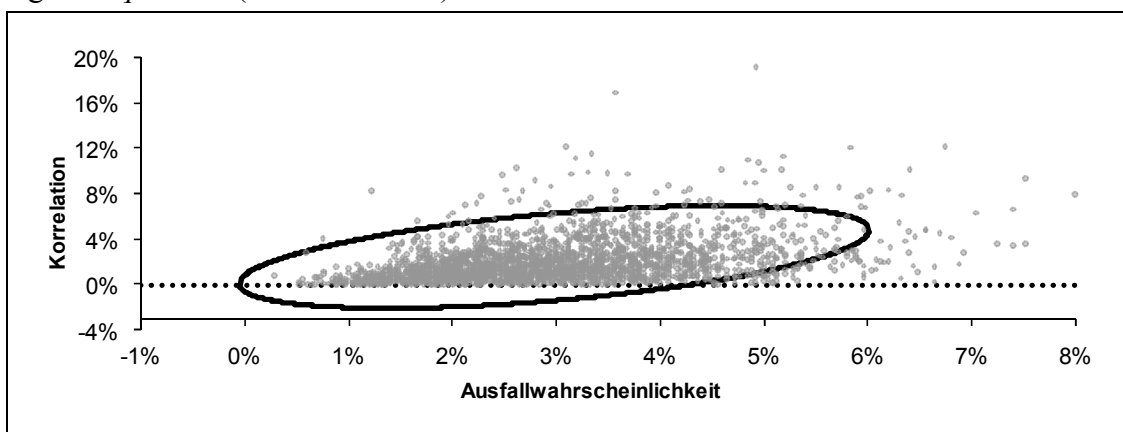
Die Wertepaare, wie sie sich unter Verwendung der Methode des parametrischen Bootstrappings ergeben, werden durch die Erzeugung von 2.500 Bootstrap-Stichproben und damit einer Matrix mit 2.500 Wertepaaren  $(\tilde{p}_T^{ML}, \tilde{\rho}_T^{ML})$  bestimmt. Die erzeugten Wertepaare werden in Abbildung 6 veranschaulicht (graue Punkte). Der schwarz hervorgehobene Punkt zeigt das auf Grundlage der Ausgangsstichprobe geschätzte Wertepaar  $\tilde{p}_T^{ML} = 2,98\%$  und  $\tilde{\rho}_T^{ML} = 0,0245$ . Die ellipsenförmige schwarze Linie grenzt die asymptotische Konfidenzregion der beiden Parameter zum Vertrauensniveau  $1-q = 95\%$  ab.

Die asymptotische Konfidenzregion in Abbildung 6 weist auch Werte im negativen Bereich der beiden Achsen auf. Hierbei handelt es sich um rein theoretische Lösungen. Wie in Abschnitt 2 formuliert, sind die Ausfallkorrelation und die Ausfallwahrscheinlichkeit im Beta-Binomial-Modell stets größer als Null. Dennoch wird deutlich, dass die asymptotische Konfidenzregion und die mit Bootstrapping erzeugten Wertepaare auch im positiven Quadranten nicht identisch sind. So liegen 6,84% beziehungsweise 171 der mit Bootstrapping erzeugten Wertepaare außerhalb der dargestellten asymptotischen Konfidenzregion. Bei Übereinstimmung der Regionen wären 5% (125) zu erwarten gewesen. Wird das Vertrauensniveau auf 99% erhöht, liegen mit 3,12% im Verhältnis sogar noch deutlich mehr der mit Bootstrapping erzeugten Parameterpaare außerhalb der asymptotischen Konfidenzregion. Andererseits führt eine Absenkung des Vertrauensniveaus auf 90% dazu, dass mit 9,04% deutlich weniger der mit Bootstrapping erzeugten Parameterpaare außerhalb der asymptotischen Konfidenzregion liegen als es zu er-

warten gewesen wäre. Eine Übereinstimmung wird hier im Beispiel bei einem Vertrauensniveau von etwa 91,6% erreicht.

Abbildung 6:

Mit Bootstrapping erzeugte Wertepaare  $(\tilde{p}_T^{ML}, \tilde{\rho}_T^{ML})$  (graue Punkte, der schwarze Punkt bezeichnet das Parameterpaar der Ausgangsstichprobe) und asymptotische Konfidenzregion  $1-q = 95\%$  (schwarze Linie)



Quelle: Eigene Berechnungen

## Anhang 2: Herleitung der Verteilungen der VaR

Im Folgenden wird beschrieben, wie die Verteilungen der VaR des Kreditrisikos mittels Monte-Carlo-Simulation abgeleitet werden können. Zunächst wird die Vorgehensweise bei der Verwendung asymptotischer Konfidenzregionen beschrieben.

Der asymptotischen Konfidenzregion liegt im oben beschriebenen Modell eine  $\chi^2_{2,1-q}$ -Verteilung mit zwei Freiheitsgraden zugrunde. Das Vertrauensniveau ist mit  $1-q$  bezeichnet, wobei  $0 \leq q < 1$ . Bei einem gegebenen Vertrauensniveau können somit alle Wertepaare  $(p, \rho)$  der die Konfidenzregion abgrenzenden Ellipse bestimmt werden. Alle Wertepaare die auf einer solchen Ellipse liegen, weisen die selbe Wahrscheinlichkeit dafür auf, dass sie das tatsächliche aber unbekannte Parameterpaar abbilden.

(Schritt AS\_1) Im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation wird zunächst aus einer Gleichverteilung zufällig ein Wert für  $q$  gezogen. Mit diesem wird das Quantil der Chi-Quadratverteilung an der Stelle  $1-q$  bestimmt. Ist dieser Quantilswert gegeben, kann sowohl der maximal als auch der minimal mögliche Wert für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  abgeleitet werden. Diese Werte entsprechen den beiden Schnittpunkten der durch  $q$  definierten Ellipse mit ihrer Hauptachse. Die Ober- und Untergrenze für  $p$  wird wie folgt berechnet:

Aus Gleichung (11) ist bekannt:

$$T\left(\left(\tilde{p}_T^{ML}, \tilde{\rho}_T^{ML}\right) - (p, \rho)\right) \widehat{I(p, \rho)}_T \left(\left(\tilde{p}_T^{ML}, \tilde{\rho}_T^{ML}\right) - (p, \rho)\right)' \leq \chi_{2,1-q}^2, \quad (\text{A1})$$

wobei die rechte Seite von (A1) mit dem zufällig gezogenen  $q$  berechnet werden kann. Beidseitige Division durch  $T$  und Vereinfachen führt zu:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_T^{ML} - p & \tilde{\rho}_T^{ML} - \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_3 & I_4 \end{pmatrix}_T \begin{pmatrix} \tilde{p}_T^{ML} - p \\ \tilde{\rho}_T^{ML} - \rho \end{pmatrix} \leq \frac{\chi_{2,1-q}^2}{T}, \quad (\text{A2})$$

durch Ausmultiplizieren folgt:

$$\left(\tilde{p}_T^{ML} - p\right)\left[\left(\tilde{p}_T^{ML} - p\right)I_1 + \left(\tilde{\rho}_T^{ML} - \rho\right)I_3\right] + \left(\tilde{\rho}_T^{ML} - \rho\right)\left[\left(\tilde{p}_T^{ML} - p\right)I_2 + \left(\tilde{\rho}_T^{ML} - \rho\right)I_4\right] \leq \frac{\chi_{2,1-q}^2}{T}. \quad (\text{A3})$$

Da hier die Ellipse betrachtet werden soll, für welche die obige Bedingung gerade noch gilt, kann der linke Ausdruck von Ungleichung (A3) gleich dem rechten Ausdruck gesetzt werden. Nach Substitution von  $\tilde{p}_T^{ML} - p \equiv p^{sub}$  und  $\tilde{\rho}_T^{ML} - \rho \equiv \rho^{sub}$  kann (A3) vereinfacht werden:

$$\left(p^{sub}\right)^2 I_1 + p^{sub} \rho^{sub} (I_3 + I_2) + \left(\rho^{sub}\right)^2 I_4 - \frac{\chi_{2,1-q}^2}{T} = 0. \quad (\text{A4})$$

Die Lösungen für (A4) lauten:

$$\rho_{1,2}^{sub} = -\frac{p^{sub}(I_3 + I_2)}{2I_4} \pm \sqrt{\left(\frac{p^{sub}(I_3 + I_2)}{2I_4}\right)^2 - \frac{(p^{sub})^2 I_1}{I_4} + \frac{\chi_{2,1-q}^2}{TI_4}}. \quad (\text{A5})$$

Da an den beiden Schnittpunkten der Hauptachse mit der Ellipse der Ausfallkorrelation nur genau ein Wert zugeordnet werden kann, muss der Ausdruck unter der Wurzel in (A5) den Wert Null annehmen:

$$\left(\frac{p^{sub}(I_3 + I_2)}{2I_4}\right)^2 - \frac{(p^{sub})^2 I_1}{I_4} + \frac{\chi_{2,1-q}^2}{TI_4} = 0. \quad (\text{A6})$$

Umstellen nach  $p^{sub}$  liefert:

$$p^{sub} = \pm \sqrt{\frac{-4\chi_{2,1-q}^2 I_4}{T[(I_3 + I_2)^2 - 4I_1 I_4]}}, \quad (\text{A7})$$

mit  $\tilde{p}_T^{ML} - p \equiv p^{sub}$  folgt:

$$p_{\min, \max} = \tilde{p}_T^{ML} \pm \sqrt{\frac{-4\chi_{2,1-q}^2 I_4}{T[(I_3 + I_2)^2 - 4I_1 I_4]}}. \quad (\text{A8})$$

Mit Gleichung (A8) kann somit das Intervall für die Ausfallwahrscheinlichkeit bei gegebenem Vertrauensniveau bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass im Modell  $0 < p < 1$  gilt. Damit ergibt sich das Intervall der Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von  $q$  als:

$$\left[ \text{Max} \left( 0 + \varepsilon; \tilde{p}_T^{ML} - \sqrt{\frac{-4\chi_{2,1-q}^2 I_4}{T[(I_3 + I_2)^2 - 4I_1 I_4]}} \right), \text{Min} \left( 1 - \varepsilon; \tilde{p}_T^{ML} + \sqrt{\frac{-4\chi_{2,1-q}^2 I_4}{T[(I_3 + I_2)^2 - 4I_1 I_4]}} \right) \right], \quad (\text{A9})$$

wobei  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(Schritt AS\_2) Da sämtliche Wertepaare auf der Ellipse die selbe Wahrscheinlichkeit dafür aufweisen, dem tatsächlichen Wertepaar zu entsprechen, kann für die Ausfallwahrscheinlichkeit eine Gleichverteilung im Intervall (A9) angenommen werden. Damit kann im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation für jedes zufällig ermittelte  $q$  ein zufälliger Wert für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{Zufall}$  bestimmt werden.

(Schritt AS\_3) Einer zufällig gezogenen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{Zufall}$  können maximal zwei Ausfallkorrelationen zugeordnet werden, damit Gleichung (A1) erfüllt werden kann:

$$\rho_{Zufall 1,2} = -\frac{(\tilde{p}_T^{ML} - p_{Zufall})(I_3 + I_2)}{2I_4} \pm \sqrt{\left( \frac{(\tilde{p}_T^{ML} - p_{Zufall})(I_3 + I_2)}{2I_4} \right)^2 - \frac{(\tilde{p}_T^{ML} - p_{Zufall})^2 I_1}{I_4} + \frac{\chi_{2,1-q}^2}{TI_4}}. \quad (\text{A10})$$

Auch hier gilt, dass die beiden möglichen Wertepaare die selbe Wahrscheinlichkeit dafür aufweisen, dass sie das tatsächliche Wertepaar abbilden. In der Monte-Carlo-Simulation kann damit eines der beiden Paare zufällig ausgewählt werden, wobei jedes Paar mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% gezogen wird.

Da in der hier zugrundeliegenden Konfidenzregion theoretisch auch Werte möglich sind, die außerhalb des Definitionsbereichs der Ausfallkorrelation liegen, werden noch folgende Annahmen getroffen:

Liegt nur eine der beiden möglichen Ausfallkorrelationen bei gegebenen  $p_{Zufall}$  im Definitionsbereich, dann wird dieser Wert als  $\rho_{Zufall}$  gewählt.

Liegen beide möglichen Werte außerhalb des Definitionsbereiches wird in der Simulation zurück zu Schritt AS\_1 gegangen.

(Schritt AS\_4) Mit dem zufällig ermittelten Wertepaar  $(\rho_{\text{Zufall}}, \rho_{\text{Zufall}})$  kann die Risikoverteilung aus Gleichung (5) parametrisiert und der VaR abgeleitet werden. Dieser wird gespeichert.

Nachdem beschrieben wurde, wie aus der asymptotischen Konfidenzregion mittels Monte-Carlo-Simulation ein zufälliger Wert für den VaR ermittelt wird, erfolgt im Folgenden eine Erläuterung der Vorgehensweise bei der Ableitung eines zufälligen Wertes für den Value at Risk, wenn die Konfidenzregion mittels Bootstrapping bestimmt wird.

(Schritt AS\_5) Zur Bestimmung von zufälligen VaR auf Grundlage der mit Bootstrapping ermittelten Konfidenzregion werden die Schritte (S1) bis (S3) aus Kapitel 3 durchgeführt. Gleichung (5) wird mit dem in (S3) geschätzten Parameterpaar parametrisiert, der zugehörige VaR bestimmt und gespeichert.

(Schritt AS\_6) X-maliges Wiederholen der Schritte (AS\_1) bis (AS\_5).

(Schritt AS\_7) Ableitung der empirischen Verteilungen der VaR.

## Literaturverzeichnis

- Albrecht, P.; Maurer, R.* (2005): Investment- und Risikomanagement, 2. Auflage. Schäffer-Poeschel Verlag: Stuttgart.
- Basel Committee on Banking Supervision* (2005): International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards A Revised Framework. Basel.
- Bleymüller, J.; Gehlert, G. Gülicher, H.* (1998): Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 11. Auflage. Vahlen Verlag: München.
- Brown, L. D.; Cai, T. T.; DasGupta, A.* (2001): Interval Estimation for a Binomial Proportion, in: Statistical Science, Vol. 16, No. 2, 2001, S. 101-117.
- Cassart, D.; Castro, C.; Langendries, R.; Alderweireld, T.* (2007): Confidence Sets for Asset Correlation, <http://www.econ.kuleuven.be/ew/academic/econometr/abstracts/abstract0607/Iragorri.pdf> (Download: 06.03.08).
- Chernick, M. R.* (2008): Bootstrap Methods A Guide for Practitioners and Researchers, 2. Auflage. John Wiley and Sons.
- Christensen, J. H. E.; Hansen, E.; Lando, D.* (2004): Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities, in: Journal of Banking & Finance 28, S. 2575-2602.
- Dannenberg, H.* (2007): Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bei der Risikobewertung, in: CM Controller Magazin, 6/2007, S.630-634.
- Dannenberg, H.* (2008): Vergleich der Kreditrisikobewertung bei Berücksichtigung von Schätzunsicherheit und Korrelation, in: Die Unternehmung, 5/2008, S. 462-481.
- Embrechts, P.; Frey, R.; McNeil, A. J.* (2005): Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press: Princeton, Oxford.
- Efron, B.* (1979): Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, in: The Annals of Statistics, Vol. 7, No. 1, S. 1-26.
- Frey, R.; McNeil, A. J.* (2003): Dependent defaults in models of portfolio credit risk, in: Journal of Risk, Vol. 6, No. 1, Fall, S. 59-92.
- Gleißner, W.; Romeike, F.* (2008): Risikoblindheit und Methodikschwächen, in: RISIKO MANAGER 21/2008, S. 1 und S. 8-12.
- Hamerle, A.; Knapp, M.; Liebig, T. Wildenauer, N.* (2005): Incorporating prediction and estimation risk in point-in-time credit portfolio models, in: Deutsche Bundesbank Discussion Paper 13/2005.

- 
- Hanson, S.; Schuermann, T. (2006):* Confidence intervals for probabilities of default, in: *Journal of Banking & Finance* 30, S. 2281-2301.
- Höse, B. S. (2007):* Statistische Genauigkeit bei der simultanen Schätzung von Abhängigkeitsstrukturen und Ausfallwahrscheinlichkeiten in Kreditportfolios. Shaker Verlag: Aachen.
- Kapalanski, G. (2002):* VAR risk measurement vs traditional risk measures: an analysis and survey, in: *Journal of Risk*, Volume 4, No. 3, Spring 2002, S. 1-27.
- Lawrenz, J. (2008):* Assessing the Estimation Uncertainty of Default Probabilities, in: *Kredit und Kapital*, 41. Jahrgang, Heft 2, S. 217-238.
- Miao, W.; Gastwirth, J. L. (2004):* The Effect of Dependence on Confidence Intervals for a Population Proportion, in: *American Statistical Association*, Vol. 58, No. 2, S.124-130.
- Pluto, K.; Tasche, D. (2005):* Thinking positively, in: *Risk*, August, S. 72-78.
- Stein, R. M. (2003):* Are the probabilities right?, Technical report #030124, Moody's KMV.
- Trück, S.; Rachev, S. T. (2005):* Credit portfolio risk and probability of default confidence sets through the business cycle. *Journal of credit Risk*, Vol. 1, No. 4, S. 61-88.
- Vose, D. (2005):* Risk analysis A quantitative guide, 2. korrigierte Auflage. John Wiley and Sons.